31
0-65

552

522

Интересно, найти числовые выражения для разных черт каждого человека, например: количество отжимов, измерять отклонения в сторону + ~~той~~ действительной вероятности событий от воображаемых данных субъектом.

02
03
31
5520-65

Р. ОРЖЕНЦКІЙ.

СВОДНЫЕ ПРИЗНАКИ.

Б/Ч-427
БИБЛІОТЕКА
Книжный Магазинъ
В. А. ПРОСВИЧЕНКО
КІЕВЪ.

1910.

Печатано по опредѣленію Совѣта Демидовскаго юридическаго лицей.
И. д. Директора лицея *В. Щегловъ*.

ЯРОСЛАВЛЬ.
ТИПОГРАФІЯ ГУБЕРНСКАГО ПРАВЛЕНІЯ.

Настоящая книга посвящена методологическому изслѣдованію среднихъ и относительныхъ величинъ. Она состоитъ изъ трехъ частей. Въ первой излагаются основныя понятія о сводныхъ признакахъ и пріемы изслѣдованія ихъ устойчивости по способу Lexis'a и Bortkewitch'a; во второй—преобразованіе и изслѣдованіе рядовъ по способу Pearson'a; въ третьей—дана попытка объяснить причину сходства статистической правильности общественныхъ явленій съ такою же правильностью явленій органической жизни вообще.

Въ отдѣлахъ, требующихъ математическаго изложенія, авторъ старался пользоваться элементарными пріемами, прибѣгая къ болѣе сложнымъ формуламъ только въ неизбѣжныхъ случаяхъ и, по возможности, послѣ выясненія логическаго смысла операціи. Если бы тѣмъ не менѣе математическая часть представляла затрудненіе, авторъ предложилъ бы для облегченія пониманія общаго хода изложенія выпустить стр. 69—85, 105—106, 133—135, 143—148, 173—176, 231—238, 240—242, 244—251 и 291—293. При изложеніи первой части книги авторъ не могъ воспользоваться работой г. А. А. Чупрова (Очерки по теоріи статистики), такъ какъ ко времени появленія указанной работы соотвѣтствующій отдѣлъ настоящей книги былъ уже отпечатанъ.

Численные примѣры служатъ исключительно матеріаломъ для иллюстраціи пріемовъ вычисленія и другого значенія не имѣютъ.

Оглавленіе.

Стр.

Предисловіе, оглавленіе, опечатки I

Часть первая.

1. Общее понятіе о сводныхъ признакахъ 1
2. Понятіе элементарной ошибки и законъ ея накопленія . . 24
3. Возрастающая вѣроятность приближенія средней къ истинной съ увеличеніемъ числа случаевъ 42
4. Сравненіе эмпирическихъ уклоненій съ теоретическими . . 59
5. Общая формула закона случайныхъ уклоненій . . . 67
6. Примѣненіе закона случайныхъ уклоненій къ изслѣдованію эмпирическихъ рядовъ 86
7. Относительныя величины 96
8. Нормальное разсѣяніе при составной вѣроятности. Поднормальное разсѣяніе 112
9. Сверхнормальное разсѣяніе 141
10. Мѣра уклоненія для простѣйшихъ функцій наблюдаемыхъ величинъ 171

Часть вторая.

1. Общее понятіе о преобразованіи рядовъ 184
2. Вычисленіе моментовъ 192
3. Распредѣленіе варіантъ 211
4. Преобразованіе ряда посредствомъ функціи простѣйшаго вида . 219
5. Преобразованіе ряда посредствомъ нормальной кривой . . 226
6. Выводъ асимметричной кривой 239
7. Типы кривыхъ 245
8. Выраженіе критерія въ моментахъ ряда 257
9. Типы I, II, III 262
10. Типъ IV 269
11. Типъ V 278
12. Мѣра совпаденія 282

Приложенія ко второй части:

I. Таблица значеній F_γ 296

II. Таблица логариѳмовъ функціи $\Gamma(p)$ . . . 297

Часть третья.

1. Логическое значеніе сводныхъ признаковъ 300
2. Теорія вѣроятности и свобода воли 330
3. Объективная причинность и субъективная свобода . . . 347
4. Объективная цѣлесообразность 369
5. Дисперсія и полиморфизмъ цѣлей 386
6. Объективный характеръ формъ поведенія 394
7. Субституція цѣли 425
8. Заключеніе 437

ОПЕЧАТКИ.

стр.	строка:	вмѣсто:	должно быть:
105	14, сверху	$x_1, x_2 \ldots x_n$	$x_1+x_2+\ldots+x_n$
192	12, снизу	1170	1179
»	таблица сбоку 2-ая графа	12	10
229	8, сверху	Alph.	Adolphe
243	14, сверху	абсциссы	оси абсциссы
244	6, сверху,	$(a+x)$	$(a-x)$
249	1, сверху	выражение	выражение, знаменатель котораго равенъ
250	6, сверху	$\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)$	$\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$
252	внизу	$\left\{1+\frac{x}{13{\cdot}52728}\right\}$	$\left\{1-\frac{x}{13{\cdot}52728}\right\}$
274	12, сверху	52 сантм.	0·52 сантм.
417	8, сверху	проблескомъ	проблескамъ
422	15, снизу	филогинетическаго	филогенетическаго

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

1. ОБЩЕЕ ПОНЯТІЕ О СВОДНЫХЪ ПРИЗНАКАХЪ.

Если не считать статистикой простой счетъ какихъ-либо явленій, напримѣръ, въ Германской имперіи въ 1907 году было собрано 9 757 859 тоннъ (по 1000 килогр. тонна) ржи, или тамъ же въ 1906 году состоялось 498 990 браковъ, то статистическій методъ сведется къ характеристикѣ явленій посредствомъ среднихъ и относительныхъ величинъ и установленію правильныхъ зависимостей между этими величинами другъ по отношенію къ другу, и между ними и другими признаками или моментами. Средней (ариѳметической) называется сумма величинъ, дѣленная на ихъ число; относительнымъ числомъ я буду называть отношеніе числа предметовъ, обладающихъ извѣстнымъ признакомъ, къ числу всѣхъ предметовъ, часть которыхъ первые составляютъ. Такъ, средній ростъ въ 162·4 сантим. характеризуетъ группу въ 1 350 000 итальянцевъ, явившихся къ отбыванію воинской повинности; отношеніе числа хозяевъ безъ рабочаго скота (въ Острогожскомъ уѣздѣ Воронежской губерніи по изслѣдованію 1885 г.) къ числу всѣхъ хозяйствъ составляетъ $\frac{8\,728}{33\,581}=0{\cdot}26$ или 26% на 100 [1]). Можно установить извѣстную зависимость между относительнымъ числомъ кражъ, сравнительно съ

[1]) Ф. Щербина. Крестьянское хозяйство по Острогожскому уѣзду. Воронежъ 1887. Стр. 197.

общимъ числомъ преступленій, и средней цѣной на хлѣбъ; или между относительнымъ числомъ лицъ, вступающихъ въ бракъ сравнительно со всѣмъ населеніемъ несостоящимъ въ бракѣ между 15 и 70 годами возраста, и временемъ года.

Если среднія и относительныя числа характеризуютъ явленіе или объектъ, то, слѣдовательно, они являются признаками; въ отличіе же отъ признаковъ конкретно принадлежащихъ какому-либо объекту, ихъ можно назвать сводными, такъ какъ они получаются путемъ сведенія къ одному выраженію нѣкотораго числа моментовъ или величинъ.

Характерной особенностью сводныхъ признаковъ является то обстоятельство, что сводный признакъ для явленій или объектовъ извѣстнаго рода, времени и мѣста представляетъ почти всегда различную величину, въ зависимости отъ того, возьмемъ ли мы то или другое число объектовъ; но различія эти бываютъ часто сравнительно весьма незначительны. Съ другой стороны, сводные признаки предметовъ и явленій извѣстнаго рода, взятыхъ въ разныхъ мѣстахъ или въ разное время, часто весьма мало отличаются другъ отъ друга. Такъ, относительное число браковъ ко всему населенію въ Германіи въ 1905 и 1906 г.г. составляетъ 8·1 и 8·2 на тысячу жителей.

Отсюда естественно возникаетъ вопросъ: какое значеніе слѣдуетъ придавать несовпаденію сводныхъ признаковъ для объектовъ или явленій, взятыхъ въ предѣлахъ одного и того же рода, времени и мѣста; и обратно, какое значеніе слѣдуетъ придавать сравнительно незначительной разницѣ въ величинѣ сводныхъ признаковъ для однород-

ныхъ объектовъ или явленій, взятыхъ въ разныхъ мѣстахъ или въ разное время?

Рѣшеніе этого вопроса оказывается непосредственно связаннымъ съ основнымъ вопросомъ о логической природѣ сводныхъ признаковъ: съ вопросомъ о тѣхъ логическихъ основаніяхъ, въ силу которыхъ мы вообще считаемъ возможнымъ оперировать съ сводными признаками, въ то время, какъ они по способу своего происхожденія неприсущи никакому конкретному объекту или явленію. Послѣдней особенностью сводные признаки отличаются отъ признаковъ, конкретно присущихъ предмету или явленію, и родовыхъ признаковъ, присущихъ конкретно каждому экземпляру рода.

Что вообще заставляетъ насъ прибѣгать къ своднымъ признакамъ, не ограничиваясь признаками родовыми, конкретно присущими каждому объекту и невызывающими никакихъ особыхъ логическихъ затрудненій?

Всякій объектъ представляетъ собою комплексъ признаковъ, соединенныхъ во-едино. Безчисленное множество объектовъ, подлежащихъ изученію, представляетъ собою безчисленное множество такихъ комплексовъ. Одна изъ цѣлей познанія состоитъ въ томъ, чтобы въ рядѣ комплексовъ установить сходное и различное. Сходный признакъ или сходные признаки нѣсколькихъ или многихъ объектовъ выдѣляются въ особое понятіе, и это понятіе объединяетъ данные объекты въ одну группу. Подобное выдѣленіе одного или нѣсколькихъ признаковъ и возникающее отсюда объединеніе соотвѣтствующихъ объектовъ въ одну группу имѣетъ различное значеніе для цѣлей познанія.

Въ однихъ случаяхъ выдѣленный признакъ (или признаки) даетъ достаточное или почти достаточное для извѣстныхъ цѣлей познаніе группы объектовъ, объединенныхъ даннымъ признакомъ или признаками. Остальные признаки каждаго объекта группы, какъ сходные, такъ и различные, представляются либо вовсе не имѣющими значенія для данныхъ цѣлей познанія, либо имѣющими второстепенное значеніе и потому оставляются безъ вниманія. Такъ, напримѣръ, выдѣленіе признаковъ: желтый цвѣтъ въ слиткѣ, высокая ковкость, удѣльный вѣсъ около 19·32, плавленіе при 1095°3., атомный вѣсъ около 197, способность вступать въ извѣстныя химическія соединенія—даетъ понятіе, которое объединяетъ соотвѣтствующіе объекты въ группу—золото, и этихъ признаковъ вполнѣ достаточно для того, чтобы опредѣлить золото въ физико-химическомъ отношеніи; остальные признаки каждаго отдѣльнаго экземпляра этой группы, сходные или различные, какъ-то: вѣсъ экземпляра, мѣстонахожденіе, форма, цѣна, принадлежность его тому или другому лицу на извѣстномъ правѣ и т. д.—съ этой точки зрѣнія неважны. Въ такихъ случаяхъ выдѣляемые общіе признаки или признакъ называются типическими; образуемое изъ нихъ понятіе—типомъ, а группа объединенныхъ этимъ понятіемъ объектовъ—типичной группой.

Схематически такая группа можетъ быть изображена слѣдующимъ образомъ:

$$O_1 = A\,U\,b\,c\,d\,e$$
$$O_2 = A\,U\,b\,f\,g\,h$$
$$O_3 = A\,U\,b\,i\,k\,l$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$O_1, O_2, O_3, \ldots = AU$$

Здѣсь, $0_1, 0_2$... изображаютъ отдѣльные объекты; A, U, b, c... признаки, соединеніе которыхъ образуетъ каждый отдѣльный объектъ; A, U признаки, образующіе типъ или родовое понятіе; b, c, d... признаки, оставляемые безъ вниманія.

Въ другихъ случаяхъ отвлеченіе одного или нѣсколькихъ признаковъ, хотя и характеризуетъ образуемую этимъ отвлеченіемъ группу объектовъ, но въ степени менѣе или совсѣмъ недостаточной для цѣлей познанія; оно не исчерпываетъ собою всѣхъ признаковъ, которые представляются намъ важными для познанія соотвѣтствующихъ объектовъ. Такого рода общіе отвлекаемые отъ отдѣльныхъ объектовъ признаки, но недостаточно ихъ характеризующіе, мы называемъ нетипичными, а образуемую ими группу объектовъ—собирательной группой. Собирательной будетъ группа людей, объединяемыхъ, напримѣръ, общимъ признакомъ опредѣленнаго возраста—20 лѣтъ; признакомъ принадлежности къ извѣстной мѣстности—пребыванія въ томъ или другомъ городѣ и т. п.

Схематически можно изобразить собирательныя группы слѣдующимъ образомъ:

$$0_1 = a\, b_1\, c\, d\, e\, f \ldots .$$
$$0_2 = a\, b_2\, f\, g\, h\, i \ldots .$$
$$0_3 = a\, b_3\, e\, i\, k\, l \ldots .$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$0_1, 0_2, 0_3, \ldots = a.$$

Здѣсь $0_1, 0_2, \ldots\ldots$ представляютъ отдѣльные объекты; a—общій всѣмъ объектамъ, но недостаточный для полной ихъ характеристики признакъ; $b_1, b_2, \ldots$ c, d, ... различные другіе признаки. Объекты $0_1, 0_2 \ldots$ образуютъ собирательную группу по признаку a.

Среднее мѣсто между этими двумя группами познаваемыхъ объектовъ представляютъ тѣ случаи, когда отвлеченіе нѣкоторой суммы признаковъ, хотя образуетъ нѣчто въ родѣ типичной группы, т. е. даетъ болѣе или менѣе опредѣленное представленіе и понятіе о входящихъ въ группу предметахъ, но не исчерпываетъ всего многообразія индивидуальныхъ особенностей различныхъ объектовъ группы, особенностей, представляющихъ, однако, важность для познанія этихъ объектовъ, такъ, напримѣръ, отвлеченіе нѣкоторыхъ признаковъ образуетъ группу, которую мы называемъ типомъ фабричнаго рабочаго, женатаго человѣка, француза и т. п. Однако общія родовыя черты объектовъ, заключающихся въ этихъ группахъ, далеко не характеризуютъ въ достаточной степени всѣ отдѣльные экземпляры каждой группы. При этомъ въ однихъ случаяхъ характеризующая сила общихъ отвлекаемыхъ признаковъ больше, и группа приближается къ типичнымъ, въ другихъ—меньше, и группа приближается къ собирательнымъ. Такого рода среднія между типичными и собирательными группы мы можемъ назвать типо-подобными (собирательно-типичными)[1]. Наконецъ, типичныя группы становятся собирательными, если мы обращаемъ вниманіе на индивидуальные признаки входящихъ въ группу предметовъ, разсматривая типичные признаки лишь какъ моментъ, объеди-

[1] Признакъ вообще будетъ тѣмъ болѣе типичнымъ, чѣмъ болѣе онъ характеризуетъ объекты, а это бываетъ тогда, когда онъ опредѣляетъ собою наличность возможно большаго числа другихъ признаковъ, т. е. когда онъ связанъ необходимыми и безусловными (см. ниже) связями съ возможно большимъ количествомъ другихъ признаковъ. Этимъ описательная часть познанія связывается съ объяснительной.

няющій отдѣльные объекты въ общую собирательную группу.

Типичныя и собирательныя группы различаются по отношенію къ пріемамъ ихъ познаванія; собирательно-типичныя группы, поскольку онѣ обладаютъ типичнымъ характеромъ, подчиняются пріемамъ изученія типичныхъ группъ; поскольку онѣ обладаютъ собирательнымъ характеромъ,— пріемамъ изученія собирательныхъ группъ.

Изученіе вообще состоитъ либо: а) въ установленіи наличности объектовъ, б) установленіи признаковъ объектовъ и в) классификаціи объектовъ (описательная часть изученія); либо въ установленіи необходимыхъ связей между признаками объектовъ (объяснительная часть изученія). Для типичныхъ группъ и описаніе, и объясненіе находитъ свое естественное содержаніе въ типичныхъ признакахъ. *Описаніе* типичной группы состоитъ: а) въ установленіи типичныхъ признаковъ (собственно описаніе) и б) въ установленіи взаимнаго іерархическаго отношенія этихъ признаковъ (классификація) [1]). *Объясненіе* по отношенію къ объектамъ типичной группы состоитъ въ установленіи необходимыхъ связей типичныхъ признаковъ между собою [2]). Связи эти могутъ быть: а) необходимая связь между даннымъ типичнымъ признакомъ объекта и другимъ такимъ же признакомъ того же объекта въ одинъ и тотъ же моментъ времени (не-

---

[1]) И чистое описаніе, и классификація предвосхищаютъ въ бо́льшей или меньшей степени объясненіе, поскольку они основаны (explicite или implicite) на необходимыхъ связяхъ.

[2]) Понятіе необходимости, безусловности и т. п. привносится нами въ содержаніе опыта на основаніи допущенія познаваемости вещей, т. е. на основаніи допущенія, что оказавшееся связаннымъ въ данномъ опытѣ будетъ связано во всякомъ опытѣ.

обходимая связь существенныхъ свойствъ объекта); б) необходимая связь между двумя признаками одного и того же объекта въ послѣдующіе моменты времени (законъ измѣненія объекта, или просто законъ) и в) необходимая связь признака одного объекта съ признакомъ другого объекта (причинная связь) [1]). Иначе говоря, объясненіе состоитъ вообще въ установленіи необходимаго сосуществованія различныхъ признаковъ объекта, установленіи закона измѣненій и установленіи причинныхъ связей, причемъ для объектовъ типичныхъ группъ объясненіе состоитъ въ установленіи этихъ связей именно для типичныхъ признаковъ.

Точно такъ же, какъ мы поступаемъ съ типичными признаками типичныхъ группъ, мы можемъ поступать и съ тѣми признаками, на основаніи которыхъ мы объединяемъ объекты въ собирательныя группы. Мы можемъ устанавливать эти признаки, указывать ихъ взаимное іерархическое отношеніе; опредѣлять необходимыя связи между признаками одного и того же объекта въ одинъ и тотъ же моментъ времени и въ послѣдующіе моменты и между признаками объектовъ разныхъ группъ. Разница между такимъ изслѣдованіемъ

[1]) Указанные три случая часто смѣшиваются въ общемъ понятіи закона (природы) или причинной связи; такъ, связь двухъ признаковъ одного и того же объекта—металлическія свойства и способность проводить электричество—разсматриваются, какъ примѣръ то причинной связи, то закона природы. Разумѣется, возможна и такая терминологія, но она, во первыхъ, часто сильно расходится съ обыденнымъ представленіемъ причинной связи и закона и, во вторыхъ, не различаетъ трехъ видовъ необходимой связи. Родовымъ понятіемъ для закона, причины и другихъ подводимыхъ подъ эти термины случаевъ должно быть понятіе необходимой связи; оно распадается на три видовыхъ случая: 1) необходимая связь между признаками одного и того же объекта, 2) законъ или связь состояній или признаковъ) объекта въ послѣдующіе другъ за другомъ моменты времени и 3) причину или связь двухъ объектовъ (или отдѣльныхъ признаковъ двухъ объектовъ).

типичныхъ и собирательныхъ группъ будетъ заключаться однако въ томъ, что типичные признаки, съ которыми мы оперируемъ въ первомъ случаѣ, даютъ намъ знаніе, которое мы считаемъ для нашихъ цѣлей достаточнымъ, тогда какъ общіе признаки, съ которыми мы имѣемъ дѣло въ собирательныхъ группахъ, это именно тѣ признаки, которые мы не считаемъ достаточными для познанія объединяемыхъ ими объектовъ; поэтому и оперированіе съ этими признаками не дастъ знанія, достаточно характеризующаго собирательную группу объектовъ. Для достаточнаго познанія собирательной группы необходимо поэтому принять во вниманіе, кромѣ признаковъ, общихъ всѣмъ объектамъ группы, еще и большее или меньшее количество тѣхъ признаковъ, которые присущи каждому объекту собирательной группы въ отдѣльности.

Мы можемъ сдѣлать это тремя способами. Первый—самый безыскусственный—состоитъ въ томъ, что, объединивъ объекты въ собирательную группу по какому либо общему, но недостаточному для познанія признаку, мы затѣмъ перечисляемъ большее или меньшее количество признаковъ, свойственныхъ отдѣльнымъ объектамъ группы. Напримѣръ: объединивъ нѣсколько горныхъ вершинъ въ одну группу—горную цѣпь—по ихъ географическому положенію, мы затѣмъ можемъ указать отдѣльно для каждой горы ея особую высоту. Подобное перечисленіе какого-либо признака для каждаго объекта отдѣльно становится затруднительнымъ, а затѣмъ и невозможнымъ, когда количество объектовъ собирательной группы увеличивается; такъ, напримѣръ, простое указаніе роста

каждаго отдѣльнаго лица, призываемаго къ отбыванію воинской повинности, безъ какого-либо особаго порядка или системы, было бы безполезнымъ для познанія нагроможденіемъ цыфръ, когда общее число такихъ лицъ достигаетъ нѣсколькихъ десятковъ, тысячъ и даже милліоновъ человѣкъ. Такой пріемъ становится уже абсолютно непригоднымъ, когда приходится имѣть дѣло не съ однимъ, а съ нѣсколькими признаками. Второй способъ состоитъ въ томъ, чтобы указать крайніе предѣлы, между которыми измѣняется какой либо признакъ у отдѣльныхъ объектовъ собирательной группы. Такой пріемъ часто употребляется въ описательныхъ наукахъ (длина тѣла дикой кошки отъ 70 до 90 стм. и т. п.). Но и онъ несовершенъ, такъ какъ, съ одной стороны, не даетъ единаго представленія о всей собирательной группѣ, и съ другой—не указываетъ, какъ распредѣляются между данными предѣлами отдѣльныя величины каждаго объекта группы; сверхъ того, этотъ способъ непримѣнимъ въ томъ случаѣ, когда мы имѣемъ дѣло не съ количественными, а съ качественными различіями объектовъ. Третій способъ привлеченія индивидуальныхъ признаковъ каждаго отдѣльнаго объекта для характеристики всей собирательной группы состоитъ въ выводѣ изъ этихъ признаковъ среднихъ и относительныхъ величинъ. Признаки отдѣльныхъ объектовъ собирательной группы можно раздѣлить на двѣ группы: одни свойственны каждому объекту группы, но въ каждомъ объектѣ встрѣчаются въ своемъ особомъ размѣрѣ (ростъ, возрастъ); другіе свойственны однимъ объектамъ и не встрѣчаются у другихъ (мужескій полъ, состояніе въ бракѣ). Въ первомъ слу-

чаѣ, опредѣливъ величину даннаго признака въ каждомъ отдѣльномъ объектѣ, взявъ сумму этихъ величинъ, раздѣливъ ее на число объектовъ, мы получимъ среднюю величину. Во второмъ случаѣ, сосчитавъ число объектовъ, обладающихъ даннымъ признакомъ и отнеся его ко всему числу объектовъ (или числу объектовъ не обладающихъ даннымъ признакомъ),—раздѣливъ на все число объектовъ—мы получимъ относительную величину. Такимъ образомъ мы можемъ опредѣлить средній ростъ новобранцевъ въ Россіи въ 2 аршина 4 вершка; или отношеніе числа лицъ, состоящихъ въ бракѣ, ко всему населенію въ Германіи (1 декабря 1900 года) въ $\frac{19\ 592\ 879}{55\ 367\ 178} = \frac{3\ 476}{10\ 000}$ (или на 100 человѣкъ населенія 34·76 состоящихъ въ бракѣ).

Среднія и относительныя величины представляютъ собою прежде всего условный способъ сведенія многообразія индивидуальныхъ признаковъ каждаго отдѣльнаго объекта собирательной группы къ единому внѣшнему выраженію; въ этомъ видѣ онѣ становятся какъ бы едиными признаками всей собирательной группы и представляютъ нѣкоторую аналогію съ типичными признаками: подобно тому, какъ типичный признакъ въ единомъ выраженіи характеризуетъ всю группу, такъ характеризуетъ всю группу и каждая средняя или относительная величина. Но сейчасъ же замѣтна и разница между характеристикой того и другого рода; въ то время, какъ типичный признакъ такимъ образомъ и потому характеризуетъ всю группу, что онъ характеризуетъ каждый отдѣльный объектъ группы, что онъ присущъ каждому такому объекту, средняя или относительная величина неприсуща ни одному отдѣльному объ-

екту и только такимъ образомъ и потому характеризуетъ всю группу, что является полученнымъ опредѣленнымъ образомъ ариѳметическимъ выводомъ изъ признаковъ, присущихъ отдѣльнымъ объектамъ. Отсюда возникаетъ вопросъ, что представляютъ собою эти сводные признаки, выражающіеся въ среднихъ и относительныхъ величинахъ: являются ли они простыми условными фикціями, или же отвѣчаютъ чему-то реально существующему. Впервые категорически отвѣтилъ на этотъ вопросъ Quetelet, и отвѣтъ его склонялся въ пользу реальнаго значенія сводныхъ признаковъ. Исходя изъ того представленія, что ариѳметическая средняя изъ нѣсколькихъ или многихъ результатовъ измѣренія отвѣчаетъ реально существующей величинѣ измѣряемаго объекта, Quetelet полагалъ, что такое же значеніе имѣетъ и средній ростъ, и среднее относительное число преступленій, приходящееся на одного человѣка, и всѣ прочія среднія и относительныя величины. По его мнѣнію, средній ростъ представлялъ собою какъ бы ту дѣйствительно существующую мѣрку, съ которой природа сообразуется, воспроизводя ростъ въ каждомъ конкретномъ случаѣ, и отъ которой она въ каждомъ конкретномъ случаѣ уклоняется лишь подъ вліяніемъ случайныхъ причинъ; относительное число преступленій, приходящееся на одного человѣка, онъ представлялъ себѣ какъ бы въ видѣ мѣры склонности къ преступленію, реально присущей среднему человѣку, каковая склонность въ однихъ индивидахъ случайнымъ стеченіемъ обстоятельствъ жизни подавляется, въ другихъ находитъ свое конкретное осуществленіе. Это послѣднее представленіе встрѣтило неоднократныя возраженія.

Одно изъ нихъ нашло себѣ, между прочимъ, выраженіе въ слѣдующихъ словахъ покойнаго Rümelin'a: [1]) «если статистикъ говоритъ мнѣ, что въ теченіе предстоящаго года мнѣ угрожаетъ смерть съ вѣроятностью одного шанса противъ 49, или что съ еще большею вѣроятностью я могу ожидать горестной утраты кого-либо изъ близкихъ мнѣ людей, я долженъ преклониться передъ этой суровой истиной; но когда, основываясь на подобныхъ среднихъ числахъ, онъ пожелалъ бы сказать мнѣ, что съ вѣроятностью одного шанса противъ такого-то числа шансовъ мой поступокъ станетъ предметомъ судебнаго разбирательства, то я не колеблясь могу возразить: ne sutor ultra crepidam!».

Послѣднее замѣчаніе представляетъ нѣкоторое увлеченіе, и на это было въ свое время указано. Никто, не можетъ съ полной увѣренностью утверждать, что никогда и ни при какихъ условіяхъ онъ не совершитъ или не совершилъ бы преступленія. Но самая сущность возраженія Rümelin'a справедлива: нельзя расматривать относительное число преступленій, приходящееся на одного человѣка, какъ мѣру присущей каждому склонности къ преступленію; относительное число представляетъ собою въ отношеніи къ *каждому отдѣльному* индивиду лишь результатъ извѣстной счетной операціи. Ибо явленіе, изображаемое относительнымъ числомъ, присуще, вѣдь, только нѣкоторымъ индивидамъ группы. Но то же можно сказать въ сущности и относительно средняго числа. Хотя признакъ, для котораго выведена средняя величина, присущъ каждому индивиду группы, но самая средняя мѣра

[1]) Reden und Aufsätze, Tübingen, 1875, т. I, Ueber Begriff eines socialen Gesetzes, 1867.

этого признака не присуща никакому индивиду въ отдѣльности. Не должно ли поэтому, по аналогіи съ относительными величинами, утверждать, что и средній ростъ, и всѣ вообще среднія величины, не служатъ выраженіемъ чего-либо присущаго отдѣльному конкретному индивиду и представляютъ собою лишь результаты счетныхъ операцій, условный способъ сведенія индивидуальныхъ различій къ единому общему выраженію? Съ другой стороны, если среднія и относительныя числа и не представляютъ собою чего-либо конкретно присущаго каждому индивидуальному случаю собирательной группы, то не являются ли они тѣмъ не менѣе реальной характеристикой нѣкотораго свойства всей собирательной группы?

Очевидно, методологическое значеніе сводныхъ признаковъ будетъ совершенно различно въ зависимости отъ того, признаемъ ли мы ихъ выраженіемъ чего-то реально существующаго или же только результатомъ счетной операціи. Въ первомъ случаѣ, оперируя съ ними, мы познавали бы реальныя свойства и условія существованія объектовъ; тогда какъ во второмъ случаѣ мы имѣли бы дѣло съ абстрактными фикціями; правда, фикціи эти не были бы совершенно произвольны, такъ какъ онѣ являлись бы результатомъ опредѣленныхъ математическихъ операцій надъ дѣйствительно существующими данными, и въ этомъ смыслѣ всегда имѣли бы основу въ реально существующемъ. Но онѣ не могли бы служить выраженіемъ дѣйствительности въ томъ смыслѣ, какъ извѣстные намъ типичные признаки; ибо, въ качествѣ математическихъ результатовъ, онѣ не присущи ни одному конкретному случаю; и, слѣдова-

тельно, оперированіе съ сводными признаками было бы не только отлично отъ оперированія съ типичными съ точки зрѣнія получаемыхъ познавательныхъ результатовъ, но и требовало бы особаго методологическаго обоснованія.

Два обстоятельства какъ бы указываютъ на то, что, если не всегда, то въ извѣстныхъ случаяхъ, сводные признаки имѣютъ реальную природу: первое—это постоянство, нерѣдко удивительное, среднихъ и относительныхъ величинъ, и второе—правильное отношеніе среднихъ величинъ, къ тѣмъ отдѣльнымъ величинамъ, изъ которыхъ онѣ выводятся. Особымъ условіемъ, при которомъ обнаруживаются указанныя правильности, является то, чтобы среднія и относительныя величины были выведены изъ большого числа случаевъ; это обстоятельство дастъ намъ между прочимъ ключъ къ разгадкѣ реальнаго значенія сводныхъ признаковъ. Постоянство среднихъ и относительныхъ величинъ, выведенныхъ изъ большого числа случаевъ для явленій человѣческой жизни было указано Джономъ Гроунтомъ (John Grount) въ сочиненіи: Natural and Political Observations... upon the bills of Mortality [1]), послужившемъ основаніемъ современной статистикѣ. Болѣе опредѣленное указаніе на ту же правильность, основанное на массѣ фактическаго матеріала, мы находимъ въ сочиненіи Зюсмильха (Johann Peter Süssmilch): Die Göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben er-

[1]) Было представлено Лондонскому королевскому обществу въ 1662 г. и затѣмъ напечатано; вновь издано въ Кэмбриджѣ въ 1899 г. вмѣстѣ съ сочиненіями Petty, подъ общимъ заглавіемъ The economic writings of Sir William Petty.

wiesen [1]). Правильное же отношеніе среднихъ величинъ къ числамъ, изъ которыхъ онѣ выведены, было показано и объяснено въ многочисленныхъ работахъ Кетле (Quetelet).

Примѣрами постоянства среднихъ и относительныхъ величинъ могутъ служить слѣдующія данныя.

А) Для среднихъ. Средній возрастъ умершихъ (сумма лѣтъ, прожитыхъ каждымъ умершимъ, дѣленная на число умершихъ) для Пруссіи за указанные ниже промежутки времени составлялъ по вычисленію Энгеля: [2])

Годы.	Средній возрастъ умершихъ.
1816—1820	37·14
1821—1830	38·37
1831—1840	37·23
1841—1850	36·37
1851—1860	36·91

Средняя продолжительность жизни (сумма лѣтъ, которыя индивиды извѣстнаго возраста прожили или должны прожить до момента смерти, дѣленная на число индивидовъ) для лицъ 20-лѣтняго возраста во Франціи составляетъ: [3])

Годы.	Средняя продолжительность жизни.	
	Мужч.	Жен.
1867—77	40·4	40·1
1881—90	40·4	42.2
1894—97	40·0	42·2

[1]) Первое изданіе въ 1741 году; наиболѣе распространено 4-ое изданіе 1775 года.

[2]) Hausbofer, Lehr—und Handbuch d. Statistik, Wien, 1882 стр. 205.

[3]) C. Ballod, die mittlere Lebensdauer etc. Leipzig, 1889, стр. 24.

Б) Для относительныхъ. Отношеніе числа лицъ, вступающихъ въ бракъ, ко всему населенію въ Германской имперіи составляетъ: [1])

Въ теченіе года.	На 1000 населенія вступаетъ въ бракъ.
1851	16·6
1861	15·6
1871	16·4
1881	15·0
1891	16·0
1901	16·4

Отношеніе числа лицъ, осужденныхъ за нарушеніе имперскихъ законовъ, ко всему населенію старше 12 лѣтъ въ Германіи составляетъ: [2])

Годъ.	На 100 000 населенія старше 12 лѣтъ приходится осужденныхъ:
1897	1 248
1898	1 257
1899	1 240
1900	1 195
1901	1 256
1902	1 273
1903	1 234
1904	1 242
1905	1 230
1906	1 252

Что же касается правильности отношенія среднихъ чиселъ къ тѣмъ величинамъ, изъ которыхъ они выведены, то эта правильность выражается въ существованіи постоянной и опредѣленной зависимости между величиною уклоненія отдѣльныхъ величинъ отъ средней и числомъ случаевъ, въ которыхъ такое уклоненіе имѣетъ мѣсто. При этомъ

[1]) Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich, 1903, стр. 25.

[2]) Тотъ же источникъ за 1899—1907 г.г.

такое правильное соотношеніе между средней и тѣми величинами, изъ которыхъ она выведена, замѣчается какъ въ тѣхъ случаяхъ, когда средняя выводится изъ непосредственно данныхъ реальныхъ величинъ, такъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда средняя выводится изъ ряда относительныхъ величинъ или среднихъ. Если средній ростъ итальянцевъ, подлежащихъ воинской повинности, пріймемъ въ 162·5 сантиметровъ, то указанныя ниже уклоненія отъ этой величины встрѣчаются въ слѣдующемъ числѣ случаевъ: [1])

Ростъ въ см.	Уклоненіе отъ средней.	На 1000 измѣреній приходятся случаевъ указаннаго въ 1 графѣ роста.
Средній=162·5		
161—164	±1·5	232
158—167	±4·5	545
155—170	±7·5	777

Уклоненіе ±4·5 соотвѣтствуетъ 54% числа случаевъ; уклоненіе ±1·5 — 23% и уклоненіе ±7·5 — 75%; или 50% всего числа случаевъ должно отвѣчать уклоненіе нѣсколько меньшее, чѣмъ ±4·5; 25%—уклоненіе нѣсколько большее, чѣмъ ±1·5. Если мы примемъ уклоненіе, отвѣчающее 50%, за единицу и назовемъ его ρ, то уклоненіе, отвѣчающее 25% всего числа случаевъ, будетъ равно приблизительно 0·5 или 0·4ρ и 75% случаевъ — 1·7ρ. Такое же самое отношеніе между размѣрами уклоненій и соотвѣтствующимъ имъ числомъ случаевъ мы можемъ наблюдать и по отношенію къ другимъ даннымъ. Если мы возьмемъ

[1]) H. Westergaard, die Grundzüge der Theorie der Statistik, Jena, 1890, стр. 36.

мѣсячныя цѣны муки извѣстнаго сорта (Semmel (o)) въ г. Бернѣ за время 1891 и 1892 г.г. и выведемъ изъ нихъ среднюю, то увидимъ (см. графу третью таблицы), что 12 случаевъ или 50% всего числа случаевъ лежатъ въ предѣлахъ уклоненія отъ средней до 1·21: принявъ это уклоненіе за основаніе и помноживъ его на коэффиціенты 0·4 и 1·7, мы получимъ уклоненія 0·4×1·21=0·48 и 1·7×1·21=2·06, въ предѣлахъ которыхъ соотвѣтственно укладывается 25% и 75% всего числа случаевъ, какъ это имѣло мѣсто и въ предшествующемъ примѣрѣ.

Средніе цѣны 1 dz[1]) по мѣсяцамъ въ мар.	Уклоненія мѣсячныхъ среднихъ отъ общей средней за все время.	Тѣ же уклоненія въ порядкѣ возрастанія ихъ абсолютной величины.
Январь 31·14 .	—2·16	—0·13
Февраль 31·16 .	—2·14	—0·15
Мартъ . 32·12 .	—1·18	—0·17
Апрѣль . 33·83 .	0·53	0·23
Май . . 34·64 .	1·34	0·25
Іюнь . . 34·53 .	1·23	0·36
		25%
Іюль . . 34·51 .	1·21	0·53
Августъ 33·66 .	0·36	0·55
Сентябрь 35·27 .	1·97	0·64
Октябрь 35·38 .	2·08	—1·00
Ноябрь . 34·93 .	1·63	—1·18
Декабрь 34·64 .	1·34	1·21
		50%
Январь . 35·50 .	2·20	1·23
Февраль 33·85 .	0·55	1·34
Мартъ . 33·53 .	0·23	1·34
Апрѣль . 33·55 .	0·25	1·63
Май . . 33·94 .	0·64	1·97
Іюнь . . 33·13 .	—0·17	2·08
		75%
Іюль . . 33·17 .	—0·13	2·14
Августъ 33·15 .	—0·15	—2·16
Сентябрь 32·30 .	—1·00	2·20
Октябрь 30·72 .	—2·58	—2·56
Ноябрь . 30·74 .	—2·56	—2·58
Декабрь 29·95 .	—3·35	—3·35
Средняя 33·30		100%

[1]) Doppelzentner=100 килогр.

Отношеніе ежегоднаго числа рожденій въ Даніи къ числу населенія за періодъ съ 1860 по 1879 годъ составляетъ 3·23%; по отдѣльнымъ же годамъ коэффиціентъ рождаемости уклоняется отъ этого средняго выраженія слѣдующимъ образомъ: [1])

Коэффиціентъ рождаемости.	Уклоненія отъ средняго.	Уклоненія, указанныя въ предыдущей графѣ встрѣчаются въ числѣ случаевъ.	
		Абсолютно.	Въ % ко всему числу случаевъ.
3·23			
3·21—3·25	±0·02	4	20%
3·17—3·29	±0·06	10	50%
3·13—3·33	±0·10	16	80%

Если и здѣсь принять за основаніе то уклоненіе, въ предѣлахъ котораго встрѣчается 50% всего числа случаевъ (т. е. уклоненіе ±0·06), то, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, около 25% и 75% всего числа случаевъ даютъ уклоненія, лежащія въ предѣлахъ 0·4 и 1·7 уклоненія, принятаго за основаніе (т. е. въ предѣлахъ 0·4×0·06=0·024 и 1·7×0·06 =0·102).

Приведенные примѣры, число которыхъ могло бы быть произвольно увеличено, свидѣтельствуютъ о томъ, что средніе и относительныя числа могутъ обнаруживать опредѣленную правильность: съ одной стороны, они могутъ обладать извѣстной устойчивостью, а именно сохраняютъ болѣе или менѣе одинаковую величину въ послѣдовательные промежутки времени или въ разныхъ мѣстахъ; съ другой стороны, и самыя ихъ колебанія могутъ быть подчинены извѣстной закономѣрности, а именно, уклоняющіяся другъ отъ друга числа встрѣчаются въ опредѣленной пропорціи, сообразно

[1]) H. Westergaard, op. cit. стр. 40.

съ величиною ихъ уклоненія отъ выведенныхъ изъ нихъ среднихъ. Возникаетъ такимъ образомъ вопросъ, можно ли сдѣлать и какой именно выводъ изъ указанной правильности по отношенію къ природѣ среднихъ и относительныхъ величинъ, обнаруживающихъ эту правильность.

Правильность, обнаруживаемая средними и относительными числами, не давала бы основанія дѣлать какихъ-либо заключеній о реальной природѣ этихъ величинъ, если бы она была простымъ математическимъ свойствомъ всякой средней или относительной величины. Такъ, напримѣръ, изъ правильнаго соотношенія между средней и суммою уклоненій отъ нея, выражающагося въ томъ, что сумма положительныхъ уклоненій отъ средней равна суммѣ отрицательныхъ уклоненій, нельзя сдѣлать никакого заключенія о реальной природѣ средней или тѣхъ чиселъ, изъ которыхъ она выведена; ибо какова бы ни была реальная природа послѣднихъ, указанная правильность является слѣдствіемъ не этой природы, а того дѣйствія, какое мы производимъ надъ числами. Правильность, обнаруживаемая средними величинами по отношенію къ тѣмъ числамъ, изъ которыхъ эти величины выведены, не является слѣдствіемъ ариѳметическихъ операцій, посредствомъ которыхъ получаются среднія. Легко подобрать такія числа, которыя не будутъ находиться въ вышеуказанномъ правильномъ отношеніи съ выведенной изъ нихъ средней, и статистика представляетъ сколько угодно такихъ примѣровъ. Поэтому, если постоянство и закономѣрность среднихъ присущи имъ не всегда и не составляютъ результата простого ариѳметическаго способа ихъ полученія, то указанныя свойства

среднихъ могутъ проистекать только изъ особой природы той совокупности величинъ, изъ которыхъ выводятся среднія, обладающія указанными свойствами. Иначе говоря, среднія, обладающія извѣстнымъ постоянствомъ и обнаруживающія закономѣрность по отношенію къ уклоняющимся отъ нихъ величинамъ ряда, указываютъ на особыя условія, присущія тому реальному матеріалу, изъ котораго онѣ выводятся.

Эти особыя условія выражаются въ томъ, что отдѣльныя конкретныя величины или рядъ относительныхъ величинъ уклоняются отъ средней, выведенной изъ нихъ, по извѣстному закону. Отсюда слѣдуетъ, что и другъ отъ друга онѣ уклоняются по извѣстному закону. Иначе говоря, отдѣльныя величины ряда извѣстнымъ образомъ другъ съ другомъ связаны и въ общей ихъ совокупности проявляется дѣйствіе нѣкоторой закономѣрности.

Отсюда возникаетъ вопросъ: въ чемъ могла бы состоять такая правильность отношеній отдѣльныхъ величинъ въ ихъ общей совокупности, которая давала бы въ результатѣ закономѣрность средней, выражающуюся въ постоянствѣ этой средней и правильномъ отношеніи къ отдѣльнымъ уклоняющимся отъ нея величинамъ, будь то конкретно данныя реальныя величины, среднія или относительныя величины?

Намъ извѣстно одно возможное условіе, производящее указанный выше результатъ; оно состоитъ въ допущеніи такъ называемой случайной ошибки. Изъ самаго опредѣленія случайной ошибки будетъ вытекать, что средняя изъ ряда величинъ, снабженныхъ комбинаціями случайной ошибки,

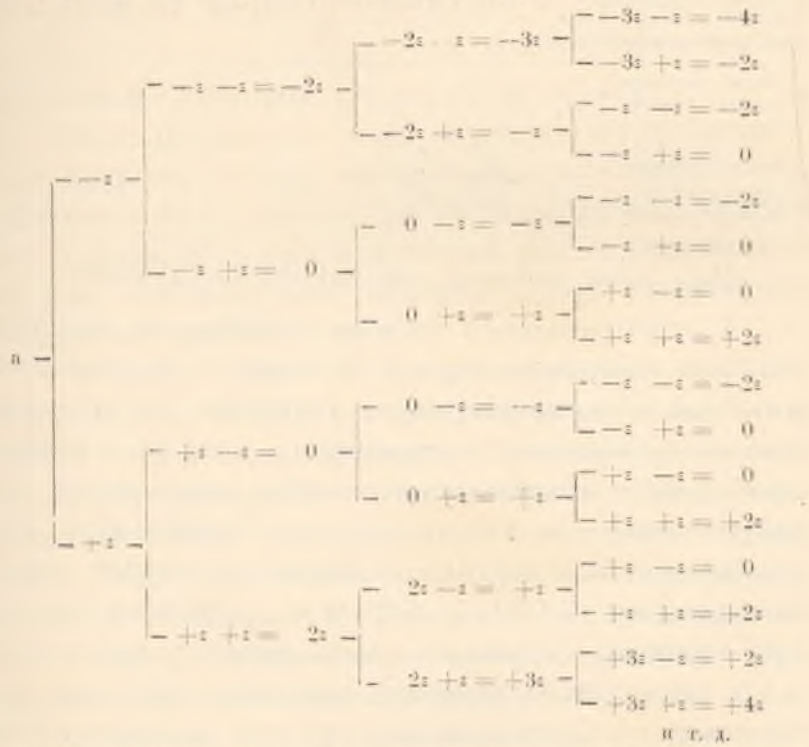
должна обнаруживать постоянство и правильное отношеніе къ этимъ величинамъ. Если, сдѣлавъ апріорное опредѣленіе случайной ошибки и дедуцировавъ изъ него извѣстные выводы, мы затѣмъ найдемъ, что дѣйствительныя среднія числа обнаруживаютъ свойства тождественныя или, по крайней мѣрѣ, сходныя съ апріорными выводами, то мы будемъ имѣть извѣстное основаніе утверждать, что эта тождественность или сходство результатовъ свидѣтельствуетъ о тождественности или сходствѣ производящихъ ихъ причинъ; иначе говоря, что въ реальныхъ условіяхъ тѣхъ величинъ, изъ которыхъ выводятся среднія, обнаруживающія закономѣрную правильность, лежитъ нѣчто сходное съ апріорной природой случайной ошибки, и что именно среднія и являются внѣшнимъ выраженіемъ этихъ специфическихъ реальныхъ условій.

2. ПОНЯТІЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ОШИБКИ И ЗАКОНЪ ЕЯ НАКОПЛЕНІЯ.

Допустимъ, что существуетъ нѣкоторая истинная величина a; допустимъ, что каждый случай ея наблюденія или измѣренія даетъ результатъ, уклоняющійся отъ истиннаго значенія a, вслѣдствіе привхожденія опредѣленнаго количества элементарныхъ ошибокъ; подъ элементарной ошибкой (ε) станемъ понимать ошибку очень малой величины и случайную, т. е. такую, которая всякій разъ можетъ присоединиться къ истинной величинѣ, какъ съ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ знакомъ, и уклонять результатъ измѣренія или наблюденія отъ истиннаго значенія въ положительную или отрицательную сторону; причемъ мы не имѣемъ никакого основанія ожидать уклоненія въ одну сторону предпочтительнѣе передъ уклоненіемъ въ другую.

Если мы допустимъ, что наблюденію или измѣренію присуща только одна элементарная ошибка, то мы можемъ ожидать два отличныхъ другъ отъ друга результата, а именно: одинъ будетъ отличаться отъ истинной величины на $+\varepsilon$, другой на $-\varepsilon$. Если къ каждому изъ этихъ двухъ мыслимыхъ результатовъ наблюденія присоединить еще одну элементарную ошибку, то получатся слѣдующія четыре возможныя величины: отъ присоединенія къ первой величинѣ одинъ разъ $+\varepsilon$ и другой разъ $-\varepsilon$ получаются два случая — одинъ уклоняющійся отъ истинной величины на $+\varepsilon+\varepsilon$ или $+2\varepsilon$, второй — на $+\varepsilon-\varepsilon$ или 0; отъ присоединенія элементарной

ошибки ко второй величинѣ получаются два случая, одинъ уклоняющій наблюденіе отъ истинной величины на $-\varepsilon$ $+\varepsilon$ или 0, другой на $-\varepsilon$ $-\varepsilon$ или -2ε. Отъ присоединенія къ каждому изъ этихъ случаевъ новой элементарной ошибки получается восемь новыхъ мыслимыхъ результатовъ и т. д., какъ это видно изъ прилагаемой таблицы:



Или, сводя сходные случаи въ общія группы, получаемъ слѣдующія возможныя уклоненія:

при 1 элементарной ошибкѣ: $+\varepsilon \parallel -\varepsilon$

„ 2 элементарныхъ ошибкахъ: $+2\varepsilon \parallel 0\ \ 0 \parallel -2\varepsilon$

„ 3 „ $+3\varepsilon \parallel +\varepsilon\ \ +\varepsilon\ \ +\varepsilon \parallel -\varepsilon\ \ -\varepsilon\ \ -\varepsilon \parallel -3\varepsilon$

„ 4 „ $+4\varepsilon \parallel +2\varepsilon\ +2\varepsilon\ +2\varepsilon\ +2\varepsilon \parallel 0\,0\,0\,0\,0\,0 \parallel -2\varepsilon\ -2\varepsilon\ -2\varepsilon \parallel -4\varepsilon$

и т. д.

Сосчитавъ числа одинаковыхъ уклоненій и подписавъ ихъ подъ соотвѣтствующими уклоненіями, получимъ:

	При 1 элементарной ошибкѣ:	При 2 элементарныхъ ошибкахъ:	При 3 элементарныхъ ошибкахъ:	При 4 элементарныхъ ошибкахъ:
Отъ истинной величины a возможны уклоненія на:	$+\varepsilon;\ -\varepsilon$	$+2\varepsilon;\ 0;\ -2\varepsilon$	$+3\varepsilon;\ +\varepsilon;\ -\varepsilon;\ -3\varepsilon$	$+4\varepsilon;\ +2\varepsilon;\ 0;\ -2\varepsilon;\ -4\varepsilon$
Число случаевъ каждаго уклоненія:	1 1	1 2 1	1 3 3 1	1 4 6 4 1
Число случаевъ всѣхъ возможныхъ уклоненій:	2	$4=2^2$	$8=2^3$	$16=2^4$ и т. д.

Изъ этой таблицы явствуетъ слѣдующее:

1. Элементарныя ошибки сочетаются въ группы, изъ которыхъ первая состоитъ изъ всего даннаго числа элементарныхъ ошибокъ съ положительнымъ знакомъ, напримѣръ $n.(+\varepsilon)$; въ слѣдующей одна положительная ошибка замѣняется отрицательной: $(n-1)(+\varepsilon)+(-\varepsilon)$, въ слѣдующей двѣ положительныя ошибки замѣняются двумя отрицательными: $(n-2)(+\varepsilon)+(-2\varepsilon)$ и т. д. Средняя группа при четномъ n состоитъ изъ равнаго числа $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$ и даетъ въ результатѣ уклоненіе$=0$, при нечетномъ n получаются двѣ группы съ уклоненіемъ одна на $+\varepsilon$, другая на $-\varepsilon$.

Каждому сочетанію отвѣчаетъ опредѣленное число случаевъ, причемъ числа случаевъ, соотвѣтствующихъ послѣдовательнымъ группамъ уклоненій, развиваются по закону коэффиціентовъ въ биномѣ Ньютона, а именно, при 2 элементарныхъ ошибкахъ числа случаевъ каждой послѣдовательной комбинаціи ошибокъ отвѣчаютъ коэффиціен-

тамъ въ выраженіи $(a+b)^2$, т. е. 1, 2, 1; при 3 ошибкахъ—$(a+b)^3$, т. е. 1, 3, 3, 1 и т. д.; слѣдовательно, при n элементарныхъ ошибкахъ каждому уклоненію будутъ соотвѣтствовать слѣдующія числа случаевъ, въ которыхъ эти уклоненія возможны: 1; n; $\frac{n(n-1)}{1.2}$; $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$; ... $\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{1.2.3....m}$; ... n; 1; (или въ иномъ изображеніи и общемъ видѣ: $\frac{n!}{m!\,(n-m!)}$, т. е. $\frac{1.2...n}{1.2...m.\,1.2...(n-m)}$, гдѣ m получаетъ послѣдовательно значенія отъ $m=0$ до $m=n$).

Въ наибольшемъ числѣ случаевъ встрѣчается—при четномъ числѣ элементарныхъ ошибокъ—то сочетаніе ихъ, которое даетъ наименьшее уклоненіе, равное 0, а при нечетномъ числѣ ошибокъ—тѣ два сочетанія ихъ, которыя даютъ наименьшія уклоненія, равныя $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$.

Примѣръ. Дано 9 элементарныхъ ошибокъ. Наибольшее число случаевъ отвѣчаетъ комбинаціямъ пяти положительныхъ съ четырьмя отрицательными (уклоненіе$=+\varepsilon$) и четырехъ положительныхъ съ пятью отрицательными ошибками (уклоненіе$=-\varepsilon$); это число равняется коэффиціенту члена $a^4\,b^5$ (или $a^5\,b^4$) бинома $(a+b)^9$ и представляетъ дробь, знаменатель которой состоитъ изъ произведенія восходящаго ряда чиселъ отъ 1 до 5 (показатель b^5), а числитель изъ произведенія нисходящаго ряда чиселъ отъ 9 до 9–5+1: или $\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}=126$. Слѣдующій членъ получается изъ наибольшаго присоединеніемъ къ числителю еще одного множителя, а именно слѣдующаго нисходящаго числа (4), къ знаменателю—слѣдующаго восходящаго (6) или умноженіемъ средняго члена на $\frac{4}{6}$; слѣдующіе члены получаются каждый послѣдовательно изъ своего предшествующаго, помно-

женіемъ на $\frac{3}{7}$; $\frac{2}{8}$; $\frac{1}{9}$. Такимъ образомъ уклоненія и соотвѣтствующія имъ числа случаевъ будутъ таковы:

$+9\varepsilon$	$+7\varepsilon$	$+5\varepsilon$	$+3\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	-3ε	-5ε	-7ε	-9ε
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1.

Сумма случаевъ всѣхъ возможныхъ уклоненій $2^9=512$.

Каждый случай мыслимаго сочетанія положительныхъ и отрицательныхъ ошибокъ столь же возможенъ (мыслимъ), какъ и всякій другой; иначе говоря, всѣ случаи нами представляются какъ равновозможные. Всякое сочетаніе изъ 512 сочетаній предшествующаго примѣра одинаково съ другими мыслимо и въ этомъ смыслѣ равновозможно. Но нѣкоторыя изъ 512 сочетаній сходны между собою, причемъ одни сходныя между собою сочетанія повторяются въ одномъ числѣ равновозможныхъ случаевъ, другія—въ другомъ. Число равновозможныхъ случаевъ, въ которыхъ повторяется извѣстное сочетаніе, назовемъ числомъ благопріятствующихъ этому сочетанію случаевъ. Въ предшествующемъ примѣрѣ комбинаціи ошибокъ, дающей уклоненіе $+9\varepsilon$, благопріятствуетъ одинъ случай (на 512 всѣхъ случаевъ), а уклоненію $+7\varepsilon$ — 9 случаевъ.

Отношеніе числа случаевъ, благопріятствующихъ извѣстному сочетанію, къ числу всѣхъ возможныхъ сочетаній называется вѣроятностью этого сочетанія; $\frac{1}{512}$ есть вѣроятность уклоненія $+9\varepsilon$; $\frac{9}{512}$ вѣроятность уклоненія $+7\varepsilon$.

Сумма вѣроятностей всѣхъ сочетаній всегда равна 1, такъ какъ знаменатель каждой дроби

представляетъ всегда сумму всѣхъ числителей. Напримѣръ:

$$1+9+36+84+126+126+84+36+9+1=512=2^9$$

$$\frac{1}{512}+\frac{9}{512}+\frac{36}{512}+\frac{84}{512}+\frac{126}{512}+\frac{126}{512}+\frac{84}{512}+\frac{36}{512}+\frac{9}{512}+\frac{1}{512}=1.$$

Чтобы придать большую наглядность понятію вѣроятности, представимъ, что равновозможность всѣхъ случаевъ обозначаетъ равную возможность наступленія или выхода каждаго изъ случаевъ въ мыслимомъ опытѣ. Тогда отношеніе числа случаевъ, благопріятствующихъ данному сочетанію, къ числу всѣхъ возможныхъ случаевъ будетъ наглядно мыслиться въ видѣ вѣроятности наступленія или выхода даннаго сочетанія въ воображаемомъ опытѣ. Сумма вѣроятностей всѣхъ сочетаній (равная 1) будетъ изображать вѣроятность наступленія или выхода любого изъ всѣхъ возможныхъ случаевъ; а такъ какъ мыслимый опытъ состоитъ именно въ наступленіи одного какого-либо (безразлично какого именно) случая, то сумма вѣроятностей какъ разъ осуществляетъ это условіе и, слѣдовательно, можетъ быть представляема въ видѣ достовѣрности; откуда слѣдуетъ, что, подобно тому, какъ дробь изображаетъ отдѣльную вѣроятность, 1 изображаетъ достовѣрность.

Наибольшая вѣроятность отвѣчаетъ среднему сочетанію (или двумъ среднимъ при четномъ числѣ группъ), представляющему наименьшее уклоненіе. Вѣроятность каждаго послѣдующаго сочетанія представляетъ величину меньшую, сравнительно съ предыдущей; при этомъ это убываніе идетъ съ возрастающей быстротой по мѣрѣ того, какъ сочетанія удаляются отъ средняго. Это явствуетъ изъ того, что каждая послѣдующая вѣроятность получается изъ предшествующей умно-

женіемъ послѣдовательно на дроби, числители которыхъ представляютъ рядъ убывающихъ чиселъ, а знаменатели рядъ возрастающихъ чиселъ. Напримѣръ, въ приведенномъ примѣрѣ вѣроятности слѣдующихъ другъ за другомъ группъ получаются изъ предшествующихъ помноженіемъ послѣдовательно на $^4/_6$, $^3/_7$, $^2/_8$ и $^1/_9$.

Съ увеличеніемъ числа элементарныхъ ошибокъ, вѣроятность наиболѣе вѣроятной (т. е. средней) группы постепенно уменьшается; для 8 она равняется $\frac{70}{256}$, для 9 — $\frac{126}{512}$, для 11 — $\frac{462}{2048}$, или послѣ приведенія къ одному знаменателю: $\frac{560}{2048}$, $\frac{504}{2048}$ и $\frac{462}{2048}$.

Если принять во вниманіе это послѣднее обстоятельство, въ связи съ предшествующимъ фактомъ возрастающаго убыванія послѣдовательныхъ группъ, то должно прійти къ выводу, что, при достаточно большомъ числѣ группъ, (т. е. достаточно большомъ числѣ элементарныхъ ошибокъ) вѣроятности крайнихъ членовъ (наибольшихъ уклоненій) будутъ ничтожны, и сумма вѣроятностей среднихъ и близкихъ къ нимъ членовъ будетъ почти исчерпывать единицу, или приближаться къ достовѣрности.

А такъ какъ мы допустили, что элементарная ошибка очень мала, то предшествующій выводъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ: при достаточно большомъ числѣ элементарныхъ ошибокъ, сравнительно небольшія уклоненія имѣютъ очень большую вѣроятность, приближающуюся къ достовѣрности; или иначе: при указанномъ условіи имѣется очень большая вѣроятность, приближающаяся къ достовѣрности, что уклоненія не превзойдутъ нѣкоторыхъ относительно неболь-

шихъ размѣровъ. Причемъ, съ увеличеніемъ числа возможныхъ сочетаній, вѣроятность эта можетъ стать какъ угодно близкой къ 1, а предѣлы уклоненій какъ угодно малыми, сравнительно со всѣми возможными уклоненіями.

Уже послѣдній примѣръ отчасти иллюстрируетъ только что указанное положеніе. Вѣроятности послѣдовательныхъ группъ, выраженныя въ десятичныхъ знакахъ, дадутъ рядъ чиселъ:

0·002 0·018 0·070 0·164 0·246 0·246 0·164 0·070 0·018 0·002.

Сумма вѣроятности двухъ среднихъ членовъ даетъ 0·492; сумма вѣроятности двухъ слѣдующихъ— 0·328; сумма вѣроятности всѣхъ четырехъ членовъ вмѣстѣ равна 0·820 и обозначаетъ, что 0·82 числа всѣхъ членовъ, т. е. 82%, не выходятъ за предѣлы перваго ближайшаго къ среднему уклоненію въ одну и другую сторону. То же можетъ быть представлено въ видѣ слѣдующей таблицы:

Уклоненіе.	Размѣръ его въ элементарныхъ ошибкахъ: $\pm$	Вѣроятность даннаго уклоненія.	Вѣроятность всѣхъ уклоненій отъ наименьшаго до даннаго включительно:
Первое . .	ε	0·492	0·492
2-е . . .	3ε	0·328	0·820
3-е . . .	5ε	0·140	0·960
4-е . . .	7ε	0·036	0·996
5-е . . .	9ε	0·004	1·000

Здѣсь первое уклоненіе исчерпываетъ почти половину всѣхъ случаевъ, а третье уже 96%. Однако гораздо яснѣе проявляется сосредоточеніе числа случаевъ около сравнительно наименьшихъ уклоненій при большомъ числѣ элементарныхъ ошибокъ.

Вычисленіе таблицы вѣроятностей при 999 элементарныхъ ошибкахъ. Возьмемъ 999ε; одно изъ двухъ

равныхъ наиболѣе вѣроятныхъ сочетаній состоитъ изъ 499 положительныхъ и 500 отрицательныхъ ошибокъ; число случаевъ, въ которыхъ это сочетаніе встрѣчается, соотвѣтствуетъ коэффиціенту при членѣ $a^{499}\ b^{500}$ бинома Ньютона и равняется $\frac{999.998\ldots(999-500+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots500}$; число всѣхъ возможныхъ случаевъ — 2^{999}; слѣдовательно, вѣроятность указаннаго сочетанія равняется $\frac{999.998\ldots500}{1.2\ldots500}\cdot\frac{1}{2^{999}}$. Такъ какъ опредѣлить это число путемъ непосредственнаго вычисленія практически невозможно, то Quetelet вычислилъ его приблизительно слѣдующимъ способомъ (Lettres sur la théorie des probabilités, Bruxelles, 1846, стран. 375—381). Обозначимъ указанную выше вѣроятность черезъ x; тогда вѣроятность ближайшаго къ среднему члена будетъ равна $x\frac{499}{501}=0{\cdot}996\,008\ x$, слѣдующаго $x\frac{499}{501}\cdot\frac{498}{502}=0{\cdot}988\,072\ x$, и т. д.; вѣроятность же 80-го по порядку члена составитъ уже только 0·000 003 вѣроятности средняго члена. Но такъ какъ послѣдняя сама по себѣ, при взятомъ нами большомъ числѣ элементарныхъ ошибокъ, должна быть очень незначительна, то $\frac{3}{1\,000\,000}$ части ея представятъ величину ничтожную; послѣдующіе же члены будутъ представлять вѣроятность еще меньшую. Поэтому сумма всѣхъ указанныхъ выраженій, а именно $x+0{\cdot}996\,008\ x+0{\cdot}988\,072\ x+\ldots$и т. д. до послѣдняго члена будетъ разниться отъ суммы тѣхъ же выраженій только до 80 члена включительно на весьма малую величину, которой можно пренебречь. Сумма же всѣхъ членовъ отъ x до послѣдняго (1000-аго) въ одну и другую отъ x сторону равняется 1 (такъ какъ эта сумма представляетъ сумму вѣроятности всѣхъ возможныхъ сочетаній, которая всегда =1);

сумма членовъ отъ x до послѣдняго члена въ одну только сторону составитъ $\frac{1}{2}$. Согласно предыдущему и сумма членовъ отъ x до 80-го члена будетъ разниться отъ $\frac{1}{2}$ на ничтожную величину; послѣдняя сумма $(x+0{\cdot}996\,008x+0{\cdot}988\,072x+\ldots)$ оказывается равной $19{\cdot}821\,581\,x$; если же $19{\cdot}821\,581x=\frac{1}{2}$, то $x=0{\cdot}025\,225$. Тогда слѣдующій членъ $=0{\cdot}025\,225.\ 0{\cdot}996\,008=0{\cdot}025\,124$ и т. д. Изъ полученныхъ цифръ можно составить таблицу, аналогичную той, которая приведена на стр. 31 для случая 9ε. Въ извлеченіи эта таблица имѣетъ слѣдующій видъ:

Уклоненіе по порядку. 1	Величина уклоненія. 2	Вѣроятность даннаго уклоненія. 3	Вѣроятность всѣхъ уклоненій до даннаго включительно. 4
1-ое .	ε	0·025 225	0·025 225
2 . .	3ε	0·025 124	0·050 349
3 . .	5ε	0·024 924	0·075 273
4 . .	7ε	0·024 627	0·099 900
5 . .	9ε	0·024 236	0·124 136
6 . .	11ε	0·023 756	0·147 892
7 . .	13ε	0·023 193	0·171 085
8 . .	15ε	0·022 552	0·193 637
9 . .	17ε	0·021 842	0·215 479
10 . .	19ε	0·021 069	0·236 548
15 . .	29ε	0·016 573	0·338 728
20 . .	39ε	0·011 794	0·397 172
25 . .	49ε	0·007 594	0·443 189
30 . .	59ε	0·004 423	0·471 199
35 . .	69ε	0·002 330	0·486 634
40 . .	79ε	0·001 110	0·494 332
45 . .	89ε	0·000 478	0·497 808
50 . .	99ε	0·000 186	0·499 227
55 . .	109ε	0·000 066	0·499 752
60 . .	119ε	0·000 020	0·499 927
65 . .	129ε	0·000 006	0·499 980
70 . .	139ε	0·000 001	0·499 995

Четвертая графа таблицы представляетъ вѣроятность уклоненій, начиная отъ наименьшаго,

въ одну сторону. Поэтому вѣроятность уклоненій какъ въ одну, такъ и въ другую сторону получается удвоеніемъ каждаго соотвѣтствующаго числа 4-й графы.

Таблица эта представляетъ собою *законъ распредѣленія уклоненій, образуемыхъ комбинаціей очень большого числа случайныхъ ошибокъ. Законъ этотъ указываетъ на зависимость, какая должна существовать между величиною уклоненія и его вѣроятностью*, т. е. отношеніемъ числа случаевъ, которые даютъ уклоненіе, не превышающее опредѣленной величины, къ числу всѣхъ возможныхъ случаевъ при очень большомъ числѣ послѣднихъ. Такъ, напримѣръ, уклоненію, не выходящему за предѣлы $\pm 1\varepsilon$, отвѣчаетъ вѣроятность 0·473 096 или, беря только два десятичныхъ знака— 0·47, иначе говоря, изъ ста всевозможныхъ случаевъ въ 47 возможныхъ случаяхъ или въ 47% всѣхъ случаевъ уклоненіе не превышаетъ $+1\varepsilon$ въ одну и -1ε въ другую сторону отъ истинной величины; въ 68% случаевъ уклоненіе не превышаетъ $\pm 2\varepsilon$ и т. д. Какъ уже было сказано, законъ этотъ выведенъ въ предположеніи, что число случайныхъ ошибокъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ, слѣдовательно, и число отдѣльныхъ уклоняющихся другъ отъ друга величинъ очень велико. При этомъ именно условіи малыя уклоненія получаютъ очень большую вѣроятность, тогда какъ большія уклоненія становятся очень рѣдкими.

Итакъ мы видимъ, что въ достаточно большомъ рядѣ величинъ, представляющихъ случайныя уклоненія отъ нѣкоторой истинной, наблюдаются два закона: 1) незначительныя уклоненія вообще представляютъ бо́льшую вѣроятность, чѣмъ значительныя, и 2) возрастающимъ уклоненіямъ

отвѣчаютъ опредѣленныя вѣроятности. Поэтому если бы какой-либо рядъ дѣйствительныхъ величинъ, полученныхъ въ результатѣ дѣйствительнаго наблюденія или измѣренія, оказался построеннымъ аналогично съ тѣмъ, какъ мы строили нашъ абстрактный рядъ, т. е. если бы въ основѣ этого ряда лежала какая-нибудь истинная величина, проявляющаяся въ отдѣльныхъ результатахъ съ случайными уклоненіями, то такого рода дѣйствительный рядъ тоже долженъ былъ бы обнаруживать указанную закономѣрность: незначительныя сравнительно уклоненія отъ истинной величины должны были бы встрѣчаться въ немъ чаще, чѣмъ уклоненія крайнія, и уклоненія опредѣленной величины должны были бы встрѣчаться въ опредѣленномъ отношеніи ко всему числу случаевъ. Или обратно: если въ какомъ-либо дѣйствительно данномъ рядѣ уклоняющихся другъ отъ друга величинъ мы замѣтимъ двѣ указанныя выше правильности, то мы сдѣлаемъ заключеніе о томъ, что въ основѣ отдѣльныхъ величинъ ряда лежитъ нѣкоторая истинная величина, а данныя величины представлчютъ уклоненія отъ этой истинной и явились результатомъ того, что къ истинной величинѣ присоединялись комбинаціи нѣкотораго числа элементарныхъ ошибокъ.

Если бы, однако, взявъ какой-либо дѣйствительный рядъ уклоняющихся другъ отъ друга величинъ, мы пожелали провѣрить, построены ли дѣйствительныя уклоненія отдѣльныхъ величинъ ряда по такому же закону (или, по крайней мѣрѣ, приблизительно сходному), какъ уклоненія апріорнаго ряда, то прежде всего мы натолкнулись бы на вопросъ: что считать истинной величиной для

дѣйствительнаго ряда? Въ нѣкоторыхъ случаяхъ эта истинная величина намъ прямо дана или извѣстна; напримѣръ, если въ результатѣ измѣренія угловъ значительнаго числа треугольниковъ, мы вычислимъ сумму угловъ каждаго треугольника и получимъ рядъ уклоняющихся другъ отъ друга результатовъ, то истинная величина, лежащая въ основѣ каждаго результата, намъ напередъ извѣстна и равняется двумъ прямымъ угламъ или 180°. Здѣсь, слѣдовательно, мы могли бы прямо вычислить уклоненіе каждаго конкретнаго результата отъ этой истинной впередъ извѣстной величины и опредѣлить, встрѣчаются ли уклоненія опредѣленныхъ размѣровъ въ такомъ другъ къ другу отношеніи, какое соотвѣтствуетъ вѣроятности случайныхъ ошибокъ.

Возможны однако случаи, когда истинная величина намъ неизвѣстна и не можетъ быть опредѣлена, независимо отъ результатовъ ея измѣренія или наблюденія, которые даютъ рядъ уклоняющихся другъ отъ друга величинъ; но самое конкретное существованіе истинной величины несомнѣнно; такъ, напримѣръ, бываетъ, когда приходится точно измѣрить разстояніе между двумя пунктами. Здѣсь уже возникаетъ указанный выше вопросъ, какъ найти истинную величину. Допустимъ, что мы найдемъ тотъ или иной способъ рѣшить задачу и получимъ возможность опредѣлить истинную величину или, по крайней мѣрѣ, такое ея значеніе, которое мы будемъ имѣть основаніе считать наиболѣе правдоподобнымъ, вѣроятнымъ ея выраженіемъ.

Какъ въ первомъ, такъ и во второмъ случаѣ истинная величина существуетъ въ природѣ кон-

кретно; въ первомъ случаѣ она намъ извѣстна помимо ряда уклоняющихся другъ отъ друга результатовъ ея измѣренія, во второмъ—мы можемъ, согласно сдѣланному сейчасъ допущенію, найти ея выраженіе на основаніи ряда данныхъ результатовъ ея измѣренія. Но возможны, наконецъ, случаи третьяго рода: мы имѣемъ рядъ уклоняющихся другъ отъ друга величинъ, относительно котораго намъ извѣстно, что въ основѣ его нѣтъ никакой конкретно существующей величины; таковъ, напримѣръ, рядъ величинъ, полученныхъ въ результатѣ измѣренія роста нѣкотораго числа индивидовъ опредѣленнаго возраста. Представимъ себѣ, что мы примѣнимъ къ такому ряду тотъ способъ, посредствомъ котораго въ предыдущемъ случаѣ мы отыскивали значеніе истинной величины, лежащей въ основѣ ряда, и въ результатѣ получимъ нѣкоторую величину. Если дѣйствительныя величины ряда будутъ уклоняться отъ найденной столь же правильно или приблизительно правильно, какъ и въ апріорномъ рядѣ, то очевидно, что и эта вышеуказаннымъ способомъ найденная величина также будетъ представлять собою то основаніе, отъ котораго данныя величины ряда получились путемъ случайныхъ уклоненій. Но эта основная величина, въ отличіе отъ двухъ предыдущихъ случаевъ, не существуетъ въ природѣ конкретно; тѣмъ не менѣе она имѣетъ для ряда такое же значеніе, какъ истинныя, конкретно существующія величины въ предыдущихъ случаяхъ. Поэтому по аналогіи мы должны заключить, что и въ этомъ случаѣ найденная нами величина представляетъ собою значеніе истинной величины нѣкотораго момента или комплекса моментовъ, лежащихъ въ основѣ ряда

такимъ образомъ, что каждая данная величина представляетъ собою лишь случайное уклоненіе отъ этого истиннаго значенія момента или комплекса.

Наиболѣе простой способъ найти неизвѣстную истинную величину, лежащую въ основѣ ряда уклоняющихся другъ отъ друга результатовъ измѣренія или наблюденія, состоялъ бы въ томъ, чтобы взять изъ цѣлаго ряда величинъ одну; такъ какъ малыя уклоненія обладаютъ наибольшею вѣроятностью, то возможно, что взятая наугадъ величина могла бы оказаться мало уклоняющейся отъ истинной. Однако подобный способъ былъ бы крайне невѣренъ, такъ какъ, хотя малыя уклоненія въ общемъ обладаютъ большою вѣроятностью, но вѣроятность одного, даже наиболѣе вѣроятнаго результата, сама по себѣ ничтожна (ср. стр. 33). Равнымъ образомъ не можетъ дать удовлетворительнаго рѣшенія вопроса попытка восполнить недостаточную вѣроятность качественной оцѣнкой отдѣльныхъ результатовъ: можно было бы думать, что наиболѣе вѣрный результатъ даетъ то наблюденіе или измѣреніе, которое произведено при наилучшихъ условіяхъ. Разумѣется, когда качественное превосходство какого-либо одного измѣренія или наблюденія сравнительно со всѣми другими безспорно, то этимъ и рѣшается все дѣло; однако этотъ случай вовсе и не относится къ поставленной задачѣ, которая въ томъ именно и состоитъ, что изъ многихъ результатовъ ни одинъ качественно не исключаетъ другихъ. Къ тому же не всегда истинная величина конкретно существуетъ, поэтому во всякомъ случаѣ она должна быть выведена изъ совокупности даннаго ряда. Нако-

нецъ, не ведетъ къ цѣли и тотъ способъ, который состоитъ въ исключеніи крайнихъ величинъ ряда или принятіи за истинную нѣсколькихъ согласныхъ между собою результатовъ. Разумѣется, если крайнія величины получены при завѣдомо грубой неточности наблюденія или измѣренія, онѣ должны быть исключены; но исключены не какъ крайнія, а какъ полученныя при условіи допущенія грубой неточности; въ противномъ случаѣ, сами по себѣ, въ качествѣ единичныхъ результатовъ, онѣ должны претендовать на такое же участіе въ разрѣшеніи вопроса объ истинной величинѣ, какъ и всякій другой единичный результатъ. Равнымъ образомъ, нѣтъ основанія принимать за истинную величину согласные другъ съ другомъ результаты, такъ какъ истинная величина случайнаго ряда характеризуется не тѣмъ, что она находитъ свое выраженіе въ нѣсколькихъ тожественныхъ результатахъ, а своимъ правильнымъ отношеніемъ къ общей совокупности всѣхъ уклоняющихся отъ нея результатовъ. Поэтому только всѣ результаты въ ихъ общей совокупности и могутъ рѣшить задачу нахожденія истинной или ближайшей къ ней величины.

Издавна принято брать среднюю изъ всѣхъ величинъ какого-либо даннаго ряда. Въ абстрактномъ рядѣ величинъ, построенныхъ на допущеніи случайной ошибки, средняя (ариѳметическая) вполнѣ точно совпадаетъ съ истинной величиной, такъ какъ уклоненія отъ нея симметрично расположены въ обѣ стороны въ равномъ числѣ и величинѣ, такъ что алгебраическая сумма ихъ даетъ 0. Но когда мы имѣемъ дѣйствительный рядъ отличающихся другъ отъ друга величинъ, мы не можемъ

утверждать ни того, что въ немъ исчерпываются какъ разъ всѣ возможные случаи уклоненій опредѣленнаго числа элементарныхъ ошибокъ, ни того, что если число дѣйствительно данныхъ величинъ больше или меньше, сравнительно съ числомъ возможныхъ случаевъ уклоненій, то отдѣльныя уклоненія встрѣчаются въ отношеніи, строго пропорціональномъ ихъ абстрактной вѣроятности. Поэтому, въ примѣненіи къ условіямъ реальнаго опыта, мы должны предположить, что намъ дано нѣкоторое опредѣленное конечное число уклоняющихся результатовъ наблюденія—n. представляющее собою то или другое сочетаніе нѣкотораго числа случаевъ возможныхъ уклоненій, и изъ этого числа n уклоняющихся величинъ взята ариѳметическая средняя; спрашивается, въ какомъ отношеніи находится она къ истинной величинѣ.

Для болѣе нагляднаго изображенія поставленной задачи, представимъ себѣ, что изъ 512 результатовъ измѣренія истинной величины a, исчерпывающихъ собою всѣ возможные случаи исходовъ измѣренія при допущеніи комбинаціи девяти случайныхъ элементарныхъ ошибокъ (см. стр. 28), намъ наугадъ даны какіе-либо сто результатовъ, и изъ нихъ выведена средняя. Вообразимъ себѣ, напримѣръ, урну, наполненную 512 шарами, отличающимися другъ отъ друга только тѣмъ, что на каждомъ обозначенъ одинъ изъ возможныхъ исходовъ, а во всемъ остальномъ вполнѣ тожественными, такъ что выходъ каждаго шара мыслится равновозможнымъ. Вынемъ изъ такой урны наугадъ 100 шаровъ и возьмемъ среднюю изъ обозначенныхъ на нихъ результатовъ. Какую величину получимъ мы въ результатѣ?

Если бы подобный опытъ былъ продѣланъ въ дѣйствительности, мы не въ состояніи были бы впередъ сказать, каковъ будетъ его исходъ. Но мысленно мы можемъ предусмотрѣть всѣ возможные исходы, и, слѣдовательно, напередъ опредѣлить вѣроятность каждаго изъ нихъ; мы можемъ опредѣлить, какова будетъ вѣроятность того, что средняя дастъ уклоненіе отъ истинной, равное 0 или какой-либо другой величинѣ; можемъ найти и исходъ наиболѣе вѣроятный и опредѣлить его вѣроятность. Способъ, посредствомъ котораго рѣшается эта задача, вполнѣ сходенъ съ тѣмъ, которымъ мы уже пользовались при нахожденіи вѣроятности одного или нѣсколькихъ случайныхъ уклоненій отъ истинной величины среди всѣхъ возможныхъ.

3. ВОЗРАСТАЮЩАЯ ВѢРОЯТНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНІЯ СРЕДНЕЙ КЪ ИСТИННОЙ СЪ УВЕЛИЧЕНІЕМЪ ЧИСЛА СЛУЧАЕВЪ.

Для рѣшенія поставленной задачи возьмемъ болѣе простой случай трехъ элементарныхъ ошибокъ. Представимъ, что въ урнѣ имѣется 8 шаровъ, изъ которыхъ на каждомъ обозначены соотвѣтсоотвѣтственно уклоненія $+3\varepsilon$, $+\varepsilon$, $-\varepsilon$ и -3ε. Будемъ вынимать на угадъ по два шара, отмѣчать уклоненія, какія даетъ каждая пара, и брать среднюю для каждой пары шаровъ. Спрашивается, какія уклоненія могутъ получиться и съ какою вѣроятностью? Затѣмъ подобныя же допущенія сдѣлаемъ для сочетаній изъ трехъ шаровъ и для сочетаній изъ четырехъ шаровъ.

Сравненіе этихъ примѣровъ покажетъ намъ, что съ увеличеніемъ числа случаевъ, изъ которыхъ мы выводимъ среднюю, увеличивается вѣроятность полученія величины, уклоняющейся въ незначительныхъ и постоянно съуживающихся предѣлахъ отъ истинной.

Для наглядности обозначимъ каждый случай уклоненія особой буквой:

$+3\varepsilon$	$+\varepsilon$		$-\varepsilon$	-3ε
a	b_1 b_2 b_3		c_1 c_2 c_3	d

Всѣ возможныя сочетанія этихъ буквъ по двѣ разобьемъ на группы по величинѣ даваемыхъ ими уклоненій; такими группами будутъ соединеніе a съ каждымъ изъ b, a съ каждымъ изъ c, по два b,

одного изъ b съ однимъ изъ c, a и d, двухъ c, одного изъ b и d, одного изъ c и d; или:

Группы.	Размѣръ уклоненія.
a и b	4ε
a „ c	2ε
b „ b	2ε
b „ c	0
a „ d	0
c „ c	-2ε
b „ d	-2ε
c „ d	-4ε

Опредѣлимъ число случаевъ каждой группы; a, соединяясь съ каждымъ изъ b, дастъ три случая; то же для соединенія a и c; изъ трехъ b можно образовать три сочетанія по два b; каждое b съ каждымъ изъ c дадутъ девять соединеній bc; a и d дадутъ одно соединеніе; три c дадутъ три сочетанія по два c; три b и d дадутъ три случая, и столько же случаевъ будетъ для cd. Такимъ образомъ получимъ:

Группы.	Уклоненія.	Число случаевъ.
ab	4ε	3
ac	2ε	3
bb	2ε	3
bc	0	9
ad	0	1
cc	-2ε	3
bd	-2ε	3
cd	-4ε	3
Сумма		$28 = C_8^2 = \frac{8.7}{1.2}$

Присоединивъ къ каждой группѣ послѣдовательно b, затѣмъ c и d; исключивъ группы, повторяющія сочетанія, уже имѣющіяся; расположивъ

группы по величинѣ уклоненія и опредѣливъ число случаевъ каждой группы, получимъ распредѣленіе сочетаній по три буквы:

Группы.	Уклоненія.	Число случаевъ.
abb	5ε	3
abc	3ε	9
bbb	3ε	1
bbc	ε	9
adb	ε	3
acc	ε	3
dbb	$-\varepsilon$	3
adc	$-\varepsilon$	3
ccb	$-\varepsilon$	9
ccc	-3ε	1
bcd	-3ε	9
dcc	-5ε	3
	Сумма 56	$=C_8^3=\frac{8.7.6}{1.2.3}$.

Число сочетаній по два изъ трехъ *b* составляетъ 3; присоединеніе къ каждому сочетанію *a* не измѣняетъ числа случаевъ и даетъ группу *abb*; то же для *acc*, *dbb*, *dcc*; группы изъ *a* и трехъ *b* по два даютъ 3 случая, которые съ каждымъ изъ *c* образуютъ 9 случаевъ группы типа *abc*; то же для *bbc*, *acc*, *ccb* и *bcd*; группа *ad* съ каждымъ изъ трехъ *b* дастъ три случая, то же для *adc*; и изъ трехъ *b* можно образовать только одинъ случай *bbb*, то же изъ *c*.

Разсуждая аналогично, получимъ слѣдующее распредѣленіе для сочетаній по 4 буквы:

Группы.	Уклоненія.	Число случаевъ.
abbb	6ε	1
abbc	4ε	9
abbd	2ε	3
abcc	2ε	9
bbbc	2ε	3
accc	0	1
bbcc	0	9
abcd	0	9
bbbd	0	1
bccc	-2ε	3
bbcd	-2ε	9
accd	-2ε	3
bccd	-4ε	9
cccd	-6ε	1
	Сумма	$70 = C_8^4 = \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}$.

Соединяя группы, дающія одинаковыя уклоненія, и подсчитывая число случаевъ, отвѣчающихъ каждому уклоненію, получимъ слѣдующіе результаты:

Для сочетаній по 2 буквы:

Уклоненія . . .	4ε	2ε	0	-2ε	-4ε
Число случаевъ . .	3	6	10	6	3

Общее число случаевъ . . . . . 28.

Для сочетаній изъ 3 буквъ:

Уклоненія . . .	5ε	3ε	ε	$-\varepsilon$	-3ε	-5ε
Число случаевъ .	3	10	15	15	10	3

Общее число случаевъ . . . . . 56.

Для сочетаній изъ 4 буквъ:

Уклоненія . .	6ε	4ε	2ε	0	-2ε	-4ε	-6ε
Число случаевъ	1	9	15	20	15	9	1

Общее число случаевъ . . . . . 70.

Для того, чтобы получить уклоненіе средней, раздѣлимъ уклоненіе каждаго сочетанія изъ 2 буквъ на 2, изъ 3 буквъ на 3, изъ 4 буквъ на 4. Соединимъ уклоненія одинаковой величины съ разными знаками въ общія группы, подсчитаемъ число случаевъ каждой такой группы; для опредѣленія вѣроятности каждой группы раздѣлимъ число случаевъ этой группы на число всѣхъ случаевъ. Результаты представлены въ слѣдующей таблицѣ:

Средняя изъ 2-хъ величинъ.			Средняя изъ 3-хъ величинъ.			Средняя изъ 4-хъ величинъ.		
Уклоненіе.	Число случаевъ.	Вѣроятность.	Уклоненіе.	Число случаевъ.	Вѣроятность.	Уклоненіе.	Число случаевъ.	Вѣроятность.
0	10	$^{10}/_{28}$	$\pm^1/_3\varepsilon$	30	$^{30}/_{56}$	0	20	$^{20}/_{70}$
$\pm\varepsilon$	12	$^{12}/_{28}$	$\pm\varepsilon$	20	$^{20}/_{56}$	$\pm^1/_2\varepsilon$	30	$^{30}/_{70}$
$\pm 2\varepsilon$	6	$^{6}/_{28}$	$\pm 1^2/_3\varepsilon$	6	$^{6}/_{56}$	$\pm\varepsilon$	18	$^{18}/_{70}$
						$\pm 1^1/_2\varepsilon$	2	$^{2}/_{70}$

Сравненіе приведенныхъ таблицъ показываетъ, что вѣроятность получить среднюю, вполнѣ совпадающую съ истинной величиной (или уклоненіе, равное 0) уменьшается по мѣрѣ того, какъ увеличивается число величинъ, изъ которыхъ средняя выводится; но еще быстрѣе уменьшается вѣроятность получить среднюю съ наибольшимъ уклоненіемъ. Такимъ образомъ возрастаетъ вѣроятность получить среднюю, приближающуюся все болѣе и болѣе къ истинной, по мѣрѣ того, какъ мы беремъ возрастающее число величинъ для вывода средней. Этотъ результатъ явствуетъ изъ приводимой ниже таблицы, гдѣ вычислена вѣроятность уклоненій, не выходящихъ за извѣстные предѣлы:

Уклоненія, не выходящія за предѣлы. / Ихъ вѣроятность.	0	1/3	1/2	1	1 1/2	1 2/3	2
Для средней изъ							
2-хъ величинъ: . . .	0·36	—	—	0·78	—	—	1
3-хъ величинъ: . . .	—	0·53	—	0·89	—	1	—
4-хъ величинъ: . . .	0·29	—	0·71	0·97	1	—	—

Отсюда мы видимъ, что чѣмъ бо́льшее число величинъ мы беремъ для вывода средней, тѣмъ болѣе возрастаетъ вѣроятность получить результатъ, не уклоняющійся отъ истиннаго значенія далѣе извѣстнаго предѣла. Такъ, вѣроятность получить среднюю, не уклоняющуюся отъ истиннаго значенія болѣе, чѣмъ на $\pm 1\varepsilon$, для средней изъ 2 величинъ составляетъ 78 случаевъ на 100; для средней изъ 3 величинъ—уже 89 случаевъ на 100 и для 4 величинъ— 97 на 100. Или обратно: съ одной и той же вѣроятностью получаются уклоненія отъ истиннаго значенія тѣмъ меньшія, чѣмъ болѣе величинъ мы беремъ для вывода средней.

Тотъ же результатъ мы можемъ получить другимъ способомъ, если нѣсколько измѣнимъ условія задачи. Представимъ, что мы имѣемъ только три величины, изъ которыхъ двѣ уклоняются отъ истиннаго значенія на $+1$ и -1, а третья совпадаетъ съ истиннымъ значеніемъ, скажемъ $a+1$, a, $a-1$. Допустимъ, что каждая величина имѣетъ одинаковую вѣроятность и съ этой вѣроятностью можетъ повторяться любое число разъ. Эти допущенія соотвѣтствуютъ тому случаю, какъ если бы мы имѣли урну съ тремя шарами $a+1$, a, $a-1$ и для образованія соединенія вынимали одинъ шаръ, отмѣчали его значеніе, клали его обратно, пере-

мѣшивали шары, вынимали второй разъ шаръ и т. д., повторяя тиражъ столько разъ, сколько величинъ мы намѣрены взять для вывода средней. Такой опытъ отличается отъ предыдущаго тѣмъ, что принимаетъ одинаковую вѣроятность для всѣхъ величинъ, не давая преимущества тѣмъ изъ нихъ, которыя представляютъ меньшія уклоненія отъ истиннаго значенія, какъ это имѣло мѣсто въ предыдущихъ разсужденіяхъ. Если средняя изъ большого числа величинъ и при этихъ условіяхъ будетъ давать возрастающую вѣроятность для уклоненій, не превышающихъ извѣстнаго предѣла, то тѣмъ болѣе это должно имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, когда меньшія уклоненія отъ истиннаго значенія сами по себѣ представляютъ бо́льшую вѣроятность. Во вторыхъ, условія даннаго опыта отличаются отъ предшествующихъ допущеній тѣмъ, что раньше число всѣхъ уклоняющихся величинъ было ограничено опредѣленнымъ количествомъ, было конечнымъ, тогда какъ въ настоящемъ опытѣ мы допускаемъ возможность повторнаго появленія каждой величины любое число разъ. Теоретически это даетъ возможность брать всякій разъ данныя величины какое угодно число разъ для образованія группъ, изъ которыхъ выводится средняя. Это обстоятельство, какъ мы увидимъ, приближаетъ данный опытъ къ идеальному случаю, когда средняя выводится изъ безконечно большого числа отдѣльныхъ величинъ, такъ какъ только въ этомъ предѣльномъ случаѣ средняя уклоняется отъ истиннаго значенія на какъ угодно малую разницу съ какъ угодно большой вѣроятностью. Практически же неограниченная повторяемость каждой данной величины дастъ возмож-

ность легче показать это свойство средней на конкретномъ примѣрѣ.

Предположимъ, что истинное значеніе величины a въ каждомъ опытѣ безразлично получаетъ одно изъ слѣдующихъ трехъ значеній: a, $a+1$ и $a-1$ [1]). Если бы мы взяли только одинъ результатъ, то вѣроятность, что это былъ бы результатъ, совпадающій съ истинной величиной, равнялась бы $^1/_3$, ибо всѣхъ случаевъ 3, а выходу заданнаго результата благопріятствуетъ 1. Такова же была бы и вѣроятность каждаго изъ двухъ остальныхъ случаевъ въ отдѣльности, а вѣроятность выхода уклоненія на ± 1 равнялась бы $^2/_3$. Представимъ себѣ, что вмѣсто единичнаго результата мы пожелали бы взять среднюю изъ двухъ результатовъ; какова была бы тогда вѣроятность уклоненія, равнаго нулю или ± 1? Для этого намъ нужно опредѣлить: 1) сколько изъ трехъ величинъ возможно образовать группъ, беря всякій разъ по двѣ; 2) какое уклоненіе даетъ каждая группа послѣ раздѣленія ея на 2; 3) каково отношеніе числа группъ, дающихъ въ средней уклоненіе 0 или ± 1 или какое-либо другое, къ числу всѣхъ возможныхъ группъ.

Обозначивъ a, $a+1$, $a-1$ черезъ a,b,c, находимъ, что изъ нихъ можно образовать слѣдующія соединенія по два числа: aa, bb, cc, ab, ba, ac, ca, bc, cb, что сводится къ раскрытію формулы $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. Соединеніе aa даетъ уклоненіе 0, которое, будучи раздѣлено на 2 (т. е. $\frac{a+a}{2}$) даетъ для средней уклоненіе, равное 0;

[1]) I. E. Encke, Ueber die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungen; Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1853, Berlin, 1850; стр. 310 и сл.; E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, 1891, стр. 16—23.

соединеніе bb (или $a+1$ и $a+1$) даетъ уклоненіе $+2$ и для средней $\left(\frac{a+1+a+1}{2}\right)$ — $+1$; соединеніе cc даетъ уклоненіе -2 и для средней $\left(\frac{a-1+a-1}{2}\right)$ — -1; соединеніе ab даетъ уклоненіе $+1$ и для средней $\left(\frac{a+a+1}{2}\right)$ — $+\frac{1}{2}$; соединеніе ac такимъ же образомъ $\left(\frac{a+a-1}{2}\right)$ уклоненіе $-\frac{1}{2}$, и, наконецъ, соединеніе bc даетъ для средней $\left(\frac{a+1+a-1}{2}\right)$ уклоненіе 0; итого для средней уклоненіе 0 получается въ 3 случаяхъ (a^2 и $2bc$) уклоненіе $\pm\frac{1}{2}$ въ 4 случаяхъ ($2ab$ и $2ac$) и уклоненіе ±1 въ 2 случаяхъ (b^2 и c^2). Слѣдовательно, вѣроятность уклоненій $0, \pm\frac{1}{2}, \pm1$ соотвѣтственно равна $\frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}$.

Найдемъ подобнымъ же образомъ результаты для средней изъ трехъ членовъ. Число всѣхъ возможныхъ группъ по три члена получится, если каждую группу изъ предшествующихъ мы будемъ сочетать съ каждымъ изъ значеній a, b, c послѣдовательно, или когда мы $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ помножимъ на $a+b+c$; вмѣсто того, чтобы находить сперва всѣ группы по три члена, а потомъ находить сумму уклоненія каждой группы, мы можемъ получить послѣднее слѣдующимъ образомъ: присоединеніе a къ каждой изъ предшествующихъ группъ не измѣнитъ ея уклоненія; присоединеніе b (т. е. $a+1$) измѣнитъ уклоненіе каждой изъ предшествующихъ группъ на $+1$; присоединеніе c на -1. Поэтому, написавъ въ 1-ой графѣ уклоненія, соотвѣтствующія группамъ a^2, b^2... и т. д. и прибавляя къ каждому изъ нихъ въ графѣ 2-ой уклоненіе 0, въ графѣ 3-ей — уклоненіе $+1$ и 4-ой -1

и подсчитавъ число одинаковыхъ уклоненій, получимъ результатъ, изображенный въ графѣ 5-ой и 6-ой:

Уклоненія для группъ изъ 2 случаевъ.	Получается уклоненіе послѣ присоединенія:			Для группъ изъ 3 членовъ получается:	
	a	b	c	Число случаевъ.	Величина уклоненія.
1	2	3	4	5	6
0 . . .	0	+1	−1	7	0
0 . . .	0	+1	−1	6	+1
0 . . .	0	+1	−1	6	−1
+1 . . .	+1	+2	0	3	+2
+1 . . .	+1	+2	0	3	−2
−1 . . .	−1	0	−2	1	+3
−1 . . .	−1	0	−2	1	−3
+2 . . .	+2	+3	+1		
−2 . . .	−2	−1	−3		

Всѣхъ группъ—27; вѣроятность уклоненій для средней на $\frac{0}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm 1$ соотвѣтственно равна $\frac{7}{27}; \frac{12}{27}; \frac{6}{27}; \frac{2}{27}$.

Изъ уклоненій группъ, состоящихъ изъ 3 членовъ, получаются уклоненія для группъ изъ 4 членовъ послѣдовательнымъ присоединеніемъ къ каждой группѣ еще одного уклоненія на 0, +1 и −1:

Группы изъ 3 членовъ.		Получается уклоненіе послѣ присоединенія:			Для группъ изъ 4 членовъ.	
Число.	Уклоненіе.	a	b	c	Число группъ.	Уклоненіе.
7	0	0	+1	−1	19	0
6	+1	+1	+2	0	16	+1
6	−1	−1	0	−2	16	−1
3	+2	+2	+3	+1	10	+2
3	−2	−2	−1	−3	10	−2
1	+3	+3	+4	+2	4	+3
1	−3	−3	−2	−4	4	−3
					1	+4
					1	−4

Итого 81 группа; вѣроятность уклоненія для средней на 0, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{2}{4}$, $\pm\frac{3}{4}$, ± 1 соотвѣтственно равняется $\frac{19}{81}$, $\frac{32}{81}$, $\frac{20}{81}$, $\frac{8}{81}$ и $\frac{2}{81}$.

Такимъ же образомъ мы могли бы найти уклоненія среднихъ величинъ для группъ изъ 5, 6 и т. д. членовъ. Нахожденіе этихъ цыфръ можетъ быть однако облегчено, благодаря тому, что цыфры каждой послѣдующей таблицы получаются изъ цыфръ предыдущей таблицы. Для этого мы должны расположить цыфры, обозначающія числа группъ каждаго рода, аналогично цыфрамъ Паскалева треугольника, а именно:

1	1	1						
1	2	3	2	1				
1	3	6	7	6	3	1		
1	4	10	16	19	16	10	4	1

Среднее наибольшее число отвѣчаетъ числу группъ съ уклоненіемъ 0; въ одну сторону отъ него идутъ цыфры, обозначающія группы съ уклоненіемъ, возрастающимъ на +1; въ другую сторону — на −1. Каждая цыфра нижележащей горизонтальной строки получается отъ сложенія цыфры того же столбца вышележащей строки съ двумя предшествующими; за исключеніемъ цыфръ второго вертикальнаго столбца съ начала и съ конца, которыя получаются изъ суммы только двухъ цыфръ вышележащей строки; послѣдняя цыфра равняется 1. Такимъ образомъ мы можемъ продолжить таблицу до десятой строки включительно:

1 1 1

1 2 3 2 1

1 3 6 7 6 3 1

1 4 10 16 19 16 10 4 1

1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1

1 6 21 50 90 126 141 126 90 50 21 6 1

1 7 28 77 161 266 357 393 357 266 161 77 28 7 1

1 8 36 112 262 504 784 1016 1107 1016 784 504 262 112 36 8 1

1 9 45 156 414 882 1554 2304 2907 3139 2907 2304 1554 882 414 156 45 9 1

1 10 55 210 615 1452 2850 4740 6765 8350 8953 8350 6765 4740 2850 1452 615 210 55 10 1

Полученные результаты удобно расположить въ видѣ приводимой ниже таблицы; въ ней горизонтальный заголовокъ обозначаетъ послѣдовательныя уклоненія 0, 1, 2... цѣлыхъ группъ, дѣленныя на n, т. е. число членовъ группы; такъ что при n равномъ 1, 2 и т. д. послѣдовательныя уклоненія средней будутъ 0, 1; 0, $\frac{1}{2}$, 1; 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1... Дѣля въ каждой группѣ число случаевъ, отвѣчающихъ послѣдовательно каждому отдѣльному уклоненію, на число всѣхъ случаевъ данной группы, получаемъ вѣроятности соотвѣтствующихъ уклоненій, которыя и изображены на таблицѣ такимъ образомъ, что горизонтальныя строки представляютъ вѣроятности различныхъ уклоненій средней для каждой группы, а вертикальныя графы—вѣроятности каждаго уклоненія для послѣдовательныхъ группъ.

Средняя выводимая изъ n членовъ при $n=$	Вѣроятность, что средняя дастъ уклоненіе.										
	$0/n$	$1/n$	$2/n$	$3/n$	$4/n$	$5/n$	$6/n$	$7/n$	$8/n$	$9/n$	$10/n$
1	1/3	2/3									
2	3/9	4/9	2/9								
3	7/27	12/27	6/27	2/27							
4	19/81	32/81	20/81	8/81	2/81						
5	51/243	90/243	60/243	30/243	10/243	2/243					
6	141/729	252/729	180/729	100/729	42/729	12/729	2/729				
7	393/2187	714/2187	532/2187	322/2187	154/2187	56/2187	14/2187	2/2187			
8	1107/6561	2032/6561	1568/6561	1008/6561	532/6561	224/6561	72/6561	16/6561	2/6561		
9	3139/19683	5814/19683	4608/19683	3108/19683	1764/19683	828/19683	312/19683	90/19683	18/19683	2/19683	
10	8953/59049	16700/59049	13530/59049	9480/59049	5700/59049	2904/59049	1230/59049	420/59049	110/59049	20/59049	2/59049

Та же таблица получитъ болѣе наглядный видъ, если мы подставимъ подъ n его послѣдовательныя значенія, а вѣроятности разныхъ уклоненій выразимъ въ десятичныхъ дробяхъ:

n= \ m	0·0	1/10 0·100	1/9 0·111	1/8 0·125	1/7 0·143	1/6 0·167	1/5 0·200	2/9 0·222	1/4=2/8 0·250	2/7 0·286	3/10 0·300	1/3 0·333
1	0·333											
2	0·333											
3	0·259											0·445
4	0·235								0·395			
5	0·210						0·371					
6	0·193					0·346						0·247
7	0·180				0·326					0·244		
8	0·169			0.310					0·239			
9	0·159		0·295					0.234				0·158
10	0·152	0·283					0·229				0·160	

n= \ m	3/8 0·375	4/10=2/5 0·400	3/7 0·429	4/9 0·444	1/2 0·500	5/9 0·556	4/7 0·571	3/5=6/10 0·600	5/8 0·625	2/3=6/9 0·666	7/10 0 700
1											
2					0·444						
3										0·223	
4					0·246						
5		0·247						0·123			
6					0·137					0·058	
7			0·148				0·070				
8	0·153				0·081				0·034		
9				0·090		0·042				0·016	
10		0·097			0·049			0·021			0·007

n= \ m	5/7 0·714	3/4 0·750	7/9 0·777	4/5 0·800	5/6 0·833	6/7 0·857	7/8 0·875	8/9 0·889	9/10 0·900	1·000
1										0·666
2										0·333
3										0·074
4		0·099								0·025
5				0·041						0·008
6					0·016					0·003
7	0·025					0·006				0·000$_9$
8		0·011					0·002			0.000$_3$
9			0·005					0·001		0·000$_1$
10				0·002					0·000$_3$	0·000$_{03}$

Изъ этой таблицы видно слѣдующее: 1) вѣроят-

ность уклоненія средней, равнаго 0, убываетъ съ увеличеніемъ числа членовъ, изъ которыхъ выводится средняя:
0·333; 0·333; 0·259; 0·235; 0·210; 0·193; 0·180; 0·169; 0·159; 0·152;
вѣроятность же наибольшаго уклоненія равнаго 1, убываетъ еще быстрѣе:
0·666; 0·333; 0·074; 0·025; 0·008; 0·003; $0{\cdot}000_3$; $0{\cdot}000_1$; $0{\cdot}000_{03}$.

Откуда слѣдуетъ, что при выводѣ средней изъ большаго числа наблюденій вѣроятность получить среднюю, уклоняющуюся значительно отъ истиннаго значенія, ничтожна — въ данномъ примѣрѣ при 10 наблюденіяхъ вѣроятность получить наибольшее уклоненіе ± 1, составляетъ $0{\cdot}000_{03}$; 2) вѣроятность получить уклоненіе, не превышающее какой-либо напередъ заданной величины между 0 и наибольшимъ уклоненіемъ, возрастаетъ съ увеличеніемъ числа членовъ, изъ которыхъ выводится средняя. Такъ, напримѣръ, вѣроятность получить уклоненіе, не превышающее $\pm\frac{1}{2}$, возрастаетъ для средней изъ нечетныхъ группъ слѣдующимъ образомъ:

при	1 членѣ	0·333
	3 членахъ	0·704
	5 „	0·828
	7 „	0·898
	9 „	0·936

и для средней изъ четныхъ группъ:

при	2 членахъ	0·777
	4 „	0·876
	6 „	0·923
	8 „	0·952
	10 „	0·970.

3) Предѣлы уклоненія средней отъ истиннаго значенія, которые могутъ быть получены съ какою-либо напередъ заданною вѣроятностью, съужи-ваются съ возрастаніемъ числа членовъ, изъ которыхъ выводится средняя. Такъ, напримѣръ, съ вѣроятностью не меньше 0·400 можно получить уклоненіе для средней изъ

1	члена	до	1
2	членовъ	„	0·500
3	„	„	0·333
4	„	„	0·250
5	„	„	0·200
6	„	„	0·167
7	„	„	0·143
8	„	„	0·125
9	„	„	0·111
10	„	„	0·100

Приведенныя цифры показываютъ, что, хотя съ увеличеніемъ n, т. е. числа результатовъ наблюденія, изъ которыхъ мы выводимъ среднюю, вѣроятность получить такую среднюю, которая совпала бы съ истинной величиной, уменьшается, на за то возрастаетъ вѣроятность, что уклоненіе средней отъ истинной не превыситъ нѣкоторой сравнительно небольшой напередъ заданной величины. При этомъ, чѣмъ больше n, тѣмъ болѣе возрастаетъ вѣроятность получить среднюю съ меньшимъ сравнительно уклоненіемъ отъ истинной. Отсюда слѣдуетъ, что если средняя выведена изъ очень большого числа отдѣльныхъ результатовъ наблюденія, существуетъ очень большая вѣроятность, что она уклоняется отъ истинной на очень малую величину.

Полученные выводы мы можемъ формулировать слѣдующимъ образомъ:

если какія-либо величины представляютъ случайныя уклоненія отъ нѣкоторой истинной, образовавшіяся вслѣдствіе присоединенія къ истинной всевозможныхъ сочетаній достаточно большого числа элементарныхъ случайныхъ ошибокъ; и если изъ всѣхъ такихъ уклоняющихся величинъ взято достаточно большое ихъ число въ случайномъ сочетаніи, то 1) существуетъ очень большая вѣроятность, что средняя изъ взятаго числа величинъ весьма мало уклоняется отъ истинной и 2) каждое уклоненіе отъ истинной, а слѣдовательно и средней величины, представляетъ опредѣленную вѣроятность, иначе говоря, уклоненія опредѣленной величины должны встрѣчаться опредѣленное число разъ среди всѣхъ уклоненій; причемъ, вѣроятность уклоненій уменьшается по мѣрѣ возрастанія уклоненій.

4. СРАВНЕНІЕ ЭМПИРИЧЕСКИХЪ УКЛОНЕНІЙ СЪ ТЕОРЕТИЧЕСКИМИ.

Обратимся къ дѣйствительнымъ цыфрамъ и посмотримъ, не представляютъ ли онѣ чего-либо подобнаго вышеизложенному. При тріангуляціи Саксонскаго королевства было измѣрено 197 треугольниковъ; сумма угловъ каждаго треугольника должна дать 180° (истинная величина); на самомъ же дѣлѣ дѣйствительно полученныя въ результатѣ измѣренія величины отличались отъ этой истинной, какъ видно изъ прилагаемой таблицы (Otto *Koll*, Die Theorie der Beobachtungsfehler und die Methode der kleinsten Quadrate mit ihrer Anwendung auf die Geodäsie und die Wassermessungen, 1893, стр. 20):

Величина уклоненія.	Число случаевъ каждаго уклоненія.		Величина уклоненія.	Произведеніе каждаго уклоненія на число случаевъ.	
+	+	—	—	+	—
0·0	13		0·0	0·0	
0·1	10	16	0·1	1·0	1·6
0·2	18	14	0·2	3·6	2·8
0·3	9	17	0·3	2·7	5·1
0·4	8	9	0·4	3·2	3·6
0·5	9	9	0·5	4·5	4·5
0·6	7	8	0·6	4·2	4·8
0·7	4	8	0·7	2·8	5·6
0·8	5	4	0·8	4·0	3·2
0·9	2	6	0·9	1·8	5·4
1·0	3	3	1·0	3·0	3·0
1·1	2	·	1·1	2·2	·
1·2	1	·	1·2	1·2	·
1·3	2	·	1·3	2·6	·
1·4	1	1	1·4	1·4	1·4
1·5	3	·	1·5	4·5	·
1·6	2	1	1·6	3·2	1·6
1·7	·	1	1·7	·	1·7
1·8	·	·	1·8	·	·
1·9	·	1	1·9	·	1·9
	197			+45·9	—46·2
				—0·3	

Мы видимъ, прежде всего, что сумма положительныхъ уклоненій почти равна суммѣ отрицательныхъ уклоненій, такъ что сумма всѣхъ 197 дѣйствительныхъ величинъ будетъ отличаться отъ 197 разъ взятой истинной всего на 0·3″ или средняя отличается отъ истинной на $\frac{0{\cdot}3}{197} = 0{\cdot}0015''$. Такимъ образомъ данный рядъ чиселъ обнаруживаетъ такое же свойство въ отношеніи средней къ истинной, какъ и рядъ, построенный по закону случайныхъ ошибокъ. Остается изслѣдовать, подчиняется ли этотъ рядъ второму основному положенію, т. е. находится ли здѣсь величина уклоненія въ такой же зависимости отъ числа случаевъ его появленія, какъ въ ряду чиселъ, образованныхъ по закону случайныхъ ошибокъ. Съ этой цѣлью для каждаго уклоненія даннаго ряда составимъ величину, аналогичную вѣроятности этого уклоненія, принимая число случаевъ, въ которыхъ оно дѣйствительно явилось, за число случаевъ, ему благопріятствующихъ, а число всѣхъ дѣйствительныхъ случаевъ за число всевозможныхъ случаевъ; тогда вѣроятности уклоненій до: 0·0; 0·1; 0·2 и т. д. будутъ соотвѣтственно равны: $\frac{13}{197}$; $\frac{39}{197}$; $\frac{71}{197}$ и т. д. Эти цыфры даютъ возможность построить таблицу, аналогичную таблицѣ Кетле, причемъ 4-ая графа этой таблицы получается непосредственно изъ приведенныхъ выше цифръ $\frac{13}{197}$, $\frac{39}{197}$, $\frac{71}{197}$... дѣленіемъ каждой на 2; послѣ чего таблица будетъ имѣть слѣдующій видъ (для послѣдующаго сравненія, съ правой стороны приведены тѣ строки таблицы Кетле, которыя даютъ приблизительно такія же вѣроятности уклоненій):

А. Таблица уклоненій дѣйствительныхъ измѣреній.			Б. Таблица Кетле.		
Строка по порядку.	Величина уклоненія въ одну сторону.	Выраженіе, соотвѣтствующее вѣроятности всѣхъ уклоненій до даннаго включительно.	Вѣроятность уклоненій до даннаго включительно.	Величина уклоненія въ одну сторону.	Строка по порядку.
1	0·0	0·023			
2	0·1	0·098			
3	0·2	0·179			
4	0·3	0·243			
5	0·4	0·286			
6	0·5	0·332			
7	0·6	0·372	0·372 652	35ε	18
8	0·7	0·400			
9	0·8	0·421			
10	0·9	0·441			
11	1·0	0·457	0·456 251	53ε	27
12	1·1	0·462	0·461 809	55ε	28
13	1·2	0·465			
14	1·3	0·469			
15	1·4	0·475	0·475 122	61ε	31
16	1·5	0·481	0·481 633	65ε	33
17	1·6	0·489	0·488 659	71ε	36
18	1·7	0·490	0·490 412	73ε	37
20	1·9	0·500			

Изъ сопоставленія случаевъ приблизительно одинаковой вѣроятности обѣихъ таблицъ А и Б, мы находимъ, что уклоненія таблицы А: 0·6; 1·0; 1·1; 1·4; 1·5; 1·6 и 1·7 соотвѣтствуютъ уклоненіямъ таблицы Б: 35ε; 53ε; 61ε; 65ε; 71ε; 73ε; откуда видно, что уклоненія таблицы А получаются изъ уклоненій таблицы Б, если въ послѣдней принять ε= (приблизительно) 0·02. Слѣдовательно уклоненія дѣйствительнаго ряда величинъ отъ ихъ средней или истинной подчинены приблизительно тому же закону зависимости вѣроятности уклоненія отъ его величины, какой характеризуетъ абстрактный рядъ чиселъ, составленный при допущеніи случайной ошибки. Для дѣйствительнаго ряда можетъ

быть найдена величина, аналогичная элементарной ошибкѣ ε, равная въ данномъ случаѣ 0·02, и отдѣльныя уклоненія дѣйствительныхъ величинъ отъ истинной (или средней), могутъ быть разсматриваемы, какъ результатъ присоединенія къ истинной величинѣ при ея измѣреніи такихъ же сочетаній случайной элементарной ошибки, какія мы допускали при образованіи абстрактнаго ряда. Вслѣдствіе этого уклоненія отъ истинной величины, достигающія опредѣленнаго, сравнительно съ элементарной ошибкой, размѣра, встрѣчаются въ такомъ именно числѣ случаевъ, какъ это отвѣчаетъ абстрактной вѣроятности этого размѣра [1]).

Разсмотрѣніе приведенныхъ здѣсь соотношеній даетъ намъ возможность сдѣлать слѣдующее заключеніе. Если бы мы даже не знали, что каждая дѣйствительная величина даннаго намъ ряда получена въ результатѣ измѣренія существующей конкретной истинной величины, мы должны были бы допустить существованіе такой истинной величины или чего-либо ей соотвѣтствующаго, исходя изъ аналогіи между распредѣленіемъ дѣйствительныхъ величинъ по отношенію къ средней въ данномъ рядѣ и таковымъ же распредѣленіемъ случайныхъ уклоненій въ абстрактномъ рядѣ. Въ данномъ случаѣ подобное допущеніе подтверждается дѣйствительнымъ существованіемъ опредѣленной извѣстной намъ конкретной величины, истинный размѣръ которой намъ также извѣстенъ, и мы видимъ, что средняя изъ достаточно большого числа дѣйствительныхъ величинъ даннаго намъ

[1]) Ср. Em. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, 1891, стр. 193—194.

ряда почти равняется этой истинной величинѣ. Однако, если бы мы знали только, что истинная величина существуетъ конкретно, но не знали ея истиннаго значенія, то соотвѣтствующее закону случайныхъ ошибокъ распредѣленіе дѣйствительныхъ величинъ около средней давало бы намъ основаніе допускать, что средняя изъ такихъ дѣйствительныхъ величинъ съ большимъ приближеніемъ и большой вѣроятностью отвѣчаетъ неизвѣстному истинному значенію конкретно существующей истинной величины и потому съ наибольшимъ основаніемъ можетъ и должна быть принята за выраженіе послѣдней. Такъ, напримѣръ, 40 микроскопическихъ опредѣленій длины части масштаба даютъ въ среднемъ опредѣленную величину, отъ которой отдѣльные результаты наблюденій представляютъ уклоненія, подчиняющіяся, въ своемъ распредѣленіи по отношенію къ средней величинѣ, закону случайныхъ ошибокъ; поэтому средняя изъ всѣхъ наблюденій съ наибольшею вѣроятностью можетъ быть принята за выраженіе неизвѣстнаго значенія конкретно существующей истинной величины [1]).

Изложенные выводы и положенія даютъ намъ возможность перейти къ болѣе сложному случаю. Представимъ себѣ, что мы имѣемъ рядъ дѣйствительныхъ наблюденій, дающихъ среднюю, по отношенію къ которой, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ уклоненія дѣйствительныхъ величинъ распредѣляются согласно съ закономъ случайныхъ ошибокъ; но въ дѣйствительности нѣтъ соотвѣтствующей такому ряду истинной величины, кото-

[1]) Em. Czuber. Theorie der Beobachtungsfehler, 1891, стр. 195—196, § 82.

рая существовала бы конкретно. Что изображаетъ собою въ такомъ случаѣ истинная величина? Возьмемъ, напримѣръ, слѣдующій случай.

Измѣреніе роста 1 350 000 итальянцевъ, подлежащихъ отбыванію воинской повинности, дало слѣдующіе результаты (цитировано по Westergaard'y, die Grundzüge der Theorie der Statistik, 1890, стр. 36):

На 1000 приходится.	Ростъ въ см.	На 1000 приходится.	Ростъ въ см.
119	162—163	777	155—170
232	161—164	827	154—171
350	160—165	864	153—172
449	159—166	894	152—173
545	158—167	917	151—174
631	157—168	938	150—175
707	156—169	951	149—176

Если мы пріймемъ средній ростъ въ $162^1/_2$ см. и возьмемъ уклоненія отъ него только въ одну сторону, то цыфры, отвѣчающія вѣроятностямъ возрастающихъ уклоненій составятъ слѣдующую таблицу:

Строка по порядку.	Величина уклоненія въ одну сторону.	Его вѣроятность.	Таблица Кетле.		
			Вѣроятность.	Уклоненіе.	Строка.
1	до $^1/_2$	0·059			
2	$^3/_2$	0·116			
3	$^5/_2$	0·175			
4	$^7/_2$	0·224			
5	$^9/_2$	0·272	0·276	23±	12
6	$^{11}/_2$	0·315	0·312	27±	14
7	$^{13}/_2$	0·353			
8	$^{15}/_2$	0·388	0·385	37±	19
9	$^{17}/_2$	0·413			
10	$^{19}/_2$	0·432	0·435	47±	24
11	$^{21}/_2$	0·447	0·443	49±	25
12	$^{23}/_2$	0·458	0·456	53±	27
13	$^{25}/_2$	0·469	0·467	57±	29
14	$^{27}/_2$	0·475	0·475	61±	31

Мы видимъ, что уклоненія дѣйствительнаго ряда получаются, если принять, что ε таблицы Кетле приблизительно равно для даннаго ряда 0·2. Такимъ образомъ и здѣсь отдѣльныя дѣйствитель-

ныя величины представляются какъ бы результатами измѣренія нѣкоторой истинной величины, снабженными случайными отъ нея уклоненіями. Эта истинная величина, которая должна быть очень близка къ средней, конкретно, какъ намъ извѣстно, не существуетъ. Однако средній ростъ не можетъ представлять собою въ данномъ случаѣ простую математическую фикцію, простой результатъ ариѳметической операціи; ибо въ такомъ случаѣ было бы непонятно, почему онъ находится въ такомъ же правильномъ отношеніи къ конкретнымъ даннымъ наблюденія, какъ истинная величина къ уклоняющимся отъ нея подъ вліяніемъ случайныхъ ошибокъ результатамъ измѣренія. Поэтому мы можемъ и должны представлять себѣ средній ростъ, какъ нѣчто, хотя и не конкретное, но реальное; какъ наиболѣе вѣроятное и приближенное выраженіе нѣкоторой истинной величины, которая хотя сама по себѣ конкретно въ мірѣ явленій не существуетъ, но лежитъ въ основѣ всего ряда дѣйствительныхъ величинъ и каждаго отдѣльнаго члена этого ряда; каждое отдѣльное наблюденіе представляетъ собою выраженіе этой истинной величины съ случайнымъ отъ нея уклоненіемъ. Уклоненія эти представляютъ собою уже не случайныя ошибки наблюденія или измѣренія, извращающія истинное значеніе измѣряемой конкретной величины, но дѣйствительныя отступленія наблюдаемой величины отъ нѣкотораго конкретно несуществующаго, но лежащаго въ основѣ ея фактора. Этотъ факторъ аналогиченъ истинной величинѣ; подобно тому, какъ послѣдняя стремится найти свое выраженіе въ каждомъ случаѣ наблюденія или измѣренія, но въ каждомъ такомъ случаѣ находитъ

свое выраженіе съ присоединеніемъ того или другого случайнаго уклоненія; такъ и этотъ истинный факторъ стремится выразиться въ каждомъ дѣйствительно наблюдаемомъ случаѣ; но въ каждомъ такомъ случаѣ онъ осуществляется съ уклоненіемъ, вся совокупность которыхъ построена по закону случайныхъ ошибокъ. Факторъ этотъ, слѣдовательно, представляетъ собою силу, причину, или совокупность силъ или причинъ, стремящуюся въ каждомъ конкретномъ случаѣ произвести опредѣленный соотвѣтствующій ей результатъ, но производящую этотъ результатъ всегда съ случайнымъ уклоненіемъ отъ своего истиннаго значенія. Средняя величина подобнаго ряда наблюденій и представляетъ собою наиболѣе приближенное и вѣроятное выраженіе истиннаго значенія этого общаго всѣмъ членамъ ряда и лежащаго въ ихъ основѣ реальнаго фактора, конкретно однако нигдѣ не проявляющагося въ своемъ чистомъ видѣ. Такимъ образомъ, средній ростъ, напримѣръ, долженъ быть разсматриваемъ, какъ наиболѣе вѣроятное и приближенное выраженіе истиннаго значенія комплекса тѣхъ причинъ или условій, которыя стремятся привести ростъ каждаго конкретнаго индивида къ опредѣленной мѣркѣ, но всякій разъ производятъ этотъ результатъ съ случайнымъ уклоненіемъ; самый комплексъ этихъ причинъ или условій конкретно нигдѣ самъ по себѣ не проявляется; но онъ существуетъ реально въ основѣ конкретныхъ явленій роста всѣхъ индивидовъ данной собирательной группы. Средняя величина и улавливаетъ эту общую реальную основу уклоняющихся отъ нея по закону случайныхъ ошибокъ конкретныхъ наблюдаемыхъ явленій.

5. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ЗАКОНА СЛУЧАЙНЫХЪ УКЛОНЕНІЙ.

Прежде чѣмъ перейти къ дальнѣйшему изслѣдованію статистическихъ рядовъ, необходимо дать болѣе общее математическое выраженіе закона случайныхъ ошибокъ, чѣмъ то, какое представляетъ намъ таблица Кетле. Таблица Кетле имѣетъ то преимущество, что построеніе ея основано на элементарныхъ математическихъ пріемахъ. Но въ ней число элементарныхъ ошибокъ, а слѣдовательно, число возможныхъ ихъ соединеній взято, хотя и достаточно большое, но все же конечное. Каждое изъ возможныхъ соединеній элементарныхъ ошибокъ даетъ уклоненіе опредѣленной величины (x); конечное число всѣхъ возможныхъ соединеній даетъ конечное число возможныхъ уклоненій; каждому уклоненію отвѣчаетъ опредѣленная вѣроятность; или величина вѣроятности есть функція величины уклоненія

$$y=f(x).$$

т. е. съ измѣненіемъ x мѣняется величина y. При конечномъ числѣ уклоненій и конечной (хотя бы и малой) разницѣ между каждыми двумя смежными уклоненіями, величина y будетъ измѣняться всякій разъ также на конечную разницу (хотя бы и малую). Чтобы значенія y измѣнялись непрерывно, разница между двумя сосѣдними зна-

ченіями x должна быть безконечно мала. Для этой цѣли необходимо было бы взять элементарную ошибку безконечно малой величины; а для того, чтобы получить уклоненіе любой величины необходимо брать какъ угодно большое число элементарныхъ ошибокъ. Если мы соединимъ какъ угодно большое число какъ угодно малыхъ элементарныхъ ошибокъ, часть которыхъ будетъ имѣть положительное, другая отрицательное значеніе, то замѣнивъ въ этомъ комплексѣ одну положительную элементарную ошибку такой же отрицательной, или обратно, мы получимъ результатъ, какъ угодно мало отличающійся отъ предыдущаго; иначе говоря, значенія x будутъ измѣняться отъ одного случая къ другому непрерывно, и также непрерывно будутъ измѣняться y или величины соотвѣтствующихъ вѣроятностей.

При такихъ условіяхъ, вычислить таблицу значеній вѣроятностей, соотвѣтствующихъ различнымъ уклоненіямъ, путемъ элементарныхъ пріемовъ невозможно. Болѣе сложные пріемы математики даютъ возможность опредѣлить формулу зависимости между величиной вѣроятности и величиной уклоненія и въ этомъ случаѣ. Эта зависимость выражается формулой

$$F = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt.$$

гдѣ F выражаетъ вѣроятность уклоненій въ опредѣленныхъ предѣлахъ, γ — опредѣляетъ величину этихъ предѣловъ, а перемѣнная t — рядъ уклоненій, въ нихъ заключенныхъ. Смыслъ и способъ вывода этой формулы можетъ быть до извѣстной

степени уясненъ изложеніемъ логическаго хода ея развитія.

Сущность задачи состоитъ, какъ мы видѣли, въ томъ, чтобы опредѣлить вѣроятность наиболѣе вѣроятнаго исхода и вѣроятность исходовъ, уклоняющихся отъ наиболѣе вѣроятнаго на опредѣленную величину.

Начало изслѣдованію этой задачи было положено Яковомъ Бернулли (Bernoulli, Ars conjectandi, 1713), по имени котораго окончательно формулированные выводы этого изслѣдованія въ настоящее время носятъ названіе теоремы Bernoulli. Логическій ходъ теоремы Bernoulli состоитъ въ слѣдующемъ. Пусть A и B будутъ два противоположныхъ событія, которыя могутъ появляться при каждомъ испытаніи или опытѣ; (напримѣръ, событіе A — положительная элементарная ошибка, B — отрицательная). Пусть появленію событія A благопріятствуетъ при каждомъ испытаніи a случаевъ и появленію событія B — b случаевъ; причемъ число благопріятствующихъ случаевъ не мѣняется отъ испытанія къ испытанію, и исходъ каждаго испытанія не зависитъ отъ исхода предыдущаго испытанія (въ отличіе отъ послѣдующихъ обобщеній Poisson'a и др.). Пусть при такихъ условіяхъ испытаніе повторяется s разъ. Наглядно можно представить изложенныя условія испытанія въ видѣ урны, въ которой помѣщены a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ; событіе A есть вынутіе, при тиражѣ наугадъ, бѣлаго шара, событіе B — чернаго; послѣ каждаго тиража вынутый шаръ возвращается въ урну и содержимое ея перемѣшивается (для сохраненія неизмѣннаго числа случаевъ, благопріятствующихъ каждому событію, и соблюденія неза-

висимости послѣдующаго исхода отъ предыдущаго). Тиражъ повторяется s разъ. Угадать, какой будетъ результатъ s испытаній въ дѣйствительности мы не можемъ; но мы можемъ сказать, какіе результаты вообще могутъ быть; такъ, можетъ быть, что каждое изъ s испытаній даетъ событіе A; или s–1 испытаній даетъ событіе A и 1 испытаніе — событіе B; или s–2 — событіе A и 2 — событіе B и т. д. Если мы не будемъ обращать вниманіе на порядокъ, въ которомъ появляются при s испытаніяхъ A и B, а лишь на число появленій событій, то возможны s+1 отличныхъ другъ отъ друга группъ, начиная отъ такой, въ которой всѣ s испытаній дадутъ событіе A, и кончая такой, гдѣ всѣ s испытаній дадутъ событіе B. Среди всѣхъ этихъ группъ будутъ и такія, въ которыхъ A повторяется m разъ и B n разъ, при условіи, разумѣется, что m+n=s. Число случаевъ, въ которыхъ повторяется каждая изъ s+1 группъ, опредѣляется, какъ извѣстно, коэффиціентами бинома Ньютона: группа, въ которой A появляется s разъ, возможна 1 разъ; группа съ s–1 A и однимъ B возможна s разъ, слѣдующая группа возможна $\frac{s(s-1)}{1.2}$ раза и т. д. Группа, въ которой A повторяется m разъ и B — n разъ, возможна въ

$$\frac{s!}{m!\ n!}$$

числѣ случаевъ (гдѣ s!, m!, n! представляютъ произведеніе ряда чиселъ отъ 1, 2 и т. д. до s, m, n). Вѣроятность повторенія событія A m разъ и B — n разъ въ одномъ какомъ либо опредѣленномъ порядкѣ, по теоремѣ умноженія вѣроятностей, рав-

няется произведенію вѣроятности событія A въ m-ой степени на вѣроятность событія B въ n-ой степени. Такъ какъ появленію A благопріятствуетъ a случаевъ изъ a+b случаевъ и появленію B b случаевъ изъ a+b, то вѣроятность повторенія A m разъ и B — n разъ равняется

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^m \left(\frac{b}{a+b}\right)^n$$

Если же не принимать во вниманіе порядка появленій A и B, а только число ихъ, то имѣя въ виду, что число группъ, въ которыхъ A появляется m разъ и B n разъ, составляетъ

$$\frac{s!}{m!\ n!}\ ,$$

вѣроятность появленія при s испытанныхъ A m разъ и B n разъ въ любомъ порядкѣ будетъ равна, по теоремѣ сложенія, суммѣ вѣроятностей всѣхъ такихъ случаевъ или

$$\frac{s!}{m!\ n!}\ \frac{a^m\ b^n}{(a+b)^s}\ .$$

Обозначивъ вѣроятность появленія A и B черезъ

$$p = \frac{a}{a+b}\quad q = \frac{b}{a+b}\ ,$$

напишемъ предыдущее выраженіе въ видѣ

$$\frac{s!}{m!\ n!}\ p^m\ q^n$$

Придавая m и n=s–m послѣдовательно разныя значенія, отъ

$$m=s \text{ и } n=0 \quad \text{до} \quad m=0 \text{ и } n=s,$$

получимъ величины вѣроятностей каждой послѣ-

довательной группы, начиная отъ той, въ которой всѣ s испытаній даютъ A, и кончая той, въ которой B появляется s разъ. Положимъ, что въ этомъ рядѣ вѣроятностей наибольшее значеніе имѣетъ тотъ членъ, въ которомъ A повторяется m разъ и B — n разъ: въ такомъ случаѣ онъ долженъ быть больше предыдущаго и послѣдующаго, или

$$\frac{s!}{(m+1)!\,(n-1)!}\,p^{m+1}\,q^{n-1} < \frac{s!}{m!\;n!}\,p^{m}\,q^{n} > \frac{s!}{(m-1)!\,(n+1)!}\,p^{m-1}\,q^{n+1}$$

Послѣ сокращенія на общіе множители $s!$, $(m-1)!$, $(n-1)!$, p^{m-1}, q^{n-1}, получимъ:

$$\frac{m+1}{n}\,\frac{q}{p} > 1 \text{ и } \frac{n+1}{m}\,\frac{p}{q} > 1\,,$$

что можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\begin{aligned}(m+1)\;(1-p) &> (s-m)\;p\\ (s-m+1)\;p &> m\;(1-p)\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}m &> sp+p-1\\ sp+p &> m\end{aligned}$$

Такъ какъ $sp+p-1$ и $sp+p$ отличаются другъ отъ друга только на 1, то, если $sp+p$ число съ дробью, въ указанныхъ предѣлахъ между $sp+p$ и $sp+p-1$ имѣется только одно цѣлое число, а именно sp, если это цѣлое число, или ближайшее къ нему цѣлое число, если sp—дробное; если же $sp+p$ и $sp+p-1$ суть цѣлыя числа, то между ними не можетъ заключаться цѣлое число; въ первомъ случаѣ наибольшимъ членомъ ряда будетъ тотъ единственный членъ, въ которомъ m равно sp или

отличается отъ sp на дробь, дополняющую sp до цѣлаго числа; во-второмъ случаѣ одного наибольшаго члена не будетъ, но будутъ два равныхъ наибольшихъ члена, въ которыхъ m равняется sp+p и sp−q. Если m не равняется sp, то во всякомъ случаѣ разница между $\frac{m}{s}$ и p не можетъ быть больше $\frac{1}{s}$, что слѣдуетъ изъ того, что

$$p - \frac{q}{s} < \frac{m}{s} < p + \frac{p}{s},$$

а разница между $p - \frac{q}{s}$ и $p + \frac{p}{s}$ равняется $\frac{1}{s}$. При очень большомъ s, $\frac{1}{s}$ стремится къ 0, а $\frac{m}{s}$ въ предѣлѣ равняется p, или m равняется sp. При m=sp, n=sq. Все вышеизложенное можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

изъ всѣхъ результатовъ, какіе мыслимы при s испытаніяхъ, наибольшую вѣроятность имѣетъ тотъ результатъ, въ которомъ число появленій событія A и число появленій обратнаго событія B относятся другъ къ другу, какъ p : q, т. е какъ вѣроятности событія A и событія B.

Если мы пріймемъ, что

$$m = sp \text{ и } n = sq$$

(непосредственно или въ предѣлѣ), то вѣроятность наиболѣе вѣроятнаго результата или y_0 можетъ быть выражена въ видѣ

$$y_0 = \frac{s!}{sp!\ sq!}\ p^{sp}\ q^{sq}$$

Опредѣленіе численной величины этого выраженія встрѣчаетъ затрудненіе въ вычисленіи произведенія ряда чиселъ типа

1. 2. 3. . . . s . (т. н. факультетъ: s!)

Устранить это затрудненіе оказалось возможнымъ, послѣ того, какъ Stirling (Methodus differentialis, 1730) далъ удобную формулу для вычисленія такого рода произведеній съ достаточнымъ приближеніемъ.

По этой формулѣ

$$s! = s^{s+1/2}\, e^{-s}\, \sqrt{2\pi}\ ,$$

гдѣ e представляетъ основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ и равняется 2·71828... Замѣнивъ указанной формулой факультеты въ выраженіи y_0, получимъ:

$$y_0 = \frac{s^{s+1/2}\, e^{-s}\, \sqrt{2\pi}\ p^{sp}\, q^{sq}}{sp^{sp+1/2}\, e^{-sp}\, \sqrt{2\pi}\ sq^{sq+1/2}\, e^{-sq}\, \sqrt{2\pi}}$$

и послѣ надлежащихъ сокращеній:

$$y_0 = \frac{1}{s^{1/2}\, p^{1/2}\, q^{1/2}\, \sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, spq}}\ .$$

Такимъ образомъ значеніе вѣроятности наиболѣе вѣроятнаго результата найдено. Дальнѣйшая задача состоитъ въ томъ, чтобы найти выраженіе вѣроятности члена, отстоящаго на извѣстное число промежуточныхъ членовъ отъ наибольшаго, напримѣръ i-аго члена, считая отъ наибольшаго. Значеніе этого члена (y_i) опредѣляется той же формулой, какъ и значеніе y_0, если въ ней вмѣсто $m = sp$ взять $sp+i$ и вмѣсто $n = sq$ взять $sq - i$; или:

$$y_i = \frac{s!}{(sp+i)!\ (sq-i)!}\ p^{sp+i}\ q^{sq-i}\ .$$

Значеніе же члена, отстоящаго на столько же промежуточныхъ членовъ отъ наибольшаго въ противоположную сторону, выразится въ видѣ:

$$y_{-i} = \frac{s!}{(sp-i)!\ (sq+i)!}\ p^{sp-i}\ q^{sq+i}\ .$$

При помощи формулы Stirling'a, послѣ надлежащихъ преобразованій y_i получаетъ слѣдующее выраженіе:

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-\frac{i^2}{2spq}} \left(1 + \frac{(p-q)i}{2spq} + \dots\right)$$

и членъ y_{-i}:

$$y_{-i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-\frac{i^2}{2spq}} \left(1 - \frac{(p-q)i}{2spq} - \dots\right).$$

Сумма же ихъ даетъ:

$$y_i + y_{-i} = \frac{2}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-\frac{i^2}{2spq}}.$$

Такимъ же образомъ мы можемъ опредѣлить значеніе каждаго члена въ промежуткѣ между i-ымъ и наибольшимъ въ одну и другую сторону. Членъ y_i выражаетъ вѣроятность того результата, который состоитъ въ появленіи при s испытаніяхъ $m+i$ разъ событія A и $n-i$ разъ событія B; членъ y_i выражаетъ вѣроятность результата, состоящаго въ появленіи $m-i$ разъ A и $n+i$ разъ B. Если событія A и B имѣютъ численное выраженіе, такъ что, напримѣръ, появленіе событія A даетъ численный результатъ=1, а событія B — 0, то появленіе $m+i$ разъ A и $n-i$ разъ B дастъ результатъ, уклоняющійся отъ наиболѣе вѣроятнаго (m разъ A и n разъ B) на i; вѣроятность же y_{-i} будетъ отвѣчать результату, уклоняющемуся на — i.

Суммируя всѣ члены отъ y_i до y_{-i}, мы получимъ вѣроятность всѣхъ уклоненій въ предѣлахъ отъ i до —i, или вѣроятность всѣхъ уклоненій на $\pm i$ отъ наиболѣе вѣроятнаго результата. Эта вѣроятность выразится въ видѣ

$$F = y_i + y_{i-1} + \dots + y_1 + y_0 + y_{-1} + \dots + y_{-i+1} + y_{-i}$$

или

$$F = \sum_{-i}^{i} y.$$

Если допустить, что между наиболѣе вѣроятнымъ членомъ ряда и тѣмъ, который дастъ уклоненіе на i, имѣется сколь угодно большое число промежуточныхъ членовъ, иначе говоря, если послѣдовательныя уклоненія отличаются другъ отъ друга на какъ угодно малую величину, то суммированіе такого ряда можетъ быть достаточно точно сдѣлано при помощи особой формулы Euler'a и даетъ результатъ

$$F = \frac{2}{\sqrt{2\pi spq}} \int_0^i e^{-\frac{x^2}{2spq}} dx + \frac{e^{-\frac{i^2}{2spq}}}{\sqrt{2\pi spq}}.$$

Оставляя безъ вниманія второй членъ, мы получимъ приближенную, но достаточно точную формулу:

$$F = \frac{2}{\sqrt{2\pi spq}} \int_0^i e^{-\frac{x^2}{2spq}} dx,$$

въ которой перемѣнная x обозначаетъ величину послѣдовательныхъ уклоненій каждаго результата отъ наиболѣе вѣроятнаго до уклоненія i, т. е. x послѣдовательно принимаетъ всѣ значенія отъ 0 до i; каждому безконечно малому приращенію перемѣнной x (или dx) соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе функціи $e^{-\frac{x^2}{2spq}}$; знакъ $\int_0^i$ обозначаетъ сумму всѣхъ этихъ значеній въ предѣлахъ отъ 0 до i, и все выраженіе F представляетъ собою величину

вѣроятности всѣхъ возможныхъ результатовъ (или уклоненій) въ обѣ стороны отъ наиболѣе вѣроятнаго уклоненія до i, или въ предѣлахъ между +i и −i.

Если принять новое обозначеніе, а именно

$$\text{для } \frac{x^2}{2spq} = t^2$$

$$\text{для } \frac{i}{\sqrt{2spq}} = \gamma.$$

то вышеуказанная формула получаетъ видъ:

$$F_\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

и обозначаетъ, что

съ вѣроятностью F_γ можно ожидать, что уклоненіе отъ наиболѣе вѣроятнаго результата не выйдетъ за предѣлы $\pm \gamma \sqrt{2spq}$, если p обозначаетъ вѣроятность появленія событія, q—обратную вѣроятность, s—достаточно большое число испытаній; наиболѣе же вѣроятнымъ результатомъ будетъ тотъ, въ которомъ отношеніе числа случаевъ появленія событія къ числу случаевъ испытанія или $\frac{m}{s} = p$, или, $m = sp$.

Функція

$$y_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-\frac{x^2}{2spq}}$$

обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что съ возрастаніемъ x быстро убываетъ, а такъ какъ сумма всѣхъ y равна 1, то съ возрастаніемъ s сумма членовъ ближайшихъ къ наиболѣе вѣроятному быстро приближается къ 1, тогда какъ величина болѣе удаленныхъ членовъ становится ничтожной. Поэтому

F_γ, равная единицѣ при $\gamma = \infty$, приближается, къ этому своему предѣльному значенію при сравнительно умѣренныхъ значеніяхъ γ. Таблица значеній F_γ соотвѣтствующихъ послѣдовательнымъ значеніямъ γ, приведена въ приложеніи.

Тотъ же самый законъ случайныхъ уклоненій можетъ быть выведенъ изъ допущенія, что арифметическая средняя является наиболѣе вѣроятнымъ значеніемъ неизвѣстной истинной величины. Пусть нѣкоторая величина A въ результатѣ n возможно точныхъ измѣреній или наблюденій получаетъ рядъ значеній

$$a_1,\ a_2, \ldots\ldots\ldots a_n.$$

Если истинное значеніе A равно z, то наблюденія даютъ рядъ ошибокъ:

$$x_1 = z - a_1;\ x_2 = z - a_2; \ldots\ldots x_n = z - a_n.$$

Пусть вѣроятность (y) каждой ошибки будетъ ея функціей:

$$y_1 = f(x_1);\ y_2 = f(x_2); \ldots\ldots y_n = f(x_n).$$

Вѣроятность, что всѣ указанныя ошибки произошли въ данномъ рядѣ измѣреній, какъ вѣроятность сложнаго событія, состоящаго въ совпаденіи отдѣльныхъ событій, равняется произведенію вѣроятностей каждой отдѣльной ошибки или

$$P = f(z - a_1)\ f(z - a_2) \ldots\ldots f(z - a_n).$$

Такъ какъ истинное значеніе z неизвѣстно a priori и не можетъ быть получено изъ опыта, то остается принять нѣкоторую величину за наиболѣе вѣроятное значеніе z. При рѣшеніи вопроса, какую именно величину принимать за наиболѣе вѣроятное значеніе истинной, приходится исходить изъ какого-либо допущенія. Такое допущеніе было

предложено, между прочимъ, Gauss'омъ (Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium, 1778): слѣдуетъ считать наиболѣе вѣроятнымъ такое значеніе неизвѣстной, которое, будучи сравнено съ рядомъ дѣйствительныхъ результатовъ, даетъ систему ошибокъ, обладающую наибольшей вѣроятностью; или наиболѣе вѣроятнымъ будетъ то значеніе z, которое сообщаетъ P наибольшее значеніе. Для того, чтобы P имѣло наибольшее значеніе, первая производная P должна равняться 0 и вторая должна быть меньше 0, или

$$\frac{dP}{dz} = 0 \text{ и } \frac{d^2P}{dz^2} < 0.$$

Дифференцируя P, получимъ

$$\frac{dP}{dz} = f(z-a_2)\ f(z-a_3)\ldots f(z-a_n)\ f'(z-a_1) + f(z-a_1)f(z-a_3)\ldots$$
$$f(z-a_n)\ f'(z-a_2)+\ldots\ldots$$

Дѣля и умножая каждый членъ соотвѣтственно на $f(z-a_1)$; $f(z-a_2)$...., получимъ

$$\frac{dP}{dz} = \frac{P\,f'(z-a_1)}{f(z-a_1)} + \frac{P\,f'(z-a_2)}{f(z-a_2)} + \ldots + \frac{Pf'(z-a_n)}{f(z-a_n)} = \ldots (I)$$

Положимъ, что это равенство удовлетворяется при

$$\frac{f'(z-a)}{f(z-a)} = k(z-a) \ldots\ldots\ (z)$$

Подставляя $k(z-a)$ вмѣсто $\frac{f'(z-a)}{f(z-a)}$ въ выраженіе (I) получимъ:

$$\frac{dP}{dz} = Pk(z-a_1) + Pk(z-a_2) + \ldots + Pk(z-a_n) = 0.$$

или $\quad Pk(z-a_1+z-a_2+\ldots+z-a_n) = 0 \ldots$ (II)

или $\quad Pk(nz-\Sigma a) = 0.$

Это равенство очевидно удовлетворяется, если

$$nz = \Sigma a \text{ или } z = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

т. е. когда z представляетъ ариѳметическую среднюю.

Дифференцируя выраженіе (II) еще разъ, получимъ:

$$\frac{d^2 P}{dz^2} = Pk^2 (z-a_1 + z-a_2 + \ldots + z-a_n)^2 + nPk$$

Такъ какъ $\frac{d^2P}{dz^2}$ должно быть меньше 0 и первый членъ второй части $= 0$, то,

$$nPk < 0$$

Пусть это условіе имѣетъ мѣсто при

$$k = -2h^2 \ldots\ldots\ldots (\beta).$$

Такимъ образомъ средняя ариѳметическая будетъ наиболѣе вѣроятнымъ значеніемъ неизвѣстной при допущеніи двухъ условій, а именно, что:

$$\frac{f'(z-a)}{f(z-a)} = k(z-a) \qquad (\alpha)$$

и

$$k = -2h^2 \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Къ чему приводятъ эти условія? Если въ выраженіи (α) положимъ для упрощенія:

$$z-a = x;\ f(z-a) = f(x) = y \text{ и } f'(z-a) = f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

то получимъ

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = kx \text{ или } \frac{d \log y}{dx} = kx$$

Интегрируя это выраженіе, получимъ:

$$\log y = \frac{1}{2} kx^2 + C \text{ или}$$

$$y = e^{\frac{1}{2}kx^2 + C} = ce^{\frac{1}{2}kx^2}.$$

Подставляя найденное выраженіе, съ замѣной x черезъ z—a и k черезъ —2h, въ выраженіе P, получимъ

$$P = c^n e^{-h^2 [(z-a_1)^2 + \ldots + (z-a_n)^2]}.$$

откуда видно, что условія α и β приводятъ къ допущенію, что система ошибокъ слѣдуетъ закону случайныхъ уклоненій. Чтобы привести P къ виду

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

надо найти постоянную c и выразить h черезъ среднее квадратическое уклоненіе.

Если вѣроятность уклоненія z—a или $f(z-a) = ce^{-h^2 (z-a)^2} = ce^{-h^2 x^2}$, то вѣроятность всѣхъ возможныхъ уклоненій выразится въ видѣ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ce^{-h^2 x^2} dx$$

Извѣстно, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$;

Въ такомъ случаѣ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ce^{-h^2 x^2} dx = \frac{c\sqrt{\pi}}{h},$$

а такъ какъ вѣроятность всѣхъ возможныхъ уклоненій = 1, то

$$\frac{c\sqrt{\pi}}{h} = 1$$

откуда

$$c = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

Равнымъ образомъ, взявъ квадратъ каждаго уклоненія и умноживъ на его вѣроятность и суммируя, мы получимъ среднее квадратическое уклоненіе въ квадратѣ или

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} x^2 \, dx = m^2 \ldots\ldots (1)$$

Такъ какъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} x^2 \, dx$$

при интеграціи даетъ:

$$\frac{1}{2h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} \, dx = \frac{1}{2h^3} \sqrt{\pi}$$

то согласно выраженію (1)

$$m^2 = \frac{1}{2h^2} \text{ и } h = \frac{1}{m\sqrt{2}}.$$

Если уклоненія обозначить черезъ перемѣнное x, то вѣроятность уклоненія выразится въ видѣ

$$\frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2m^2}}$$

$$\text{и } P = \frac{2}{m\sqrt{2\pi}} \int_0^i e^{\frac{-x^2}{2m^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{i}} e^{-t^2} \, dt.$$

Такимъ образомъ, ариометическая средняя является наиболѣе вѣроятнымъ выраженіемъ истинной величины въ предположеніи, что наиболѣе вѣроятнымъ значеніемъ неизвѣстной слѣдуетъ считать то, которое сообщаетъ данной системѣ уклоненій наибольшую вѣроятность, причемъ уклоненія построены по закону т. н. нормальной кривой:

$f(x) = ce^{-h^2x^2}$. Этотъ законъ случайныхъ уклоненій былъ выведенъ Gauss'омъ первоначально въ предположеніи, что существуетъ одинъ рядъ элементарныхъ погрѣшностей, расположенныхъ симметрично. Послѣдующими изслѣдованіями (Young'a, Airy, Bessel'a, Crofton'a см. Czuber, Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie, 6 Abschn.) было показано, что указанныя ограниченія излишни, и законъ можетъ быть распространенъ и на систему погрѣшностей, при одномъ только условіи: если отдѣльныхъ рядовъ погрѣшностей достаточно большое число, и каждый рядъ въ отдѣльности производитъ погрѣшность очень малой величины, по сравненію съ общей погрѣшностью. Уже комбинація трехъ и болѣе источниковъ погрѣшностей даетъ въ общемъ законъ, не различающійся сколько нибудь значительно отъ приведеннаго. Результатъ получается иной лишь въ томъ случаѣ, если одинъ какой-либо источникъ даетъ погрѣшность, значительно преобладающую надъ остальными (C. V. Burton, on a Physical Basis for the Theory of Errors, Philos. Magaz., 28, 1889, стр. 480 сл.) [1]).

Наиболѣе вѣроятное значеніе неизвѣстной можетъ быть выводимо и изъ другихъ предположеній. Такъ, Gauss впослѣдствіи принялъ за исходную точку то положеніе, что для наиболѣе вѣроятнаго значенія неизвѣстной необходимо приводить къ минимуму квадраты уклоненій. На основаніи этого допущенія мы также приходимъ къ ариѳметичес-

---

[1]) Czuber, E. Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker—Vereinigung, VII, B. Leipzig, 1899; Его-же, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig, 1903, стр. 88 сл., стр. 216, 219. Его-же, Theorie der Beobachtungsfehler, 1891; Лоренцъ Г., Элементы высшей математики, т. II, Москва, 1908 стр. 444 сл.

кой средней, ибо если

$$(z-a_1)^2 + (z-a_2)^2 + \ldots + (z\ a_n)^2$$

должно представлять минимумъ, то первая производная или

$$z-a_1 + z-a_2 + \ldots + z-a_n = 0,$$

что дастъ ариѳметическую среднюю [см. Czuber, Die Entwicklung etc. раздѣлъ Ausgleichungsrechnung].

C. Th. Fechner (Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung, Abhandl. d. K. S. Gesellschaft d. Wissensch., XVIII, Math.—phys. Cl. B. XI, Leipzig, 1874) указываетъ, что условія, опредѣляющія среднюю ариѳметическую (суммы положительныхъ и отрицательныхъ уклоненій отъ средней равны, а сумма квадратовъ уклоненій минимальна) представляютъ только частный случай общаго условія, опредѣляющаго среднія величины въ широкомъ смыслѣ слова, такъ называемыя имъ Potenzmittelwerthe. Подъ послѣдними онъ понимаетъ такія не выходящія за предѣлы крайнихъ членовъ ряда величины, уклоненія отъ которыхъ въ n-ой степени даютъ равныя суммы въ одну и другую сторону, а въ n+1-ой степени даютъ минимальную сумму. Potenzmittelwert наинизшаго порядка будетъ т. н. серединная величина или Centralwert, т. е. величина, находящаяся посрединѣ ряда данныхъ дѣйствительныхъ величинъ (способъ ея нахожденія въ нѣкоторыхъ случаяхъ см. стр. 22 op. cit.); уклоненія отъ нея въ одну и въ другую сторону въ нулевой степени даютъ равныя суммы (такъ какъ каждое уклоненіе въ нулевой степени = 1, а сумма ихъ = числу членовъ ряда въ одну и дру-

гую сторону отъ серединной величины); а уклоненія въ первой степени даютъ минимальную сумму. Слѣдующая за серединной величиной ариѳметическая средняя даетъ равныя суммы уклоненій въ первой степени и минимальную сумму квадратовъ уклоненій и т. д. Хотя такимъ образомъ ариѳметическая средняя представляетъ только частный случай среднихъ величинъ вообще, но ей отдается предпочтеніе передъ другими и должно отдавать таковое вслѣдствіе разныхъ причинъ, среди которыхъ F. указываетъ на слѣдующія: средняя зависитъ отъ абсолютнаго значенія уклоненій и не зависитъ отъ ихъ знака; она не мѣняется, вычислимъ ли мы ее сразу на основаніи всѣхъ данныхъ величинъ или же послѣднія разобьемъ на группы и потомъ среднюю выведемъ изъ групповыхъ среднихъ; для средней безразлично, въ какомъ порядкѣ стоятъ данныя числа; она никогда не даетъ двухъ и больше значеній.

Въ извѣстныхъ случаяхъ полезно или необходимо примѣнять серединную величину, см. Galton, Statistics by intercomparison, Philosophical Magazine, Vol, XLIX, стр. 33; относительно геометрической средней см. Julius Merkel, Theoretische und experimentelle Begründung der Fehlermethoden, Philosoph. Studien Wundt'a т. 7, 1892, стр, 602 и die Methode der mittleren Fehler etc. тамъ же т. 9, 1894, стр. 53 сл., 176 сл., 400 сл.; также H. Seeliger, Bemerkung über das arithmetische Mittel, Astron. Nachricht., B. 132, № 3158. (Случаи примѣненія гармонической средней см. въ логикѣ Джевонса).

6. ПРИМѢНЕНІЕ ЗАКОНА СЛУЧАЙНЫХЪ УКЛОНЕНІЙ КЪ ИЗСЛѢДОВАНІЮ ЭМПИРИЧЕСКИХЪ РЯДОВЪ.

Такъ какъ правильность распредѣленія случайныхъ уклоненіи требуетъ достаточно большого числа уклоняющихся величинъ, изъ которыхъ выводится средняя, то открыть въ рядѣ дѣйствительныхъ величинъ присутствіе закона случайныхъ уклоненій возможно только при томъ условіи, если этотъ рядъ достаточно великъ.

При большомъ рядѣ чиселъ требуется утомительный трудъ вычисленій, отнимающій много времени. Ихъ слѣдуетъ дѣлать медленно и аккуратно; при всемъ томъ трудно бываетъ избѣжать ошибокъ; поэтому, если требуется точность, приходится продѣлывать всю работу дважды, свѣряя результаты по мѣрѣ ихъ полученія. Для облегченія вычисленій, кромѣ таблицъ логариѳмовъ, могутъ служить разнаго рода счетныя таблицы, среди которыхъ наиболѣе удобными считаются таблицы Crelle: Crelle's Rechentafeln (Neue Ausgabe, Berlin, Verlag von G. Reimer, 1907, цѣна 15 мар.). Таблицы Crelle представляютъ собою распространенную таблицу умноженія отъ 1 до 1000, даютъ непосредственно произведенія трехзначныхъ чиселъ и значительно облегчаютъ умноженіе, дѣленіе, возведеніе въ степень и извлеченіе корня для чиселъ съ бо́льшимъ числомъ знаковъ.

Механическими приспособленіями служатъ прежде всего счеты; для умноженія, дѣленія, вы-

численія процентныхъ отношеній и пропорціональныхъ чиселъ, возведенія въ степень и извлеченія корня, если мы имѣемъ дѣло съ неособенно большими числами или если не требуется большой точности, можетъ служить пособіемъ логариѳмическая счетная линейка, напр. Rechenschieber изготовленія Albert Nestler'a, (цѣною около 9 мар. за средній размѣръ). Болѣе сложными аппаратами являются счетныя машины. Для сложенія Davenport рекомендуетъ (Statistical Methods, стр. 7) Comptometer изготовленія Felt and Tarrent Manufacturing Co., Chicago, цѣна 125 дол.; эта машина работаетъ подобно пишущей, путемъ нажатія клавишей; другія машины, имѣющія нѣкоторыя преимущества, стоятъ дороже: Burroughs Adding Machine изготовленія American Arithometer Co. St. Louis. Mo., цѣна отъ 250 до 350 дол. и Standard Adding Machine, St. Louis, 185 долл.

Для умноженія и дѣленія большихъ чиселъ Davenport указываетъ Baldwin Calculator, цѣна 250 дол. и Tate's Improved Arithometer (300—400 дол.), оба въ продажѣ у Spectator Company, 95 William Street, New York. Pearson рекомендуетъ: Brunsviga, изготовленія Grimme, Natalis Co, въ Брауншвейгѣ. Въ Петербургѣ мною были найдены въ продажѣ слѣдующія машины: Glashüter Rechenmaschine Saxonia Marke «Tim», Ludwig Spitz Co. Berlin Sw, 48 Puttkamerstrasse 19 (въ продажѣ у Ж. Блокъ, Невскій 62); у него же имѣется въ настоящее время Brunsviga; Ариѳмометръ—Тріумфаторъ (въ продажѣ у Т. И. Гагенъ, цѣна 140 р.); Ариѳмометръ Однера (весьма распространенъ въ Россіи, см. А. Ф. Фортунатовъ, о статистикѣ, стр. 13) въ продажѣ у Э. Митенсъ, Гостинный дворъ, 4, цѣна 120—205 рублей.

Значеніе F_γ, отвѣчающее какому-либо данному γ, показываетъ вѣроятность, что уклоненіе ряда не выйдетъ за предѣлы $\gamma \times$ на нѣкоторую опредѣленную и постоянную для каждаго ряда величину c, въ то же время для каждаго ряда свою особую. Эту специфическую, для каждаго ряда постоянную, величину можно опредѣлить эмпирически, если рядъ построенъ по закону случайныхъ уклоненій, слѣдующимъ образомъ.

По таблицѣ значеній F_γ, вѣроятности $= {}^1/_2$ (точнѣе: $F_\gamma = 0{\cdot}503$) отвѣчаетъ значеніе $\gamma = 0{\cdot}48$. Въ дѣйствительномъ рядѣ, если онъ построенъ по закону случайныхъ уклоненій, той же вѣроятности должно отвѣчать уклоненіе $= \gamma c$. Если мы возьмемъ такое уклоненіе отъ средней, въ предѣлахъ котораго лежитъ ${}^1/_2$ всего числа случаевъ даннаго ряда—назовемъ это уклоненіе ρ — то ρ и представляетъ собою уклоненіе, отвѣчающее вѣроятности $= {}^1/_2$, и слѣдовательно

$$\rho = \gamma\ c$$

откуда $c = {}^\rho/_\gamma = {}^\rho/_{0{\cdot}48}$. Такъ, напримѣръ, изъ таблицы роста на стр. 64 видно, что около половины всего числа дѣйствительныхъ величинъ ряда (545) лежитъ въ предѣлахъ 158—167 см.; если средняя $= 162{}^1/_2$ см., то ρ (т. н. вѣроятное уклоненіе) равняется для даннаго ряда $\pm 4{\cdot}5$; согласно сказанному $\rho = 0{\cdot}48$ c; откуда $c = \frac{4{\cdot}5}{0{\cdot}48}$ или около 9. Затѣмъ изъ таблицы видно, что, напримѣръ, 232 случая изъ 1000 лежатъ въ предѣлахъ уклоненія отъ сред-

ней на $\pm 1{\cdot}5$, а 350 — на $\pm 2{\cdot}5$; если данныя цыфры подчиняются закону случайныхъ уклоненій, то указанныя уклоненія должны быть не больше c, умноженнаго на то значеніе γ, которое отвѣчаетъ вѣроятностямъ $0{\cdot}232$ и $0\,350$ таблицы F_γ; вѣроятности $0{\cdot}234$ (ближайшей къ $0{\cdot}232$) отвѣчаетъ $\gamma = 0\,21$, и вѣроятности $0{\cdot}349$ (ближайшей къ $0{\cdot}350$) отвѣчаетъ $\gamma = 0{\cdot}32$; въ обоихъ случаяхъ γc удовлетворяетъ условію, такъ какъ въ первомъ случаѣ оно даетъ 1.9 и во второмъ $2{\cdot}9$. Такое же соотвѣтствіе наблюдается и для остальныхъ уклоненій, за исключеніемъ только крайнихъ уклоненій, которыя незначительно больше чѣмъ случайныя, какъ это видно изъ нижеслѣдующей таблицы:

F_γ	γ	Уклоненіе, котораго не должно превышать число дѣйствительныхъ случаевъ, отвѣчающее вѣроятности F_γ	Ближайшее къ указанному въ предъидущей графѣ дѣйствительное уклоненіе.	Отвѣчающее такому уклоненію число дѣйствительныхъ случаевъ.
$0{\cdot}234$	$0{\cdot}21$	$0{\cdot}21.9 = 1{\cdot}9$	$1{\cdot}5$	232
$0{\cdot}349$	$0{\cdot}32$	$0{\cdot}32.9 = 2{\cdot}9$	$2{\cdot}5$	350
$0{\cdot}447$	$0{\cdot}42$	$0{\cdot}42.9 = 3\,7$	$3{\cdot}5$	449
$0{\cdot}546$	$0{\cdot}53$	$0{\cdot}53.9 = 4{\cdot}7$	$4{\cdot}5$	545
$0{\cdot}635$	$0{\cdot}64$	$0{\cdot}64.9 = 5{\cdot}8$	$5{\cdot}5$	631
$0{\cdot}705$	$0{\cdot}74$	$0{\cdot}74.9 = 6{\cdot}7$	$6{\cdot}5$	707
$0{\cdot}776$	$0{\cdot}86$	$0{\cdot}86.9 = 7{\cdot}7$	$7{\cdot}5$	777
$0{\cdot}825$	$0{\cdot}96$	$0\,96.9 = 8{\cdot}6$	$8{\cdot}5$	827
$0\,866$	$1{\cdot}06$	$1{\cdot}06.9 = 9{\cdot}5$	$9{\cdot}5$	864
$0{\cdot}893$	$1{\cdot}14$	$1{\cdot}14.9 = 10{\cdot}3$	$10{\cdot}5$	894
$0\,916$	$1{\cdot}22$	$1{\cdot}22.9 = 11{\cdot}0$	$11{\cdot}5$	917
$0{\cdot}938$	$1\,32$	$1{\cdot}32.9 = 11{\cdot}9$	$12{\cdot}5$	938
$0\,951$	$1{\cdot}39$	$1{\cdot}39.9 = 12{\cdot}5$	$13{\cdot}5$	951

Предѣлы уклоненія γc мы можемъ выразить нѣсколько иначе, а именно, допуская, что $c = \delta\sqrt{2}$, получимъ

$$\gamma c = \gamma\delta\sqrt{2}$$

и обозначая $\gamma\sqrt{2}$ черезъ u, получимъ

$$\gamma c = u\delta = \gamma\sqrt{2}\ \delta$$

Иначе говоря, коэффиціенту u, помноженному на

новую постоянную величину δ, будетъ отвѣчать такая же вѣроятность, какая отвѣчаетъ $\gamma = u \div \sqrt{2}$. Величина же δ, представляющая такъ называемое среднее квадратическое уклоненіе ряда, получается непосредственно изъ данныхъ ряда способомъ, который будетъ указанъ ниже. Отыскивая въ таблицѣ значеніе F_γ, отвѣчающее $\gamma = u \div \sqrt{2}$, и беря его только съ 2 десятичными знаками, мы получимъ сокращенную таблицу, которой будемъ пользоваться въ дальнѣйшемъ изложеніи слѣдующимъ образомъ. Если намъ дано δ, то умножая его на u (т. е. на $\gamma\sqrt{2}$) мы получаемъ уклоненіе $u\delta = \gamma\sqrt{2}\,\delta = \gamma c$; этому уклоненію соотвѣтствуетъ стоящая противъ u F_u, т. е. вѣроятность, что уклоненіе не выйдетъ за предѣлы $u\delta$ или γc, или, иначе, что изъ всего числа случаевъ ряда или N число случаевъ $= N \times F_u$ дастъ уклоненіе, не превышающее $u\delta$. Таблица значеній u и F_u приводится ниже; промежуточныя между двумя ближайшими значеніями u и F_u, въ случаѣ надобности, приходится вычислять пропорціонально ближайшимъ значеніямъ.

Таблица значеній u, F_u.

u	F_u	u	F_u	u	F_u	u	F_u
0·1	0·08	0·8	0·58	1·5	0·87	2·2	0·97
0·2	0·16	0·9	0·63	1·6	0·89	2·3	0·98
0·3	0·24	1·0	0·68	1·7	0·91	2·4	0·98
0·4	0·31	1·1	0·73	1·8	0·93	2·5	0·99
0·5	0·38	1·2	0·77	1·9	0·94	3·0	0·997
0·6	0·45	1·3	0·81	2·0	0·95	3·5	0·999
0·7	0·52	1·4	0·84	2·1	0·96	4·0	0·99994

Dr Alfred Mitscherlich, желая изслѣдовать, насколько законъ случайныхъ уклоненій приложимъ вообще къ сельско-хозяйственнымъ даннымъ, въ частности, напримѣръ, къ вычисленію времени, въ теченіе котораго различные рабочіе совершаютъ одинаковую работу, остановился на простѣйшемъ случаѣ работы—ходьбѣ. Съ этою цѣлью онъ отмѣрилъ около 20 метровъ разстоянія передъ сельско-хозяйственнымъ институтомъ въ Килѣ и посредствомъ секундомѣра опредѣлялъ время, какое употребляли мужчины, женщины и ѣдущіе шагомъ и рысью повозки на прохожденіе этого пространства. Раздѣливъ время на разстояніе, онъ получилъ скорость движенія отдѣльнаго индивида или повозки въ 1 секунду. Изъ всѣхъ наблюденій мы приводимъ 100 случаевъ скорости движенія мужчинъ: [1]).

---

[1]) Alfred Mitscherlich, Die Schwankungen der landwirtschaftlichen Reinertrage, Tübingen, 1903, Ergänzungsheft III d. Zeitschr. f. d. ges. Staatswiss.

Число наблюденій.	Скорость метр. въ сек.	Уклоненіе отъ средней.	Скорость метр. въ сек.	Число наблюденій.	% отношеніе ко всему числу случаевъ
4	1·57	0·01	1·59	2	
2	1·56	0·02	1·60	1	9
4	1·55	0·03	1·61	2	
5	1·54	0·04	1·62	1	16
		0·05	1·63	1	
1	1·51	0·07	1·65	5	
3	1·50	0·08	1·66	1	32
1	1·49	0·09			
3	1·48	0·10	1·68	5	41
1	1·47	0·11	1·69	1	
2	1·46	0·12			
1	1.45	0·13			46
4	1·44	0·14	1·72	3	53
1	1·43	0·15			54
		0·16	1·74	3	57
2	1·40	0·18			
1	1·39	0·19	1·77	2	62
2	1·38	0·20	1·78	1	
		0·21	1·79	3	68
1	1·36	0·22			
3	1·35	0·23	1·81	1	73
		0·25	1·83	4	77
1	1·31	0·27			78
		0·28	1·86	2	
1	1·29	0·29			81
1	1·28	0·30	1·88	1	
1	1·27	0·31			84
1	1·26	0·32	1·90	1	
1	1·24	0·34			87
1	1·23	0·35			
		0·36	1·94	2	90
2	1·21	0·37	1·95	1	93
1	1·18	0·40			94
		0·43	2·01	1	95
1	1·14	0·44			96
1	1·09	0·49			97
		0·50	2·08	1	98
		0·56	2·14	1	99
		0·58	2·16	1	100

Средняя скорость = 1·5846;
сумма уклоненій въ положительную сторону = суммѣ уклоненій въ отрицательную сторону = 8·7030; число положительныхъ уклоненій = 47; отрицательныхъ = 53.

Около $^1/_2$ всего числа случаевъ (53%) лежатъ

въ предѣлахъ отъ 1·72 до 1·44 включительно; этимъ величинамъ отвѣчаетъ крайнее уклоненіе 1·5846 — 1·44=0·1446; такимъ образомъ 53% всего числа случаевъ не выходятъ за предѣлы уклоненія ±0·145=ρ. По таблицѣ вѣроятности 0·52 отвѣчаетъ u=0.7 и, согласно предыдущему, специфическое среднее уклоненіе ряда=$\delta=\frac{0{\cdot}145}{0{\cdot}7}=0{\cdot}21$. Эта средняя квадратическая ошибка, будучи послѣдовательно умножаема на различныя значенія u=0·1, 0·2 .. даетъ послѣдовательный рядъ уклоненій, въ предѣлахъ которыхъ должно укладываться соотвѣтственное вѣроятностямъ F_u число случаевъ даннаго ряда — 8;16;... Насколько дѣйствительное распредѣленіе отвѣчаетъ теоретически вычисленному, видно изъ нижеслѣдующей таблицы:

Уклоненія.		Число наблюденій въ предѣлахъ каждаго уклоненія.	
δ=0·21× на u :	=x	Въ дѣйствительности.	Должно быть, согласно вычисленію.
0·1	0 02	9	8
0·2	0 04	16	16
0·3	0 06	·	24
0·4	0 08	32	31
0·5	0 10	41	38
0·6	0 13	46	45
0·7	0 15	54	52
0·8	0 17	57	58
0·9	0 19	62	63
1·0	0 21	68	68
1·1	0 23	73	73
1·2	0 25	77	77
1·3	0 27	78	81
1·4	0 29	81	84
1·5	0 31	84	87
1·6	0 34	87	89
1·7	0 36	90	91
1·8	0 38	93	93
1·9	0 40	94	94
2·0	0 42	·	95
2·1	0 44	96	96
2·2	0 46	·	97
2·3	0 48	·	98
2·4	0 50	98	98
2·5	0 52	98	99
·	·	·	·
2·7	0 57	99	99

Мы видимъ, что дѣйствительный рядъ почти совпадаетъ съ теоретически вычисленнымъ. Благодаря такому совпаденію, примѣръ оказывается подходящимъ для того, чтобы эмпирически вывести отношеніе специфическаго для ряда уклоненія къ другимъ величинамъ. Одно такого рода соотношеніе уже извѣстно: это отношеніе средняго квадратическаго уклоненія къ такъ называемому вѣроятному, т. е. такому уклоненію, въ предѣлахъ котораго находится половина всего числа случаевъ даннаго ряда; это отношеніе выражается въ томъ, что

$$\rho = 0{\cdot}7\delta \text{ или } \delta = \frac{\rho}{0{\cdot}7} = 1{\cdot}43\,\rho.$$

Точнѣе оно выражается слѣдующимъ образомъ

$$\delta = \frac{\rho}{0{\cdot}67} = 1{\cdot}49\,\rho \text{ (теоретически} — \rho = 0{\cdot}674\,490\,\delta)$$

Средняя квадратическая ошибка находится въ правильномъ соотношеніи съ ариѳметической средней изъ суммы всѣхъ уклоненій, взятыхъ въ ихъ абсолютной величинѣ. Въ данномъ случаѣ, сумма абсолютныхъ значеній дѣйствительныхъ уклоненій составляетъ 17·4060, средняя, или $d = 0{\cdot}174$: откуда $\frac{d}{\delta} = \frac{0{\cdot}174}{0{\cdot}21} = 0{\cdot}8$ и $\frac{\delta}{d} = \frac{0{\cdot}21}{0{\cdot}174} = 1{\cdot}2$, или: $\delta = \frac{d}{0{\cdot}8} = 1{\cdot}2d$ и $d = 0{\cdot}8\delta$.

Точнѣе тѣ же отношенія должны были бы быть выражены: $\delta = \frac{d}{0{\cdot}7979}$ или $= 1{\cdot}25\,d$ (теоретически — $d = 0{\cdot}797\,885\,\delta$). Величину d, въ отличіе отъ δ, мы будемъ называть простымъ среднимъ уклоненіемъ ряда (durchschnittlicher Fehler); величину же δ — квадратическимъ среднимъ уклоненіемъ ряда (mittlerer Fehler); квадратическимъ оно называется потому, что, подобно тому, какъ простое среднее уклоненіе получается изъ ариѳметической средней дѣй-

ствительныхъ уклоненій, такъ квадратическое уклоненіе получается изъ ариѳметической средней суммы квадратовъ дѣйствительныхъ уклоненій. Алгебраическое выраженіе δ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$$

Въ данномъ случаѣ сумма квадратовъ уклоненій $= \Sigma x^2 = 4{\cdot}73$ (точнѣе $4{\cdot}79$) и $\frac{\Sigma x^2}{n} = 0{\cdot}0473$; откуда $\delta = 0{\cdot}217$.

Причина, почему именно среднее квадратическое уклоненіе берется за основаніе, при помощи котораго характеризуется отношеніе дѣйствительныхъ величинъ ряда къ средней, заключается въ томъ, что, какъ было указано, самая средняя величина выводится изъ понятія квадратовъ уклоненій, а именно, согласно предложенію Gauss'a, величиной, наиболѣе приближающейся къ истинной, должно признавать ту, сумма квадратовъ уклоненій которой отъ данныхъ величинъ имѣетъ минимальное значеніе.

7. ОТНОСИТЕЛЬНЫЯ ВЕЛИЧИНЫ.

Слѣдующій примѣръ (Westergaard, Grundzüge der Theorie d. Statistik, стр. 22) послужитъ какъ для уясненія и подтвержденія ранѣе изложенныхъ положеній, такъ и для распространенія ихъ на дальнѣйшій кругъ явленій, а именно на относительныя числа. Изъ урны, содержащей равное число одинаковыхъ, по возможности, шаровъ чернаго и бѣлаго цвѣта, вынимается наугадъ одинъ шаръ, отмѣчается его цвѣтъ, шаръ возвращается обратно въ урну, содержимое ея тщательно перемѣшивается, затѣмъ дѣлается слѣдующій тиражъ и т. д. Всѣхъ тиражей сдѣлано 10 000, изъ нихъ 5 011 дали бѣлые шары и 4 989—черные. Если всю серію тиражей раздѣлить на группы по 100 послѣдовательныхъ тиражей, то въ каждой сотнѣ отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ къ черными будетъ слѣдующее (приводимъ только число шаровъ одного цвѣта):

въ 1	случаѣ 63	въ 11	случаяхъ 49
1	62	5	48
1	61	6	47
4	58	5	46
4	57	4	45
5	56	3	44
3	55	3	43
8	54	2	42
4	53	2	41
10	52	2	40
5	51	1	39
9	50	1	34

Средняя изъ всѣхъ чиселъ равняется 50·11 или приблизительно просто 50. Равное численное отношеніе шаровъ въ урнѣ и отсутствіе какихъ-либо основаній для выхода шаровъ одного цвѣта предпочтительно предъ другимъ можетъ быть разсматриваемо, какъ постоянная, основная причина, стремящаяся привести число шаровъ одного цвѣта въ каждой сотнѣ къ 50; число 50 является какъ бы выраженіемъ истинной величины дѣйствующей причины, и средняя довольно точно улавливаетъ эту величину. Въ каждой отдѣльной сотнѣ дѣйствительная величина числа шаровъ одного цвѣта уклоняется отъ того, что мы могли бы назвать истинной величиной. Распредѣляются ли уклоненія согласно закону случайныхъ ошибокъ? Среднее квадратическое уклоненіе — δ — равняется $\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}} = \sqrt{27{\cdot}37} = 5{\cdot}23$; среднее ариѳметическое уклоненіе $d = \frac{\Sigma x}{n} = 4{\cdot}09$; отношеніе между ними $\frac{d}{\delta} = \frac{4{\cdot}09}{5{\cdot}23} = 0{\cdot}78$ незначительно отличается отъ теоретическаго $= 0{\cdot}7979$. Вѣроятное уклоненіе ρ должно равняться $0{\cdot}6745\delta = 3{\cdot}53$; въ дѣйствительности 50% всего числа случаевъ не превышаютъ уклоненія ± 3. Умноженіе средняго квадратическаго уклоненія на послѣдовательныя значенія аргумента u (таблицы на стр. 90) даетъ рядъ уклоненій, теоретическая вѣроятность которыхъ выражается соотвѣтствующими значеніями функціи F_u той же таблицы. Насколько дѣйствительная частота различныхъ уклоненій отвѣчаетъ теоретически вычисленной вѣроятности ихъ появленія, видно изъ нижеслѣдующей таблицы.

u	u.δ	Дѣйствительныя уклоненія.	Ихъ относительная частота.	Теоретическая вѣроятность. F_u;
0·1	0·5	меньше 1	0·09	0·08
0·2	1·0			
0·3	1·6	„ 2	0·25	0·24
0·4	2·1			
0·5	2·6	„ 3	0·40	0·38
0·6	3·1			
0·7	3·7	„ 4	0·50	0·52
0·8	4·2			
0·9	4·7	„ 5	0·63	0·63
1·0	5·2			
1·1	5·7	„ 6	0·70	0·73
1·2	6·3			
1·3	6·8	„ 7	0·78	0·81
1·4	7·3			
1·5	7·8	„ 8	0·85	0·87
1·6	8·4			
1·7	8·9	„ 9	0·91	0·91
1·8	9·4			
1·9	9·9	„ 10	0·93	0·94
2·0	10·5	„ 11	0·95	0·95
2·1	11·0			
2·2	11·5	„ 12	0·97	0·97
2·3	12·0			
2·4	12·5	„ 13	0·98	0·98
2·5	13·1			
3·0	15·7	„ 16	0·99	0·997
3·5	18·3			
4·0	20·9	не больше 16	1·00	0·99994

Совпаденіе дѣйствительнаго числа случаевъ появленія различныхъ уклоненій съ теоретической ихъ вѣроятностью свидѣтельствуетъ о томъ, что уклоненія числа шаровъ одного цвѣта въ каждой отдѣльной группѣ отъ средней величины подчинены закону случайныхъ ошибокъ. Поэтому если бы мы до опыта не знали истиннаго отношенія бѣлыхъ и черныхъ шаровъ въ урнѣ, то на основаніи этихъ результатовъ опыта могли бы съ большою вѣроятностью допустить, что средняя весьма близко указываетъ на истинное соотношеніе шаровъ и что, слѣдовательно, число бѣлыхъ равняется числу черныхъ шаровъ, и мы видимъ,

что это допущеніе соотвѣтствовало бы дѣйствительности.

Въ этомъ примѣрѣ мы принимали, что число 50 является выраженіемъ истинной величины причины, дѣйствующей въ условіяхъ даннаго опыта, а дѣйствительныя числа шаровъ одного цвѣта въ каждой группѣ являются случайно уклоняющимися выраженіями этой истинной величины. Однако подобное представленіе не отвѣчаетъ, въ сущности, дѣйствительности, такъ какъ каждая группа представляетъ собою не то или иное абсолютное число шаровъ извѣстнаго рода, а отношеніе числа шаровъ одного цвѣта къ числу шаровъ другого цвѣта; въ дѣйствительности мы не имѣли абсолютныхъ величинъ 63, 62, 61 и т. д., а отношенія 63/100, 62/100, 61/100 и т. д.; и средняя представляетъ собою не абсолютное число 50, а отношеніе 5 011: 10 000 или 1/2. Иначе говоря, мы имѣемъ здѣсь дѣло съ относительными величинами, и средняя изъ нихъ представляетъ собою также относительное число. Послѣднее, въ отличіе отъ первыхъ, представляетъ отношеніе, взятое на основаніи всего числа случаевъ; поэтому мы можемъ назвать его общеотносительнымъ числомъ; тогда какъ отдѣльныя относительныя числа, изъ которыхъ получается общеотносительное число, представляютъ собою отношенія для единичныхъ группъ и потому могутъ быть названы частноотносительными числами. Такимъ образомъ, указанная раньше закономѣрность отношеній средней величины къ тѣмъ, изъ которыхъ она получена, можетъ быть теперь распространена на отношенія между общеотносительнымъ и частноотносительными числами и сообразно съ этимъ выражена въ новыхъ терминахъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, сообразно съ особенной природой относительныхъ чиселъ, эта закономѣрность допускаетъ иное математическое выраженіе.

Если мы имѣемъ рядъ послѣдовательныхъ группъ случаевъ $n_1, n_2, n_3 \ldots . n_s$ (напримѣръ, группы тиражей шаровъ), и если въ каждой группѣ извѣстное событіе (выходъ бѣлаго шара) произошло соотвѣтственно $m_1, m_2, m_3 \ldots . m_s$ разъ, то отношенія $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3} \ldots . \frac{m_s}{n_s}$ (которыя мы можемъ обозначить черезъ $p_1\ p_2\ p_3 \ldots . p_s$) будутъ представлять собою частноотносительныя числа для каждой отдѣльной группы случаевъ. Что же касается общеотносительнаго числа, то оно можетъ быть получено двоякимъ способомъ. Во-первыхъ, мы можемъ суммировать всѣ случаи во всѣхъ группахъ: $n_1 + n_2 + \ldots + n_s = N$ и числа данныхъ событій во всѣхъ группахъ: $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = M$; отношеніе этихъ двухъ суммъ дастъ общеотносительное число $p = \frac{M}{N}$ — общеотносительное, выраженное въ простомъ видѣ. То же общеотносительное можетъ быть выражено и получено иначе. Представивъ $\frac{M}{N}$ въ видѣ

$$\frac{M}{N} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \ldots + \frac{m_s}{N}$$

и умноживъ каждый членъ второй части соотвѣтственно на $\frac{n_1}{n_1}, \frac{n_2}{n_2} \ldots .$ получимъ.

$$\frac{M}{N} = \frac{n_1}{N}\frac{m_1}{n_1} + \frac{n_2}{N}\frac{m_2}{n_2} + \ldots + \frac{n_s}{N}\frac{m_s}{n_s}.$$

Здѣсь общеотносительное выражено въ составномъ видѣ. Отношенія $\frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \ldots .$ показывающія значеніе, съ какимъ каждое частноотносительное чи-

сло привходитъ въ образованіе общеотносительнаго (или сравнительную частоту каждой группы), называютъ вѣсомъ частноотносительнаго числа. Если частноотносительныя имѣютъ одинаковый вѣсъ, т. е. $\frac{n_1}{N} = \frac{n_2}{N} = \ldots = \frac{n_s}{N}$, что возможно при $n_1 = n_2 = \ldots = n_s = n$, то общеотносительная представляетъ простую среднюю ариѳметическую изъ частноотносительныхъ:

$$\frac{M}{N} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_s}{n.s} .$$

Такъ какъ общеотносительное представляетъ собою ариѳметическое среднее (простое или съ вѣсомъ) изъ частноотносительныхъ, то оно можетъ обнаруживать такую же закономѣрность по отношенію къ нимъ, какъ всякая средняя величина по отношенію къ тѣмъ, изъ которыхъ она выведена. Частноотносительныя числа мы можемъ поэтому разсматривать, какъ выраженія нѣкоторой истинной величины, снабженной всякій разъ комбинаціями случайныхъ ошибокъ, а общеотносительное—какъ наиболѣе вѣроятное и приближенное выраженіе этой истинной величины. Однако истинная величина, находящая свое выраженіе въ рядѣ относительныхъ чиселъ, отличается отъ того рода истинныхъ величинъ, которыя приближенно выражаются въ абсолютныхъ числахъ. Среднія, выведенныя изъ абсолютныхъ чиселъ, какъ средняя изъ повторныхъ измѣреній одного и того же предмета, средній ростъ, средняя скорость и т. п., представляютъ вѣроятныя значенія также абсолютныхъ величинъ, т. е. такихъ, которыя выражаютъ нѣкоторое число тѣхъ или другихъ единицъ мѣры, безразлично какъ въ томъ случаѣ, когда такія величины дѣйствительно существуютъ въ природѣ,

такъ и тогда, когда онѣ только мыслятся, какъ стремящіяся найти свое выраженіе въ дѣйствительныхъ величинахъ. Между тѣмъ относительныя числа не выражаютъ никакой абсолютной величины, а лишь отношеніе двухъ величинъ: числа случаевъ или событій одного какого-либо рода къ числу всѣхъ вообще случаевъ, принимаемыхъ за среду, въ которой случаи или событія даннаго рода имѣютъ мѣсто. Въ такой своей конструкціи относительныя числа аналогичны вѣроятностямъ; представляя отношеніе числа случаевъ наступленія событія къ числу всѣхъ возможныхъ случаевъ, они являются какъ бы эмпирическимъ апостеріорнымъ выраженіемъ вѣроятности наступленія извѣстнаго событія въ данной средѣ.

Вслѣдствіе этого закономѣрность отношенія общеотносительнаго числа къ частноотносительнымъ можетъ быть понимаема въ томъ смыслѣ, что первое служитъ наиболѣе вѣроятнымъ приближеннымъ эмпирическимъ выраженіемъ истиннаго значенія вѣроятности извѣстнаго событія, а частноотносительныя числа выражаютъ ту же вѣроятность съ случайными уклоненіями.

Изъ теоремы Bernoulli мы знаемъ, что наиболѣе вѣроятное число случаевъ (m) появленія событія, вѣроятность котораго p, при достаточно большомъ числѣ (n) испытаній приближается къ $m = np$, и что уклоненія отъ этой наиболѣе вѣроятной величины на $\pm\gamma\sqrt{2npq}$ (или $\pm u\sqrt{npq}$ при $u = \gamma\sqrt{2}$) встрѣчаются съ вѣроятностью

$$F_\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt.$$

Обозначимъ мѣру уклоненія $\sqrt{npq}$ черезъ σ.

Если мы примемъ, что общеотносительное число, если оно выведено на основаніи большого числа наблюденій, представляетъ собою наиболѣе вѣроятное выраженіе вѣроятности даннаго событія, то уклоненія отъ него на $\pm u.\sigma$ должны встрѣчаться приблизительно съ вѣроятностью F_u. Но разсматривая ранѣе общеотносительное число, какъ ариѳметическую среднюю, мы видѣли, что съ тою же вѣроятностью F_u должны встрѣчаться уклоненія, выраженныя въ видѣ произведенія u на среднюю квадратическую ошибку, а именно $u.\delta = u\sqrt{\frac{\Sigma x}{n}}$. Такимъ образомъ мы имѣемъ двѣ мѣры — σ и δ — для того, чтобы судить, въ предѣлахъ какихъ уклоненій отъ средней или общеотносительной, принимаемой за наиболѣе вѣроятное значеніе нѣкоторой величины должно лежать опредѣленное число уклоненій отъ, этой средней или общеотносительной.

Очевидно, эти двѣ мѣры должны находиться въ извѣстномъ соотношеніи другъ къ другу. Характеръ послѣдняго можетъ быть выясненъ путемъ слѣдующаго разсужденія. Пусть вѣроятность p нѣкотораго событія равняется $^3/_5$; въ рядѣ испытаній это событіе либо наступаетъ, и тогда мы можемъ сказать, что p получило значеніе достовѣрности и обозначить его 1; либо не наступаетъ, и тогда значеніе p въ данномъ испытаніи мы можемъ обозначить черезъ 0. Опредѣлимъ квадратическое уклоненіе результатовъ испытаній отъ истиннаго значенія. Когда при испытаніи p получаетъ значеніе $= 1$, уклоненіе отъ истиннаго значенія равняется $-\frac{3}{5} + 1 = \frac{2}{5}$; квадратъ его $= \left(\frac{2}{5}\right)^2$. Когда при испытаніи p получаетъ значеніе $= 0$, уклоненіе отъ

истиннаго значенія $= -\frac{3}{5} + 0 = -\frac{3}{5}$; квадратъ его $= \left(\frac{3}{5}\right)^2$; при достаточно большомъ числѣ испытаній наиболѣе вѣроятное отношеніе случаевъ наступленія событія къ его ненаступленію должно быть пропорціонально вѣроятностямъ того и другого исхода — p : q. Поэтому въ данномъ случаѣ событіе должно наступить въ $^3/_5$ всего числа испытаній и не наступить въ $^2/_5$ числа испытаній. Или уклоненіе $^2/_5$ должно повториться $^3/_5$ раза и уклоненіе $^3/_5$ — въ остальномъ числѣ случаевъ. Въ такомъ случаѣ сумма квадратовъ уклоненій будетъ равна

$$\delta = \sqrt{\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)} = \sqrt{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}} = \sqrt{pq},$$

въ предположеніи, что число испытаній приведено къ единицѣ. (См. Westergaard, Grundzüge etc. стр. 76). Или то же въ болѣе общемъ обозначеніи: если при испытаніи событіе наступаетъ, p принимаетъ значеніе 1, и уклоненіе равняется 1−p; если событіе не наступаетъ, p принимаетъ значеніе 0, и уклоненіе равняется −p; квадраты уклоненій составятъ q^2 и p^2, а соотвѣтствующія имъ вѣроятности p и q; произведеніе квадратовъ уклоненій на соотвѣтствующія вѣроятности даетъ $\delta^2 = p^2q + pq^2 = pq$ для одного случая испытанія; для событія изъ s повторныхъ испытаній — spq. Выраженіе : $p^2q + pq^2$ представляетъ сумму произведеній возможныхъ значеній нѣкоторой величины (въ данномъ случаѣ уклоненія въ квадратѣ) на ея вѣроятность. Сумма произведеній каждаго изъ возможныхъ значеній величины (a) на соотвѣтствующую вѣроятность этого значенія называется математическимъ ожиданіемъ данной величины и обозначается черезъ $e(a) = p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots\ldots p_n a_n$. То же положеніе мо-

жетъ быть доказано въ общемъ видѣ. Пусть истинная величина p принимаетъ въ каждомъ рядѣ испытаній значенія $\frac{m_1}{n}$, $\frac{m_2}{n}$ .... и т. д.; общій видъ уклоненія имѣетъ выраженіе $\frac{m}{n}-p$, а квадратъ его $\left(\frac{m}{n}-p\right)^2$. Сумма квадратовъ всѣхъ уклоненій выразится математическимъ ожиданіемъ квадрата $\left(\frac{m}{n}-p\right)^2$ или $\delta=\sqrt{e\left[\left(\frac{m}{n}-p\right)^2\right]}$; возведя на самомъ дѣлѣ въ квадратъ, получимъ $\frac{m^2}{n^2}-\frac{2pm}{n}+p^2$, и математическое ожиданіе этого выраженія

$$e\left[\frac{m^2}{n^2}-\frac{2mp}{n}+p^2\right]=\frac{1}{n^2}e\left[m^2\right]-\frac{2p}{n}e\left[m\right]+p^2,$$

такъ какъ p, n. 2 представляютъ собою величины постоянныя. Для опредѣленія этого выраженія надо найти значенія $e\left[m\right]$ и $e\left[m^2\right]$. Перемѣнная m можетъ быть представлена въ видѣ $x_1, x_2, \ldots x_n$, гдѣ общій членъ можетъ имѣть значенія 1 и 0 съ вѣроятностью p и $q=1-p$. Математическое ожиданіе члена x или $e\left[x\right]=1.p+0.q=p$, и математическое ожиданіе его квадрата или $e\left[x^2\right]=1^2p+0^2q=p$. Тогда математическое ожиданіе m или

$$e\left[m\right]=e\left[x_1\right]+e\left[x_2\right]+\ldots=np;$$

математическое же ожиданіе m^2 получитъ слѣдующее выраженіе: такъ какъ

$$m^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+2x_1x_2+\ldots,\text{ то}$$

$$e\left[m^2\right]=e\left[x_1^2\right]+e\left[x_2^2\right]+\ldots+2\,e\left[x_1\right].e\left[x_2\right]+\ldots;$$

въ этомъ выраженіи членовъ вида $e\left[x^2\right]$ имѣется n, а произведеній вида $e\left[x_1\right].e\left[x_2\right]$ столько, сколько можно сдѣлать сочетаній изъ n элементовъ по два или

$$C_n^2=\frac{n!}{2!\,n-2!}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Поэтому все выраженіе равняется:

$$np + \frac{2p^2 n(n-1)}{2} \text{ или } np + n(n-1)p^2.$$

Слѣдовательно, подставивъ въ

$$e\left[\left(\frac{m}{n} - p\right)^2\right] = e\left[\frac{m^2}{n^2} - \frac{2pm}{n} + p^2\right] = \frac{1}{n^2} e\left[m^2\right] - \frac{2p}{n} e\left[m\right] + p^2$$

найденныя значенія $e[m]$ и $e[m^2]$, получимъ

$$e\left[\left(\frac{m}{n} - p^2\right)\right] = \frac{np + n(n-1)p^2}{n^2} - \frac{2pnp}{n} + p^2,$$

что послѣ производства указанныхъ дѣйствій и сокращеній даетъ

$$\frac{p - p^2}{n} \text{ или } \frac{p(1-p)}{n} \text{ или } \frac{pq}{n}$$

Откуда

$$\delta = \sqrt{\frac{pq}{n}} \text{ (или для np: } \delta = \sqrt{npq}).$$

Также E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik u. Lebensvers. 1903, § 74 стр. 104—105: уклоненіе $(m-sp)^2$, умноженное на его вѣроятность $\frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n$, будучи суммировано для всѣхъ значеній m отъ $m = 0$ до $m = s$, даетъ: $\sum_{m=s}^{0} (m - sp)^2 . \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n = \sqrt{spq}$ или для $\frac{m}{s}$ и p— $\sqrt{\frac{pq}{s}}$.

Изъ указаннаго равенства двухъ мѣръ уклоненій явствуетъ, что хотя σ имѣетъ внѣшнее выраженіе, отличное отъ δ, тѣмъ не менѣе, подобно послѣднему, σ тоже представляетъ сумму квадратовъ уклоненій, лишь извѣстнымъ образомъ преобразованную. Изъ хода доказательства явствуетъ также условіе, необходимое для того, чтобы сумма квадратовъ уклоненій могла получить видъ σ. Это

возможно тогда, когда берутся уклоненія каждаго сингулярнаго, далѣе неразложимаго, испытанія отъ общей вѣроятности p. Пусть въ основѣ N испытаній лежитъ нѣкоторая вѣроятность p; разобьемъ рядъ испытаній на s группъ по n испытаній въ каждой; пусть въ первой группѣ событіе наступило въ m_1 испытаніяхъ, во второй — m_2 и т. д. до m_s. Получается рядъ частноотносительныхъ

$$\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots\ldots \frac{m_s}{n}.$$

Мѣра уклоненія этихъ частноотносительныхъ отъ истиннаго значенія p можетъ быть выражена прежде всего въ видѣ суммы квадратовъ уклоненій каждаго частноотносительнаго отъ p или

$$n\delta^2 = \left(\frac{m_1}{n} - p\right)^2 + \left(\frac{m_2}{n} - p\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{m_s}{n} - p\right)^2.$$

Но затѣмъ каждую группу можно разбить на n отдѣльныхъ сингулярныхъ, далѣе неразложимыхъ испытаній; или весь рядъ на ns=N сингулярныхъ испытаній; если теперь взять сумму квадратовъ уклоненій каждаго сингулярнаго испытанія отъ истиннаго значенія p, то въ результатѣ сумма квадратовъ уклоненій получаетъ выраженіе σ (Bortkewitch, L. von, Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, Jahrb. f. N. Oek. u. St., III F. 10 B., 1895, стр. 340—342).

Иначе говоря, если въ основѣ ряда испытаній лежитъ нѣкоторая истинная величина p; если рядъ испытаній разбитъ на извѣстное число группъ, и каждая группа представляетъ собою частноотносительное, то средняя ариѳметическая изъ суммы квадратовъ уклоненій частноотносительныхъ отъ истинной величины или δ даетъ ту же величину, какъ и средняя квадратическая мѣра уклоненія,

вычисленная по способу σ. Обративъ это положеніе, мы можемъ сказать: если нѣкоторое число частноотносительныхъ даетъ по сравненію съ истинной величиной p среднеквадратическую мѣру уклоненія δ, равную σ, то частноотносительныя представляютъ собою случайныя уклоненія истинной величины p.

Этотъ выводъ имѣетъ существенное значеніе для изслѣдованія статистическихъ рядовъ. Принимая общеотносительную за наиболѣе вѣроятное значеніе истинной величины, мы получаемъ въ указанномъ положеніи критерій для изслѣдованія характера ряда путемъ сравненія мѣръ уклоненій, вычисляемыхъ двоякимъ способомъ.

Если для ряда частноотносительныхъ среднеквадратическое уклоненіе δ равняется уклоненію σ, вычисленному на основаніи общеотносительной, то частноотносительныя представляютъ собою лишь случайныя уклоненія отъ той вѣроятности, которая находитъ свое наиболѣе вѣроятное выраженіе въ общеотносительной. Случай совпаденія δ и σ носитъ названіе, по терминологіи Lexis'a, *нормальнаго разсѣянія* (дисперсіи).

При эмпирической провѣркѣ этого равенства мы никогда не можемъ ожидать, чтобы δ получилось точно равнымъ σ. Для этого было бы необходимо, какъ видно изъ приведеннаго доказательства, чтобы число испытаній было какъ угодно велико; только при этомъ условіи каждое уклоненіе можетъ встрѣчаться въ числѣ случаевъ, точно отвѣчающемъ его теоретической вѣроятности. Между тѣмъ, въ дѣйствительности, какъ бы ни было велико число наблюденій, условіе это никогда не исполняется, и дѣйствительная частота

различныхъ уклоненій, при очень большемъ числѣ случаевъ, только приближается къ теоретической; поэтому и дѣйствительная сумма квадратовъ всѣхъ уклоненій какого-либо даннаго ряда никогда не исчерпываетъ всѣхъ возможныхъ уклоненій, которыя теоретически получаются для вѣроятности p, въ предположеніи, что въ n испытаніяхъ она всѣми возможными способами комбинируется съ обратной вѣроятностью q [1]).

Примѣромъ нормальнаго разсѣянія можетъ служить опытъ съ тиражемъ шаровъ. Средняя изъ частноотносительныхъ составляетъ, какъ было показано, 50·11 на сто или, иначе говоря, эмпирическое выраженіе вѣроятности равняется въ дан-

[1]) Karl Marbe, Naturphilosophische Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitslehre, Leipzig, 1899, доказываетъ на основаніи опытныхъ данныхъ игры въ рулетку, что группы, состоящія изъ повторенія одного и того же событія нѣкоторое число разъ подърядъ, встрѣчаются въ дѣйствительности рѣже, чѣмъ слѣдуетъ по теоріи, а повтореніе событія сколько-нибудь большее число разъ подърядъ и вовсе не встрѣчается. Это несоотвѣтствіе дѣйствительности съ теоріей (если оно вообще можетъ считаться доказаннымъ данными Marbe, см. по поводу неправильнаго подсчета числа группъ Lexis, Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs—und Moralstatistik, 1903, стр. 222 и сл., примѣч.), имѣетъ ничтожное значеніе при эмпирическомъ сравненіи δ и ε, такъ какъ вѣроятность группъ, для которыхъ дѣйствительность не совпадаетъ съ теоріей, ничтожна. Во всякомъ случаѣ выводъ, который дѣлаетъ изъ своихъ фактовъ Marbe по отношенію къ теоріи, совершенно ложенъ: ибо если какое-либо событіе не повторяется опредѣленное число разъ подърядъ въ дѣйствительномъ опытѣ, то это обстоятельство не имѣетъ никакого отношенія къ мыслимой равновозможности такого повторенія въ ряду всѣхъ возможныхъ сочетаній и, слѣдовательно, ко всѣмъ послѣдующимъ дедукціямъ изъ этого основнаго опредѣленія. Равнымъ образомъ, подобное непоявленіе нѣкоторыхъ теоретически возможныхъ сочетаній въ опытѣ не уничтожаетъ значенія теоріи для дѣйствительнаго опыта, такъ какъ, поскольку практика обращается къ теоріи вѣроятностей, ее интересуютъ только вѣроятности, имѣющія по своей величинѣ практическое значеніе. Указаніе Marbe могло бы имѣть значеніе только въ томъ случаѣ, если бы законъ случайныхъ ошибокъ выводился не изъ апріорнаго опредѣленія случайной ошибки, а обосновывался бы индуктивно на конкретныхъ случаяхъ исхода испытаній. О мѣрѣ совпаденія дѣйствительныхъ уклоненій съ теоретическими будетъ сказано ниже.

номъ случаѣ 0·5011; q=0·4989 и n=100; откуда

$$\sigma = \sqrt{100 \,.\, 0{\cdot}5011 \,.\, 0{\cdot}4989}$$

что составляетъ 4·999; среднее же квадратическое уклоненіе для той же средней 50·11 составило, какъ мы видѣли, 5·23 — обѣ величины хотя и не совпадаютъ, но близки къ 5.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ приведено вычисленіе теоретическихъ уклоненій какъ по δ, такъ и по σ, сравнительно съ дѣйствительными.

Дѣйствительныя уклоненія ±	Число случаевъ каждаго уклоненія на 100.	Соотвѣтствующее такой вѣроятности u.	Теоретическое уклоненіе вычисленное по	
			δ и. δ.	σ и. σ
0	9	0·1	0·5	0·5
1	25	0·3	1·6	1·5
2	40	0·5	2·7	2·6
3	50	0·7	3·7	3·5
4	63	0·9	4·7	4·5
5	70	1·0	5·2	5·
6	78	1·2	6·3	6·
7	85	1·4	7·5	7·1
8	91	1·7	8·9	8·5
9	93	1·8	9·4	9·0
10	95	2·0	10·5	10·0
11	97	2·2	11·5	11·0
12	98	2·3	12·0	11·5
13	99	2·5	13·1	12·5
14	„			
15	„			
16	100	3·0	15·7	15·0

Изъ этой таблицы видно, что и та, и другая мѣра уклоненія даютъ почти одинаковые результаты, хотя уклоненія, вычисленныя по σ, болѣе близки къ дѣйствительнымъ (за исключеніемъ трехъ послѣднихъ), чѣмъ вычисленныя по δ, а въ среднихъ членахъ ряда почти совпадаютъ съ дѣйствительными. Разница между δ и σ будетъ еще меньше, если для опредѣленія σ мы возьмемъ вмѣсто апо-

стеріорно найденнаго выраженія для p. а именно 0·5011, его апріорное извѣстное намъ значеніе $^1/_2$; въ такомъ случаѣ σ будетъ равно $\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 5$, тогда какъ $\delta = 5{\cdot}23$.

8. НОРМАЛЬНОЕ РАЗСѢЯНІЕ ПРИ СОСТАВНОЙ ВѢРОЯТНОСТИ. ПОДНОРМАЛЬНОЕ РАЗСѢЯНІЕ.

Приведенный примѣръ можетъ служить иллюстраціей простѣйшаго случая нормальнаго разсѣянія. Въ основѣ всего ряда испытаній лежитъ одна и та же неизмѣнная для каждаго сингулярнаго испытанія вѣроятность, опредѣляемая отношеніемъ числа бѣлыхъ и черныхъ шаровъ въ урнѣ и равная въ данномъ случаѣ $^1/_2$ (p); каждая группа тиражей представляетъ апостеріорное эмпирическое выраженіе этой вѣроятности, снабженное случайными уклоненіями $\left(\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n} \ldots \frac{m_s}{n}\right)$; средняя или общеотносительная $\left(p_0 = \frac{\Sigma m}{ns}\right)$ является наиболѣе вѣроятнымъ выраженіемъ истинной величины p. Въ виду условій опыта, δ (или $\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{s}}$) должно равняться σ (или $\sqrt{npq}$) и, какъ показываетъ примѣръ, дѣйствительно почти равняется.

Но возможенъ такой случай, когда вѣроятность, лежащая въ основѣ испытаній, мѣняется (или различна) отъ испытанія къ испытанію, или отъ группы испытаній къ группѣ. Вмѣсто одной урны съ неизмѣннымъ отношеніемъ бѣлыхъ шаровъ къ чернымъ, мы можемъ представить четыре урны съ различнымъ, для каждой урны неизмѣннымъ, отношеніемъ шаровъ; напр. урна A содержитъ бѣлые и черные шары въ отношеніи 1:2, урна B—2:3, урна C—3:4 и урна D—4:5, вѣроят-

ность выхода бѣлаго шара изъ каждой урны соотвѣтственно будетъ равна:

$$a = \frac{1}{3}, \; b = \frac{2}{5}, \; c = \frac{3}{7} \text{ и } d = \frac{4}{9}.$$

Пусть изъ каждой урны сдѣлано нѣкоторое число тиражей, и все число тиражей пусть равняется $100 = n$; сосчитавъ число появившихся бѣлыхъ шаровъ, равное m_1, мы получимъ относительное число $\frac{m_1}{n}$; такимъ же образомъ новые 100 тиражей дадутъ второе относительное число $\frac{m_2}{n}$ и т. д. Эти относительныя числа будутъ отличаться отъ частноотносительныхъ предыдущаго опыта тѣмъ, что не представляютъ собою выраженія одной единственной вѣроятности, но являются составнымъ результатомъ нѣсколькихъ простыхъ вѣроятностей; при этомъ они могутъ быть составлены изъ послѣднихъ двоякимъ образомъ. Во 1-хъ, для образованія каждаго такого относительнаго числа мы можемъ дѣлать тиражи изъ каждой урны всегда въ одной и той-же пропорціи; напримѣръ, можемъ брать всякій разъ равное число тиражей изъ каждой урны; въ такомъ случаѣ относительное число представляетъ собою среднiй результатъ опредѣленнаго постояннаго соотношенія отдѣльныхъ простыхъ вѣроятностей. Такого рода относительныя числа назовемъ среднеотносительными числами постояннаго состава. Во 2-хъ, самый выборъ урны мы можемъ предоставить случаю; въ такомъ случаѣ каждая относительная будетъ представлять собою результатъ двоякаго рода случайностей: случайнаго выбора урны и случайнаго исхода тиража изъ оказавшейся урны. При неизмѣнномъ числѣ урнъ въ теченіе всего ряда испытаній, для

каждой урны существуетъ опредѣленная вѣроятность ея выхода, неизмѣнная для каждаго сингулярнаго испытанія и для каждой серіи испытаній, въ результатѣ которой получается относительное число. Если число серій и число тиражей въ каждой серіи достаточно велики, то отношеніе числа выходовъ каждой урны къ числу всѣхъ случаевъ выхода урнъ въ серіи будетъ представлять собою выраженіе вѣроятности выхода данной урны съ тѣмъ или другимъ случайнымъ уклоненіемъ отъ истиннаго значенія. Относительныя, полученныя при такихъ условіяхъ опыта, мы будемъ называть среднеотносительными случайно-непостояннаго состава, или среднеотносительными въ собственномъ смыслѣ слова (сокращенно — просто среднеотносительными).

Если вѣроятность выхода бѣлаго шара изъ урны типа A, B, C . . . . обозначимъ черезъ a, b, c . . . . ; отношеніе числа урнъ A, B, C . . . . къ числу всѣхъ урнъ соотвѣтственно черезъ k, i, l . . . . , то въ предположеніи, что 1) для образованія относительной дѣлается по одному тиражу изъ каждой урны и 2) для полученія такого же числа тиражей выборъ урны при каждомъ испытаніи дѣлается случайно, мы получаемъ слѣдующее выраженіе для 1) ряда среднеотносительныхъ постояннаго состава и 2) среднеотносительныхъ въ собственномъ смыслѣ слова:

$$1): \frac{m_1}{n} = ka_1 + ib_1 + lc_1 + \ldots$$

$$\frac{m_2}{n} = ka_2 + ib_2 + lc_2 + \ldots$$

$$\frac{m_3}{n} = ka_3 + ib_3 + lc_3 + \ldots$$

. . . . . .

$$2): \frac{m_1}{n} = k_1 a_1 + i_1 b_1 + l_1 c_1 + \ldots$$

$$\frac{m_2}{n} = k_2 a_2 + i_2 b_2 + l_2 c_2 + \ldots$$

$$\frac{m_3}{n} = k_3 a_3 + i_3 b_3 + l_3 c_3 + \ldots$$

. . . . . .

Общеотносительная, выведенная изъ среднеотносительныхъ перваго типа имѣетъ также постоянный составъ; если среднюю изъ вѣроятностей a_1, a_2, a_3...; b_1, b_2, b_3..... и т. д. обозначимъ черезъ a_0, b_0.... то общеотносительная постояннаго состава можетъ быть выражена въ видѣ:

$$p = ka_0 + ib_0 + lc_0 + \ldots.$$

Общеотносительная же, выведенная изъ среднеотносительныхъ въ собственномъ смыслѣ слова, при аналогичномъ обозначеніи можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ:

$$p = k_0 a_0 + i_0 b_0 + l_0 c_0 + \ldots.$$

Теорема Bernoulli, утверждающая, что уклоненія отъ наиболѣе вѣроятной величины p на $\pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}}$ встрѣчаются съ вѣроятностью $F = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$, относится только къ тому случаю, когда въ основѣ каждаго сингулярнаго испытанія лежитъ одна и та же вѣроятность. Распространеніе этой теоремы на случай измѣняющейся (или различной) вѣроятности принадлежитъ Poisson'у.

Положенія Poisson'а могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

1) Если въ каждомъ изъ ν испытаній вѣроятность появленія событія Q составляетъ a, b, c..... n, то наиболѣе вѣроятное отношеніе числа появленій

событія къ числу всѣхъ испытаній или $\frac{\mu}{\nu}$ равняется средней ариѳметической изъ отдѣльныхъ вѣроятностей или

$$p = \frac{a + b + .. + n}{\nu}$$

или наиболѣе вѣроятное число случаевъ μ появленія событія при ν испытаніяхъ составляетъ

$$\mu = \nu p$$

2) При повтореніи ряда ν испытаній достаточное число разъ (s) относительныя числа, получающіяся въ результатѣ каждой серіи изъ ν испытаній образуютъ s относительныхъ чиселъ:

$$\frac{\mu_1}{\nu}, \frac{\mu_2}{\nu}, \ldots \frac{\mu_s}{\nu};$$

или s чиселъ случаевъ появленія событія въ каждой серіи:

$$\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_s.$$

Уклоненія этихъ чиселъ наиболѣе вѣроятнаго результата или νp подчинятся закону нормальной кривой

$$F_\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt.$$

т. е. уклоненія отъ наиболѣе вѣроятнаго результата νp на $\pm \gamma c$ встрѣчаются съ вѣроятностью F_γ, опредѣляемой вышеуказанной формулой.

3) Что же касается мѣры уклоненія — c, то она имѣетъ двоякій видъ, въ зависимости отъ условій опыта.

a) Если отдѣльныя вѣроятности — a, b, c..... принимаютъ участіе въ образованіи числа случаевъ появленія событія такимъ образомъ, что числа

сингулярныхъ испытаній, приходящихся на долю каждой отдѣльной вѣроятности, находятся въ постоянномъ и неизмѣнномъ отношеніи другъ къ другу для всѣхъ серій, (образуя такимъ образомъ среднеотносительныя постояннаго состава), то мѣра уклоненія выражается въ видѣ суммы квадратическихъ уклоненій каждой отдѣльной вѣроятности: если

$$\sigma_1^2 = \frac{a(1-a)}{\nu_1};\ \sigma^2 = \frac{b(1-b)}{\nu_2};\ \ldots$$

сумма испытаній каждой серіи

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n = \nu$$

и $\frac{\nu_1}{n} = k;\ \frac{\nu_2}{\nu} = i;\ \frac{\nu_3}{\nu} = l;\ \ldots$

то мѣра уклоненія среднеотносительныхъ

$$\frac{\mu_1}{\nu},\ \frac{\mu_2}{\nu},\ \frac{\mu_3}{\nu}\ \ldots\ldots$$

отъ ихъ наиболѣе вѣроятнаго значенія

$$p = ka + ib + lc + \ldots$$

имѣетъ выраженіе

$$\sigma = \sqrt{k^2\sigma_1^2 + i^2\sigma_2^2 + l^2\sigma_3^2 + \ldots}$$

которое можетъ быть представлено и въ такомъ видѣ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{ka(1-a) + ib(1-b) + lc(1-c) + \ldots}{\nu}}$$

(Теорема Poisson'a). Причемъ, если a, b, c . . . неизвѣстны a priori, то наиболѣе вѣроятнымъ значеніемъ каждой вѣроятности является среднеариѳметическое изъ тѣхъ значеній, какія эта вѣроятность получаетъ въ рядѣ серій; такъ, если рядъ среднеотносительныхъ имѣетъ слѣдующій составъ:

$$\frac{\mu_1}{\nu} = ka_1 + ib_1 + lc_1 + \ldots$$

$$\frac{\mu_2}{\nu} = ka_2 + ib_2 + lc_2 + \ldots$$

. . . . . .

$$\frac{\mu_s}{\nu} = ka_s + ib_s + lc_s + \ldots$$

то

$$a_0 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_s}{s}$$

$$b_0 = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_s}{s}$$

. . . . . .

и $p_0 = ka_0 + ib_0 + lc_0 + \ldots$.

соотвѣтственно и σ измѣняется въ σ_0.

Пусть, напримѣръ, урна A содержитъ 2 бѣлыхъ и 3 черныхъ шара, урна B—3 бѣлыхъ и 2 черныхъ и урна C—1 бѣлый и 4 черныхъ шара; пусть всякій разъ изъ первой урны дѣлается 200 тиражей, изъ второй—400, изъ третьей—600 тиражей. Въ такомъ случаѣ данныя a priori вѣроятности выхода бѣлаго шара изъ урны A, B, C равны:

$$a = \frac{2}{5}\ ;\ b = \frac{3}{5} \text{ и } c = \frac{1}{5}\ ,$$

участіе каждой вѣроятности въ образованіи среднеотносительной выразится въ видѣ

$$k = \frac{1}{6}\ ;\ i = \frac{2}{6} \text{ и } l = \frac{3}{6}\ ,$$

число же всѣхъ тиражей при

$$\nu_1 = 200;\ \nu_2 = 400;\ \nu_3 = 600$$

составитъ

$$\nu = 1200.$$

Наиболѣе вѣроятное отношеніе числа появленій бѣлаго шара къ числу испытаній составитъ:

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot = \frac{11}{30};$$

наиболѣе вѣроятное число появленій бѣлаго шара составитъ

$$\nu p = 1200 \cdot \frac{11}{30} = 440.$$

Мѣра уклоненія для среднеотносительной составитъ:

$$\sigma = \sqrt{\left\{ \left(\frac{200}{1200}\right)^2 \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}}{200} + \left(\frac{400}{1200}\right)^2 \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}}{400} + \left(\frac{600}{1200}\right)^2 \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{600} \right\}}$$

или:

$$\sigma = \sqrt{\left\{ \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{1200} \right\}}$$

и та же мѣра для наиболѣе вѣроятнаго числа появленій бѣлаго шара (νp) составитъ:

$$\sigma = \sqrt{1200 \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \right\}}$$

$$\text{или } \sigma = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 1200} = 15{\cdot}5;$$

уклоненіе на u. 15·5 отъ 440 будутъ встрѣчаться съ вѣроятностью F_u.

б) Число случаевъ появленія событія Q въ рядѣ ν испытаній можетъ опредѣляться слѣдующими условіями: существуетъ рядъ обстоятельствъ A, B, C...., изъ которыхъ каждое можетъ наступить въ каждомъ отдѣльномъ сингулярномъ испытаніи съ вѣроятностью k, i, l....; въ случаѣ наступленія обстоятельства A, вѣроятность появленія даннаго событія Q составляетъ a; въ случаѣ наступленія обстоятельства B, вѣроятность появленія даннаго событія Q составляетъ b; въ случаѣ наступленія C, вѣроятность появленія Q составляетъ c и т. д. Если при указанныхъ условіяхъ

имѣло мѣсто ν испытаній, давшихъ въ результатѣ μ_1 случаевъ появленія событія Q; ν испытаній, давшихъ μ_2 случаевъ появленія событія и т. д. до ν испытаній, давшихъ μ_s случаевъ появленія событія Q; то наиболѣе вѣроятный результатъ всѣхъ серій будетъ

$$p = ka + ib + lc + \ldots\ldots,$$

какъ и въ первомъ случаѣ; но мѣра уклоненія отдѣльныхъ среднеотносительныхъ

$$\frac{\mu_1}{\nu}, \frac{\mu_2}{\nu} \ldots\ldots \frac{\mu_s}{\nu}$$

отъ наиболѣе вѣроятнаго значенія выразится въ видѣ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{\nu}}$$

и для числа случаевъ появленій событія

$$\mu_1\ \mu_2 \ldots\ldots \mu_s$$

въ видѣ:

$$\sigma = \sqrt{\nu pq},$$

т. е. тождественно съ тѣмъ, какъ еслибы въ основѣ каждаго испытанія лежала единая вѣроятность, равная составной общеотносительной величинѣ p. (Это положеніе представляетъ собою распространеніе теоремы Bernoulli, составляющее т. н. законъ большихъ чиселъ Poisson'a).

Если вѣроятность a, b, c..... и вѣроятности ихъ наступленія k, i, l.... неизвѣстны a priori, то наиболѣе вѣроятнымъ ихъ значеніемъ являются среднеариѳметическія изъ значеній, какія получаютъ эти величины въ каждой отдѣльной серіи испытаній. Такъ, пусть

$$\frac{\mu_1}{\nu} = k_1 a_1 + i_1 b_1 + l_1 c_1 + \ldots.$$

$$\frac{y_2}{\nu} = k_2 a_2 + i_2 b_2 + l_2 c_2 + \ldots .$$

$$\frac{y_3}{\nu} = k_3 a_3 + i_3 b_3 + l_3 c_3 + \ldots .$$

. . . . . .

$$\frac{y_s}{\nu} = k_s a_s + i_s b_s + l_s c_s + \ldots .$$

то наиболѣе вѣроятными значеніями будутъ:

для a — $a_0 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_s}{s}$

„ b — $b_0 = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_s}{s}$

. . . . . .

для k — $k_0 = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_s}{s}$

„ i — $i_0 = \frac{i_1 + i_2 + \ldots + i_s}{s}$

. . . . . .

и для p — $p_0 = k_0 a_0 + i_0 b_0 + l_0 c_0 + \ldots .$

Если взять примѣръ, приведенный подъ a), то наиболѣе вѣроятный результатъ всѣхъ испытаній будетъ при новыхъ условіяхъ испытанія тотъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, т. е. $p = \frac{11}{30}$; но мѣра уклоненія составитъ $\sigma = \sqrt{1200 \frac{11}{30} \cdot \frac{19}{30}} = 16{\cdot}7$ вмѣсто прежней 15·5 [1]).

---

[1]) Различіе между средними вѣроятностями постояннаго состава (constant zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten) и средними вѣроятностями въ собственномъ смыслѣ слова (Durchschnittwarscheinlichkeiten im eig. S.) установлено проф. Bortkewitch'емъ въ Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, Jahrb. f. Nat. Oek. u. Stat., III F., 8 B., 1894, стр. 641 и сл., въ этой работѣ авторъ подробно останавливается на выясненіи содержанія закона большихъ чиселъ Poisson'a и случаяхъ, когда средняя квадратическая

Если для среднеотносительныхъ съ случайно-непостояннымъ составомъ мѣра уклоненія выражается въ видѣ $\sigma_0 = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{\nu}}$, т. е. такъ, какъ и въ томъ случаѣ, когда частноотносительныя являются выраженіемъ лишь одной вѣроятности, постоянной для каждаго сингулярнаго испытанія, то отсюда слѣдуетъ, что и здѣсь объ мѣры уклоненія—σ и δ

ошибка выражается въ составномъ и простомъ видѣ. Въ обстоятельномъ, по обыкновенію, и ясномъ изложеніи проф. Bortkewitch'a вызываетъ сомнѣніе примѣръ, приводимый имъ съ цѣлью показать, что задача Poisson'a подходитъ непосредственно подъ условія теоремы Bernoulli. Проф. Bortkewitch беретъ урну, въ которой a черныхъ, r красныхъ, b синихъ..... всего z шаровъ, и изъ нихъ соотвѣтственно α, β, γ.... всего τ массивныхъ. Вѣроятность вынуть массивный шаръ равняется τ/z; хотя она можетъ быть выражена въ составномъ видѣ,

$$\tau/z = \frac{a}{z} \cdot \frac{\alpha}{a} + \frac{r}{z} \cdot \frac{\rho}{r} + \ldots$$

но очевидно, что составной характеръ выраженія не оказываетъ въ этомъ случаѣ никакого вліянія на опредѣленіе вѣроятности. Далѣе (стр. 664) проф. Bortkewitch модифицируетъ опытъ, размѣщая шары каждаго цвѣта въ особой урнѣ; выходъ шара изъ первоначальной урны указывалъ бы теперь своимъ цвѣтомъ на то, изъ какой особой урны слѣдуетъ дѣлать тиражъ. Въ результатѣ ряда тиражей изъ урнъ, содержащихъ шары разнаго цвѣта, должно получиться опредѣленное отношеніе числа массивныхъ шаровъ къ общему числу вышедшихъ шаровъ. Могло бы возникнуть сомнѣніе, заключаетъ проф. Bortkewitch, возможно ли сказать что-либо относительно исхода этого опыта на основаніи теоремы Bernoulli, но случай какъ разъ подходитъ подъ условія примѣра Poisson'a и различіе между условіями этого опыта и предшествующаго являются только кажущимися (стр. 664). Дѣйствительно, разница между модифицированнымъ и первоначальнымъ опытомъ проф. Bortkewitch'a только кажущаяся, оба одинаково подходятъ подъ условія теоремы Bernoulli и составной характеръ вѣроятности не играетъ здѣсь никакой роли. Но модифицированный опытъ не подходитъ подъ условія примѣра Poisson'a. Распредѣленіе шаровъ разнаго цвѣта между отдѣльными урнами не измѣняетъ вѣроятности выхода массивнаго шара сравнительно съ тѣмъ случаемъ, когда всѣ шары смѣшаны въ одной урнѣ только потому, что вѣроятности выхода каждой отдѣльной урны пропорціональны числамъ шаровъ разнаго цвѣта, заключающихся въ первоначальной урнѣ. Между тѣмъ въ примѣрѣ Poisson'a такого ограниченія нѣтъ. Если же предположить, напримѣръ, что выходъ каждой урны равновозможенъ, то разница между опытомъ въ простомъ и модифицированномъ видѣ не будетъ только кажущейся.

совпадаютъ и мы получаемъ второй случай *нормальнаго разсѣянія*. Такимъ образомъ нормальное разсѣяніе имѣетъ мѣсто въ двухъ случаяхъ. Первый, простѣйшій, бываетъ тогда, когда въ основѣ каждаго сингулярнаго испытанія лежитъ одна и та же постоянная вѣроятность, и частноотносительныя, представляя собою соединеніе нѣкотораго числа такихъ сингулярныхъ испытаній, являются приближеннымъ выраженіемъ этой единой вѣроятности. Второй болѣе сложный случай имѣетъ мѣсто тогда, когда каждая частноотносительная перестаетъ быть выраженіемъ одной простой вѣроятности, неизмѣнной въ каждомъ сингулярномъ испытаніи, но получаетъ болѣе сложное строеніе: она является соединеніемъ сингулярныхъ испытаній, въ которыхъ дѣйствовало опредѣленное число различныхъ вѣроятностей; причемъ каждая изъ послѣднихъ обладаетъ опредѣленнымъ числомъ шансовъ проявить себя въ каждомъ сингулярномъ испытаніи; такимъ образомъ число сингулярныхъ испытаній, въ которыхъ наступило дѣйствіе той или другой вѣроятности, представляетъ собою, въ свою очередь, приближенное выраженіе опредѣленной вѣроятности; вслѣдствіе чего каждая относительная является приближеннымъ выраженіемъ какъ дѣйствующихъ вѣроятностей, такъ и вѣроятности ихъ дѣйствія; уклоненія же относительной являются результатомъ какъ случайныхъ колебаній образующихъ ее вѣроятностей, такъ и случайныхъ колебаній числа случаевъ дѣйствія каждой вѣроятности.

Второй болѣе сложный случай нормальнаго разсѣянія имѣетъ особенно важное значеніе въ статистикѣ. Здѣсь мы никогда не имѣемъ дѣла съ

одной постоянной вѣроятностью, неизмѣнно дѣйствующей въ рядѣ сингулярныхъ испытаній, какъ это бываетъ въ искусственномъ опытѣ съ тиражемъ шаровъ, игрой въ рулетку и т. п. Дѣйствительныя относительныя числа статистики представляютъ собою сложный результатъ дѣйствія многихъ факторовъ; задача изслѣдованія дѣйствительнаго относительнаго числа сводится поэтому прежде всего къ тому, чтобы уловить его сложный составъ и разбить на такія группы, которыя, по возможности, представляли бы собою выраженія отдѣльныхъ вѣроятностей въ опредѣленномъ численномъ отношеніи другъ къ другу. И если рядъ какихъ-либо дѣйствительныхъ относительныхъ величинъ обнаруживаетъ нормальное разсѣяніе, то весьма маловѣроятно допущеніе, что мы имѣемъ дѣло съ постоянной вѣроятностью; нормальное разсѣяніе можетъ быть приписано здѣсь лишь комплексу моментовъ, аналогичныхъ вѣроятностямъ и дѣйствующихъ въ болѣе или менѣе опредѣленномъ численномъ соотношеніи; причемъ какъ дѣйствіе вѣроятности, такъ и число случаевъ ея дѣйствія подвергаются случайнымъ колебаніямъ.

Примѣромъ нормальной дисперсіи составнаго общеотносительнаго числа могутъ служить относительныя числа рожденій мальчиковъ. На этихъ числахъ Lexis впервые примѣнилъ предложенный имъ методъ опредѣленія нормальной дисперсіи путемъ сравненія мѣръ уклоненій, полученныхъ двумя различными способами, какъ это изложено выше. Lexis взялъ цыфры рожденій мальчиковъ по отношенію къ рожденіямъ дѣвочекъ для округовъ Пруссіи за два года 1868—69 и получилъ такимъ образомъ 24 числа для каждаго округа, изъ которыхъ соста-

вилъ общеотносительную. Въ слѣдующемъ изслѣдованіи онъ взялъ аналогичныя цыфры за время 1870—72 гг. и получилъ для каждаго изъ 34 округовъ по 36 чиселъ рожденій мальчиковъ. Въ обоихъ случаяхъ онъ нашелъ отношеніе числа мужскихъ рожденій къ женскимъ равнымъ 1063 : 1000 или вѣроятность рожденія мальчика = 0·515. Опредѣливъ затѣмъ мѣру уклоненія по суммѣ квадратовъ дѣйствительныхъ уклоненій (δ) и по способу комбинацій всѣхъ возможныхъ уклоненій двухъ противоположныхъ вѣроятностей p и q или σ, онъ нашелъ, что обѣ мѣры почти совпадаютъ. Это видно изъ нижеслѣдующей таблицы, въ которой всѣ 34 округа раздѣлены на двѣ группы изъ 17 округовъ большихъ и 17 меньшихъ, и отдѣльные округи расположены въ порядкѣ средней мѣсячной цыфры рожденій. Подъ буквой C приведены среднія квадратическія уклоненія, вычисленныя по дѣйствительнымъ уклоненіямъ (δ) подъ Q— по способу комбинаціи уклоненій вѣроятности p (или σ). Причемъ мѣрой уклоненія Lexis беретъ не величины δ и σ, а обратныя имъ, или т. н. мѣру точности (h), которая находится въ слѣдующемъ отношеніи къ δ и σ

$$h = \frac{1}{\delta\sqrt{2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$$

такъ что бо́льшее среднее квадратическое уклоненіе даетъ меньшую мѣру точности и обратно. Мѣры уклоненія вычислены для абсолютныхъ чиселъ рожденій мальчиковъ на 1000 рожденій дѣвочекъ, благодаря чему мѣра точности h, вмѣсто выраженія $\sqrt{\frac{s}{2pq}}$ для величины p и числа случаевъ s, должна быть преобразована въ $\frac{(1-p)^2}{1000\sqrt{2pq}}\sqrt{g}$ для величины $z =$

$\frac{1000\,p}{1-p}$, гдѣ p—вѣроятность рожденія мальчика; величина же g представляетъ среднее число мѣсячныхъ рожденій каждаго округа [1]).

1-ая группа.	1870—1872		1868—1869	
	C	Q	C	Q
Ошпельнъ . . .	0·0 231	0·0 227	0·0 214	0·0 232
Бреславль . . .	230	222	205	230
Дюссельдорфъ . .	225	225	247	218
Позенъ	204	208	205	203
Кенигсбергъ . .	198	234	208	195
Франкфуртъ . .	191	164	185	189
Арнсбергъ . . .	186	208	177	180
Потсдамъ	184	150	176	183
Лигницъ	181	202	163	182
Маріенвердеръ . .	180	153	249	180
Мерзебургъ . . .	180	187	146	179
Шлезвигъ . . .	174	152	118	173
Магдебургъ . . .	173	138	174	171
Берлинъ	172	144	158	165
Гумбиненъ . . .	164	173	144	159
Кассель	162	158	189	164
Штеттинъ . . .	156	165	166	155
Въ среднемъ .	0·0 188	0·0 183	0·0 184	0·0 186
2-ая группа.				
Бромбергъ . . .	0·0 154	0·0 129	0·0 145	0·0 154
Кельнъ	148	159	149	146
Триръ	145	176	148	145
Висбаденъ . . .	144	108	108	143
Кеслинъ	143	139	119	143
Данцигъ	142	163	151	142
Кобленцъ . . .	136	114	131	137
Аахенъ	129	118	151	128
Минденъ	127	122	141	127
Оснаб. Аурихъ .	118	144	122	116
Эрфуртъ	116	147	142	117
Ганноверъ . . .	114	113	130	112
Гильдесгеймъ . .	113	120	114	115
Мюнстеръ . . .	112	107	092	111
Люнебургъ . . .	104	105	094	104
Штаде	099	077	093	099
Штральзундъ . .	084	084	096	086
Въ среднемъ .	0·0 125	0·0 125	0·0 125	0·0 125

Въ среднемъ мѣры уклоненія, вычисленныя по δ и по σ, почти совпадаютъ въ первой группѣ

---

[1]) W. Lexis, Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. Freiburg i. B. 1877; также Iahrb. f. Nat. Oek. u. Stat., B. 27, 1876, и Handw. d. Staatsw. 3 Aufl. B. 4 стр. 177 и сл.

и равны во второй. Распредѣленіе уклоненій въ обѣ стороны отъ средней почти совпадаетъ съ теоретическимъ, какъ видно изъ слѣдующихъ таблицъ:

для 1868—1869.

Уклоненія.	Дѣйствительное число.	По теоріи должно быть.
0 —19½	236	239
19½—59½	313	315
59½—99½	87	84
больше 99½	12	9

для 1870—1872.

	1-ая группа.		2-ая группа.	
Уклоненія.	Дѣйствительное число.	Должно быть по теоріи.	Дѣйствительное число.	Должно быть по теоріи.
0 —19½	224	242	163	155
19½—39½	195	190	159	150
39½—59½	114	110	106	118
59½—79½	50	48	83	81
79½—99½	16	16	44	50
больше 99½	13	5	57	48

Рѣзко выраженный характеръ нормальной дисперсіи приведеннаго примѣра свидѣтельствуетъ, что отдѣльныя частноотносительныя представляютъ собою случайныя уклоненія отъ нѣкоторой общей всѣмъ серіямъ наблюденій вѣроятности, наиболѣе вѣроятнымъ выраженіемъ которой мы должны считать общеотносительную, вычисленную на основаніи всей совокупности рожденій. Но эта правильность дисперсіи не разрѣшаетъ вопроса о характерѣ вѣроятности, лежащей въ основѣ совокупности наблюдаемыхъ явленій. Здѣсь возможны

два допущенія. Во-первыхъ, эту вѣроятность можно было бы считать простой, элементарной. Въ такомъ случаѣ вѣроятность рожденія ребенка мужскаго пола можно разсматривать по аналогіи съ тиражемъ шаровъ изъ урны съ опредѣленнымъ и неизмѣннымъ въ теченіе всего ряда опытовъ составомъ шаровъ. Можно было бы представить, что, хотя конкретный исходъ каждаго даннаго случая обусловливается сложнымъ стеченіемъ разнообразныхъ и многочисленныхъ условій, но во всемъ рядѣ случаевъ остается неизмѣнно постояннымъ какое-либо одно условіе (или одна и та же неизмѣнная совокупность нѣсколькихъ условій), съ численно опредѣленнымъ дѣйствіемъ. Такого рода допущеніемъ могла бы, напримѣръ, служить гипотеза, что въ женскомъ организмѣ заложены или вырабатываются зачатки для рожденій мужскихъ и женскихъ въ такомъ именно (или весьма близкомъ) численномъ соотношеніи, въ какомъ наблюдаются рожденія младенцевъ того и другого пола при большомъ числѣ наблюдаемыхъ случаевъ. Рожденіе мальчика или дѣвочки было бы аналогично выходу бѣлаго или чернаго шара изъ урны съ постояннымъ составомъ шаровъ того и другого цвѣта, и равнымъ образомъ и дисперсія отдѣльныхъ серій наблюденій должна была бы быть аналогична нормальной дисперсіи указаннаго опыта[1]).

Но элементарный характеръ вѣроятности не представляетъ собою единственно возможнаго объясненія нормальной дисперсіи Послѣдняя можетъ имѣть мѣсто и въ случаѣ составной вѣроятности. Поэтому, во-вторыхъ, мы можемъ сдѣлать допущеніе, что общеотносительное число рожденій

[1]) Ср. Lexis, op. cit. Typische Wahrscheinlichkeitsgrössen, стр. 73—74.

мальчиковъ представляетъ собою среднюю вѣроятность сложнаго состава. А именно, мы можемъ предположить, что существуетъ нѣсколько различныхъ вѣроятностей рожденія мальчика и каждая вѣроятность лежитъ въ основѣ опредѣленнаго числа случаевъ или опредѣленной группы рожденій; если при этомъ въ каждой отдѣльной серіи наблюденій какъ вѣроятности рожденій мальчика, такъ и вѣроятности группъ подвергаются случайнымъ уклоненіямъ, то общеотносительная должна обнаруживать нормальную дисперсію по отношенію къ частноотносительнымъ.

Вопросъ о томъ, какая изъ двухъ гипотезъ отвѣчаетъ дѣйствительности, можетъ быть рѣшенъ путемъ изслѣдованія состава относительныхъ чиселъ. Если мы имѣемъ дѣло съ элементарной постоянной вѣроятностью, то на какія бы группы мы ни разбивали общее число рожденій, каждая группа (разумѣется, при условіи достаточно большого числа наблюденій) должна давать приближенное выраженіе одной и той же вѣроятности рожденія мальчика, уклоняющееся отъ наиболѣе вѣроятнаго значенія или общеотносительной не болѣе, чѣмъ допускается въ крайнемъ случаѣ теоріей. Въ противномъ случаѣ отдѣльныя группы будутъ давать результаты, которые лишь съ незначительной вѣроятностью можно разсматривать, какъ случайныя уклоненія одной и той же основной величины; напротивъ, послѣдовательныя выраженія вѣроятности одной и той же группы въ разныхъ серіяхъ наблюденій должны представлять лишь случайныя уклоненія одной и той же вѣроятности.

Послѣднее и наблюдается въ дѣйствительно-

сти. Такъ, напримѣръ, вѣроятность рожденія ребенка мужескаго пола значительно отличается для живыхъ дѣтей и мертворожденныхъ; въ случаяхъ обыкновенныхъ рожденій и при родахъ многоплодныхъ; для рожденій въ различномъ абсолютномъ и относительномъ возрастѣ родителей; въ зависимости отъ продолжительности брака и т. д. Вмѣстѣ съ тѣмъ, вѣроятность для каждой отдѣльной группы представляетъ признаки нормальной дисперсіи. Такъ, напримѣръ, цыфры рожденій по австрійской статистикѣ за время съ 1866 по 1897 г.г. при распредѣленіи на группы живо — и мертворожденныхъ, и каждой, въ свою очередь, на рожденныхъ въ бракѣ и внѣ брака, обнаруживаютъ различныя вѣроятности съ нормальной дисперсіей для каждой отдѣльной группы [1]).

Вѣроятность рожденія мальчика въ отдѣльныхъ группахъ составляетъ:

Для живорожденныхъ	брачныхъ	(I)	0·515
	внѣбрачныхъ	(II)	0·514
мертворожденныхъ	брачныхъ	(III)	0·575
	внѣбрачныхъ	(IV)	0.540

Отношеніе мѣръ уклоненій, вычисленныхъ для каждой группы двумя различными способами, или δ/σ составляетъ

I	II	III	IV
1·46	1·45	1·17	1·16;

сравненіе дѣйствительнаго распредѣленія уклоненія съ теоретическимъ даетъ слѣдующіе результаты:

[1]) Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1903, стр. 325—327.

I			II			III			IV		
Уклоненія.	Ихъ число:		Уклоненія.	Ихъ число:		Уклоненія.	Ихъ число:		Уклоненія.	Ихъ число:	
	Теор.	Дѣйств.		Теор.	Дѣйств.		Теор.	Дѣйств.		Теор.	Дѣйств.
0·0002	5	7	0·001	12	13	0·002	10	9	0·001	3	2
4	12	12	2	21	20	4	20	24	5	14	14
6	17	14	3	27	26	6	26	27	10	24	24
8	20	18	4	30	30	8	30	31	15	29	30
10	24	24									
14	29	29									
18	31	32									

Отсюда явствуетъ, что нормальность разсѣянія общеотносительнаго числа рожденій мальчиковъ можетъ быть отнесена лишь къ болѣе сложному случаю нормальнаго разсѣянія и объясняется колебаніями различныхъ вѣроятностей рожденія мальчика въ отдѣльныхъ группахъ и случайными колебаніями въ численномъ отношеніи самихъ группъ.

Такимъ образомъ критеріемъ для распознанія элементарной (въ отличіе отъ составной) вѣроятности является то обстоятельство, какъ реагируетъ общеотносительная при распредѣленіи ея на частноотносительныя. На какія бы группы мы ни распредѣляли весь матеріалъ, служащій для полученія общеотносительной, въ каждой группѣ частноотносительная должна служить выраженіемъ той же вѣроятности, которая проявляется и въ общеотносительной. Этотъ результатъ вытекаетъ съ необходимостью изъ элементарнаго характера простой вѣроятности, которая всегда остается равной самой себѣ и ни на какія части далѣе не разлагается (вѣроятность съ окончательнымъ значеніемъ — definitive Bedeutung [1]). Тогда какъ для

[1]) См. Bortkewitsch, Kritische Betrachtungen etc. и Kries I. v. Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. Freiburg in B. 1886.

составной вѣроятности, при распредѣленіи на группы по различнымъ признакамъ, мы должны въ концѣ концовъ найти такое распредѣленіе, которое даетъ различныя отличающіяся другъ отъ друга вѣроятности. Вѣроятности, лежащія въ основѣ изслѣдованныхъ соціальныхъ и біологическихъ явленій человѣческой жизни (какъ отношеніе численности половъ при рожденіи), обнаруживаютъ составной характеръ, и мы до сихъ поръ не знаемъ вѣроятностей, относительно которыхъ мы могли бы доказать, что онѣ являются безспорно элементарными.

Что же касается другого случая среднихъ вѣроятностей, а именно случая среднеотносительныхъ постояннаго состава, то, согласно предыдущему, мѣра уклоненія здѣсь выражается въ видѣ:

$$\sigma_0^2 = \frac{k\, a_0(1-a_0) + i\, b_0(1-b_0) + \ldots}{\nu},$$

если a_0, b_0... представляютъ эмпирическое выраженіе отдѣльныхъ вѣроятностей, входящихъ въ составъ среднихъ частноотносительныхъ, k, i... постоянное отношеніе, въ которомъ отдѣльныя вѣроятности входятъ въ составъ частнаго среднеотносительнаго числа, и ν все число испытаній. Если такого рода среднеотносительныя числа представляются лишь случайно уклоняющимися отъ выведеннаго изъ нихъ общеотносительнаго, ихъ уклоненія должны подчиняться закону случайныхъ ошибокъ — F_n, съ мѣрой, равной среднеквадратическому уклоненію δ; или, иначе говоря, для среднеотносительныхъ, подчиняющихся закону случайныхъ уклоненій, должно существовать равенство между среднеквадратическимъ уклоненіемъ δ и уклоненіемъ σ сложнаго состава.

Если мы обозначимъ послѣднее черезъ σ_c, то

$$\delta = \sigma_c .$$

Но σ_c не равняется σ, вычисленному на основаніи вѣроятности, безъ принятія въ расчетъ ея сложнаго состава, т. е.

$$\sigma_0^2 = \frac{p_0 q_0}{\nu};$$

эта послѣдняя величина оказывается больше σ_c. Поэтому при сравненіи ея съ среднеквадратическимъ уклоненіемъ δ, мы получаемъ случай поднормальнаго разсѣянія, выражающійся въ томъ, что

$$\delta < \sigma.$$

Что мѣра σ, выведенная на основаніи общеотносительной, какъ простой вѣроятности, больше мѣры, соотвѣтствующей случаю составной вѣроятности постояннаго состава, явствуетъ изъ слѣдующаго.

Если отдѣльныя вѣроятности, входящія въ составъ среднеотносительныхъ, обозначимъ черезъ

$$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$$

число случаевъ дѣйствія каждой вѣроятности черезъ

$$n_1, n_2, n_3 \ldots\ldots\ldots,$$

сумму ихъ черезъ n и отношенія

$$\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_3}{n}, \ldots$$

черезъ

$$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

то общеотносительная представится въ видѣ вѣроятности сложнаго состава:

$$p = \frac{n_1}{n} p_1 + \frac{n_2}{n} p_2 + \frac{n_3}{n} p_3 + \ldots\ldots,$$

или

$$p = g_1 p_1 + g_2 p_2 + g_3 p_3 + \ldots\ldots$$

Мѣра уклоненія для p, въ предположеніи его простого состава, выразится въ видѣ

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

и съ принятіемъ во вниманіе сложнаго состава въ видѣ

$$\sigma_c = \sqrt{\left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \frac{p_1 q_1}{n_1} + \left(\frac{n_2}{n}\right)^2 \frac{p_2 q_2}{n_2} + \left(\frac{n_3}{n}\right)^2 \frac{p_3 q_3}{n_3} + \ldots\ldots}$$

или

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{g_1 p_1 q_1 + g_2 p_2 q_2 + g_3 p_3 q_3 + \ldots\ldots}{n}}.$$

Въ такомъ случаѣ

$$\sigma_c < \sigma.$$

Дѣйствительно, принимая во вниманіе, что

$$p_1 q_1 = pq + (p-q)(p-p_1) - (p-p_1)^2$$

представляетъ собою тождество, можно написать:

$$p_1 q_1 = pq + (p-q)(p-p_1) - (p-p_1)^2$$
$$p_2 q_2 = pq + (p-q)(p-p_2) - (p-p_2)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Помноживъ первое равенство на g_1, второе на g_2 и т. д., сложимъ всѣ равенства по частямъ. Въ первой части получимъ:

$$g_1 p_1 q_1 + g_2 p_2 q_2 + \ldots\ldots;$$

сумма же правыхъ частей равенства будетъ равна

$$pq(g_1 + g_2 + \ldots\ldots) + (p-q)[g_1(p-p_1) + g_2(p-p_2) + \ldots\ldots]$$
$$- [g_1(p-p_1)^2 + g_2(p-p_2)^2 + \ldots\ldots] \ldots \quad (\alpha)$$

Въ этомъ выраженіи:

$$g_1 + g_2 + \ldots\ldots = 1$$

и слѣдовательно

$$pq(g_1 + g_2 + \dots) = pq.$$

Далѣе

$$g_1(p-p_1) + g_2(p-p_2) + \dots = g_1 p + g_2 p + \dots$$
$$\dots - (g_1 p_1 + g_2 p_2 + \dots) \dots \qquad (\beta)$$

Принимая во вниманіе, что

$$p(g_1 + g_2 + \dots) = p = g_1 p_1 + g_2 p_2 + \dots$$

находимъ, что выраженіе (β) обращается въ нуль и выраженіе (α) приводится къ виду:

$$pq - [g_1(p-p_1)^2 + g_2(p-p_2)^2 + \dots],$$

а все равенство:

$$g_1 p_1 q_1 + g_2 p_2 q_2 + \dots = pq - [g_1(p-p_1)^2 + g_2(p-p_2)^2 + \dots].$$

Но такъ какъ

$$(p-p_1)^2, \ (p-p_2)^2, \dots$$

представляютъ собою величины положительныя, больше 0 (и только при $p = p_1 = p_2 = \dots$ обращаются въ 0), то $g_1 p_1 q_1 + g_2 p_2 q_2 + \dots < pq$ и

$$\sigma_c < \sigma \ ^1).$$

Для иллюстраціи поднормальной дисперсіи Westergaard (Grundzüge d. Th. d. Stat. 80) приводитъ слѣдующій примѣръ. На 500 самоубійцъ приходится 400 мужчинъ и 100 женщинъ Изъ первыхъ кончаютъ жизнь повѣшеніемъ $^4/_5$, изъ вторыхъ $^3/_5$. По аналогіи съ опытомъ тиража шаровъ, мы можемъ представить, что имѣются двѣ урны: вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ первой равняется $^4/_5$, изъ второй—$^3/_5$; изъ первой дѣлается 400 ти-

---

[1]) Bortkewitch, L. v., Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, Jahrb. f. Nat.-Ock. u. St. 1894, B. VIII, стр. 652—653.

ражей, изъ второй 100. При такихъ условіяхъ средняя вѣроятность или общеотносительная составитъ

$$\frac{400}{500} \cdot \frac{4}{5} + \frac{100}{500} \cdot \frac{3}{5} = \frac{19}{25} = p$$

или изъ 500 человѣкъ покончитъ жизнь повѣшеніемъ $500 \cdot \frac{19}{25} = 380$. Если бы вѣроятность p была простой, то мѣра случайныхъ колебаній числа 380 должна была бы равняться

$$\sigma = \sqrt{500 \cdot \frac{19}{25} \cdot \frac{6}{25}} = \sqrt{91{\cdot}2}$$

Но принимая во вниманіе составной характеръ общеотносительной p и допуская, что отношеніе числа самоубійцъ мужчинъ и женщинъ остается неизмѣннымъ и всегда равно 400 : 100, мы должны признать наличность условій для поднормальной дисперсіи, и сообразно съ этимъ мѣра уклоненія должна быть опредѣлена по формулѣ

$$\sigma_c = \sqrt{n_1 p_1 q_1 + n_2 p_2 q_2} \quad \text{или}$$

$$\sigma_c = \sqrt{400 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + 100 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{88}\,.$$

Указанный случай дѣйствительно могъ бы служить примѣромъ поднормальнаго разсѣянія лишь при условіи (какъ указываетъ проф. Bortkewitch l. c., стр. 675), если бы отношенія числа самоубійцъ—мужчинъ и самоубійцъ—женщинъ къ общему числу самоубійцъ представляли собою постоянные коэффиціенты, не мѣняющіеся отъ одной серіи наблюденій къ другой. Въ дѣйствительности этого нѣтъ, и указанныя отношенія представляютъ собою также вѣроятности, подвергающіяся случайнымъ колебаніямъ. Поэтому можно ожидать, что дѣйствительныя цыфры не обнаружатъ под-

нормальнаго разсѣянія, что и подтверждается на самомъ дѣлѣ.

Число самоубійцъ въ Даніи за время съ 1861 по 1886 годъ составляетъ 12 582, изъ нихъ 9 779 мужчинъ и 2 803 женщины, или

$$g_1 = \frac{9779}{12\,582} = 0{\cdot}777 \text{ и } g_2 = 0{\cdot}223.$$

Изъ общаго числа самоубійцъ повѣсившихся было 9 677, въ томъ числѣ мужчинъ 8 108 и женщинъ 1 569; или вѣроятность для мужчины—самоубійцы избрать указанный родъ смерти —p_1 и для женщины—самоубійцы —p_2 составляетъ:

$$p_1 = \frac{8\,108}{9\,779} = 0{\cdot}829$$

$$p_2 = \frac{1\,569}{2\,803} = 0{\cdot}560$$

Общая вѣроятность P составляетъ:

$$P = \frac{9\,677}{12\,582} = 0{\cdot}777\,.\,0{\cdot}829 + 0{\cdot}223\,.\,0{\cdot}560 = 0{\cdot}769.$$

Среднее число кончающихъ самоубійствомъ въ годъ составляетъ 484, изъ нихъ 376 мужчинъ и 108 женщинъ. Въ такомъ случаѣ мѣра уклоненія при нормальномъ разсѣяніи выразится въ видѣ

$$\sigma = \sqrt{484\,.\,0{\cdot}769\,.0{\cdot}231} = \sqrt{85{\cdot}9773} = 9{\cdot}27$$

и при поднормальномъ разсѣяніи:

$$\sigma_c = \sqrt{376\,.\,0{\cdot}829\,.0{\cdot}171 + 108\,.\,0{\cdot}56\,.0{\cdot}44} =$$
$$= \sqrt{79{\cdot}9126} = 8{\cdot}93.$$

Для опредѣленія мѣры уклоненія по суммѣ квадратовъ необходимо сравнить ежегодную дѣйствительную цыфру повѣсившихся съ теоретической цыфрой, вычисленной на основаніи общей вѣроятности для самоубійцъ избрать данный родъ смерти ($P = 0{\cdot}769$), и ежегодной цыфры само-

убійствъ. Соотвѣтствующая таблица приводится ниже:

Годъ.	Общее число самоубійствъ (a).	Число повѣсившихся (b).	Теоретически должно быть (c).	Уклоненія (x).
1861	484	364	372	— 8
1862	462	356	355	1
1863	458	334	352	—18
1864	411	306	316	—10
1865	451	351	347	4
1866	443	332	341	— 9
1867	469	348	361	—13
1868	498	388	383	5
1869	462	349	355	— 6
1870	486	388	374	14
1871	508	402	388	14
1872	464	357	357	0
1873	439	324	338	—14
1874	439	341	338	3
1875	394	312	303	9
1876	507	400	390	10
1877	530	402	408	— 6
1878	544	439	418	21
1879	505	383	388	— 5
1880	496	389	381	8
1881	494	404	380	24
1882	505	386	388	— 2
1883	513	412	394	18
1884	508	376	391	—15
1885	509	382	391	— 9
1886	606	452	466	—14

Простая сумма квадратовъ уклоненій (x), дѣленная на ихъ число, дастъ

$$\frac{\Sigma x^2}{n} = \frac{3\,566}{26} = 137{\cdot}1111\,,$$

если же принять во вниманіе вѣсъ различныхъ уклоненій (соотвѣтственно числамъ графы a), то

$$\frac{\Sigma px^2}{\Sigma p} = \frac{1\,769\,651}{12\,582} = 140{\cdot}65\,.$$

Среднеквадратическое уклоненіе въ первомъ и второмъ случаѣ составитъ

$$\delta = 11{\cdot}7 \text{ и } \delta = 11{\cdot}9.$$

Сравненіе дѣйствительныхъ уклоненій съ теоретическими даетъ слѣдующій результатъ:

Число случаевъ въ %	Предѣлы дѣйствительныхъ уклоненій.	Теоретическое уклоненіе (nδ).
8	1	1·2
15	3	2·2
27	5	4·0
42	8	6·5
54	9	8·5
62	10	10·3
81	14	15·2
92	18	20·5
96	21	24·6

Это сравненіе указываетъ, что меньшія уклоненія встрѣчаются рѣже, чѣмъ слѣдуетъ по теоріи, большія — чаще; иначе говоря, разсѣяніе не обладаетъ достаточною правильностью. Если же оно вообще можетъ быть признано правильнымъ, то мѣра уклоненія во всякомъ случаѣ близка къ 11·7 — 11·9; а такъ какъ мѣра уклоненія σ даетъ величину меньшую, то разсѣяніе скорѣе должно быть признано сверхнормальнымъ.

Вообще же найти случай поднормальнаго разсѣянія въ условіяхъ дѣйствительнаго наблюденія представляется, повидимому, если не невозможнымъ, то крайне затруднительнымъ. Для этого необходимы два условія, оба — трудно осуществимыя въ дѣйствительности: во-первыхъ, чтобы отношеніе числа случаевъ дѣйствія различныхъ вѣроятностей было постоянно, и, во-вторыхъ, чтобы вѣроятности, проявляющіяся въ послѣдовательныхъ серіяхъ наблюденій, оставались неизмѣн-

ными. Не говоря уже о трудности осуществленія перваго изъ указанныхъ условій, и второе нарушается тѣмъ, что вѣроятности, лежащія въ основѣ явленій человѣческой жизни, постепенно измѣняются какъ во времени, такъ и въ пространствѣ. Это послѣднее обстоятельство создаетъ третій типъ разсѣянія — разсѣяніе сверхнормальное.

9. СВЕРХНОРМАЛЬНОЕ РАЗСѢЯНІЕ.

Какъ въ случаѣ простой элементарной, такъ и въ случаѣ составной вѣроятности, нормальная дисперсія служитъ показателемъ того обстоятельства, что въ основѣ всей совокупности явленій лежитъ одна и та же постоянная вѣроятность — простая или составная; дисперсія создается либо случайными уклоненіями отъ элементарной вѣроятности при простой вѣроятности, либо случайными уклоненіями отдѣльныхъ частныхъ вѣроятностей и таковыми же уклоненіями численнаго соотношенія ихъ группъ при составной вѣроятности; въ первомъ случаѣ для всей совокупности явленій или опытовъ неизмѣнной остается элементарная вѣроятность, во второмъ случаѣ — средній составъ вѣроятности, въ неизмѣнномъ видѣ лежащій въ основѣ какъ каждой отдѣльной серіи, такъ и общеотносительной, выведенной изъ отдѣльныхъ серій. Но возможно представить и такой случай, когда нѣкоторая вѣроятность p получаетъ различныя выраженія (въ пространствѣ или времени) — p_1, p_2, p_3 . . . . . , и каждое изъ этихъ выраженій проявляется въ особой серіи съ случайными уклоненіями, а именно:

p_1 принимаетъ случайно уклоняющіяся значенія p_1', p_1'', p_1''' . . . .

p_2 — значенія p_2', p_2'', p_2''' . . . . и т. д.

Если величины p_1, p_2, p_3 . . . . представляютъ собою также случайныя уклоненія отъ общей вѣ-

роятности p, то уклоненія отдѣльныхъ вѣроятностей каждой особой серіи : p_1', p_2'' . . . . , p_2', p_2'' . . . и т. д. отъ этой общей основной вѣроятности p будутъ слагаться изъ двоякаго рода независимыхъ, но одинаково случайныхъ уклоненій: случайныхъ уклоненій частныхъ вѣроятностей каждой особой серіи отъ общеотносительной для данной серіи (промежуточной общеотносительной) и случайныхъ уклоненій промежуточныхъ относительныхъ отъ общей основной вѣроятности, находящей свое выраженіе въ общей общеотносительной, выведенной изъ промежуточныхъ общеотносительныхъ каждой серіи. Стеченіе двухъ источниковъ случайныхъ уклоненій даетъ въ результатѣ случайное уклоненіе послѣднихъ, конечныхъ частноотносительныхъ отъ общей общеотносительной, подчиняющееся общему закону случайныхъ уклоненій, т. е. уклоненія отъ общей средней на величину u. δ встрѣчаются съ вѣроятностью F_u. Но мѣра уклоненія δ будетъ больше, чѣмъ въ томъ случаѣ, если бы уклоненія происходили только отъ вѣроятности, неизмѣнной въ своей величинѣ для всей совокупности явленій, или σ. Иначе говоря, при указанныхъ условіяхъ будетъ имѣть мѣсто сверхнормальное разсѣяніе, внѣшнимъ выраженіемъ котораго является то, что

$$\delta > \sigma.$$

Соотвѣтственно двумъ источникамъ уклоненій, средняя мѣра уклоненія — въ данномъ случаѣ обозначимъ ее черезъ σ_c — состоитъ изъ двухъ частей: средней квадратической мѣры уклоненій общеотносительной p (или σ) и такой же мѣры

уклоненій промежуточныхъ относительныхъ отъ общеотносительной, или

$$\sigma_c = \sqrt{\left[\frac{pq}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{i=x}(p-p_i)^2}{z}\right]}\ ^{1})$$

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ, что имѣются ряды частноотносительныхъ

$$\frac{a_1}{n}\ \frac{a_2}{n}\ \frac{a_3}{n} \ldots\ \frac{a_i}{n} \ldots\ \frac{a_s}{n} \quad (a)$$

$$\frac{b_1}{n}\ \frac{b_2}{n}\ \frac{b_3}{n} \ldots\ \frac{b_i}{n} \ldots\ \frac{b_s}{n} \quad (b)$$

. . . . . .

$$\frac{m_1}{n}\ \frac{m_2}{n}\ \frac{m_3}{n} \ldots\ \frac{m_i}{n} \ldots\ \frac{m_s}{n} \quad (m)$$

. . . . . .

$$\frac{z_1}{n}\ \frac{z_2}{n}\ \frac{z_3}{n} \ldots\ \frac{z_i}{n} \ldots\ \frac{z_s}{n} \quad (z).$$

Рядъ (a) представляетъ снабженное случайными уклоненіями выраженіе вѣроятности p_1, рядъ (b)— вѣроятности p_2 и т. д. до ряда (z), въ основѣ котораго лежитъ вѣроятность p_z. Рядъ же вѣроятностей

$$p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_m \ldots p_z$$

представляетъ, въ свою очередь, уклоненія отъ общеотносительной p

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_z}{z}.$$

Уклоненія частноотносительныхъ

$$\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots \frac{m_i}{n}, \ldots \frac{m_s}{n}$$

---

[1]) См. W. Lexis, Ueber die Theorie der Stabilität statistischer Reihen, Jahrb. f. Nat. Oek. u. Stat., 1879, XXXII B., стр. 64—66 и сл.

отъ общеотносительной p выразится въ видѣ:

$$_m\varepsilon_1 = p - \frac{m_1}{n}\ ;\quad _m\varepsilon_2 = p - \frac{m_2}{n} \ldots .\ ;\quad _m\varepsilon_i = p - \frac{m_i}{n} \ldots \ldots$$

Сумма квадратовъ этихъ уклоненій составитъ:

$$_m\varepsilon_1^{\,2} + {}_m\varepsilon_i^{\,2} + \ldots + {}_m\varepsilon_i^{\,2} + \ldots + {}_m\varepsilon_s^{\,2} = \sum_{i=1}^{i=s} {}_m\varepsilon_i^{\,2} = \Sigma\, {}_m\varepsilon^2.$$

Такая же сумма квадратовъ уклоненій для ряда (a), (b) . . . составитъ:

$$_a\varepsilon_1^{\,2} + {}_a\varepsilon_2^{\,2} + \ldots\ {}_a\varepsilon_s^{\,2} = \sum_{i=1}^{i=s} {}_a\varepsilon_i^{\,2} = \Sigma\, {}_a\varepsilon^2$$

$$_b\varepsilon_1^{\,2} + {}_b\varepsilon_2^{\,2} + \ldots\ {}_b\varepsilon_s^{\,2} = \sum_{i=1}^{i=s} {}_b\varepsilon_i^{\,2} = \Sigma\, {}_b\varepsilon^2 .$$

. . . . . .

Сумма квадратовъ уклоненій частноотносительныхъ всего ряда серій составитъ.

$$\Sigma\, {}_a\varepsilon^2 + \Sigma\, {}_b\varepsilon^2 + \ldots + \Sigma\, {}_m\varepsilon^2 + \ldots + \Sigma\, {}_z\varepsilon^2 = \sum_{m=a}^{m=z} \Sigma\, {}_m\varepsilon^2 = \Sigma\, \varepsilon^2\ ;$$

число же уклоненій въ каждой серіи равно s и во всѣхъ z серіяхъ составитъ sz; поэтому среднее квадратическое уклоненіе всей совокупности частноотносительныхъ выразится въ видѣ

$$\Delta = \sqrt{\frac{\Sigma\, \varepsilon^2}{sz}},$$

гдѣ ε суммируется въ каждой серіи отъ 1 до s и во всѣхъ серіяхъ отъ a до z.

Для опредѣленія Δ возведемъ въ квадратъ уклоненіе $_m\varepsilon_i$:

$$_m\varepsilon_i^{\,2} = \left(p - \frac{m_i}{n}\right)^2 = p^2 - 2p\,\frac{m_i}{n} + \left(\frac{m_i}{n}\right)^2.$$

Сдѣлавъ тоже для всѣхъ $_m\varepsilon$, начиная отъ i=1 до i=s и суммируя, получимъ

$$\sum_{i=1}^{i=s} {}_m\varepsilon_i^{\,2} = sp^2 - 2p \sum_{i=1}^{i=s} \frac{m_i}{n} + \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{m_i}{n}\right)^2.$$

Аналогично для серіи (a):

$$\sum_{i=1}^{i=s} {}_a\varepsilon_i^2 = sp^2 - 2p \sum_{i=1}^{i=s} \frac{a_i}{n} + \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{a_i}{n}\right)^2$$

и т. д. для всѣхъ z серій. Суммируя всѣ выраженія, получимъ

$$\sum_{m=a}^{m=z} \sum_{i=1}^{i=s} {}_m\varepsilon_i^2 = szp^2 - 2p \sum_{m=a}^{m=z} \sum_{i=1}^{i=s} \frac{m_i}{n} + \sum_{m=a}^{m=z} \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{m_i}{n}\right)^2$$

или для упрощенія внѣшняго вида:

$$\Sigma\,\varepsilon^2 = szp^2 - 2p\,\Sigma\left(\frac{m}{n}\right) + \Sigma\left(\frac{m}{n}\right)^2 \ldots . \qquad (I).$$

Величину $\Sigma\left(\frac{m}{n}\right)$ опредѣлимъ изъ слѣдующаго тожества

$$\left(p_m - \frac{m_i}{n}\right)^2 = p_m^2 - 2p_m \frac{m_i}{n} + \left(\frac{m_i}{n}\right)^2$$

откуда

$$\left(\frac{m_i}{n}\right)^2 = \left(p_m - \frac{m_i}{n}\right)^2 + 2p_m \frac{m_i}{n} - p_m^2.$$

Подразумѣвая подъ i послѣдовательно 1, 2 . . . s и суммируя, получимъ для ряда (m)

$$\sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{m_i}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{i=s} \left(p_m - \frac{m_i}{n}\right)^2 + 2p_m \sum_{i=1}^{i=s} \frac{m_i}{n} - sp_m^2.$$

Въ этомъ выраженіи суммы можно замѣнить соотвѣтствующими имъ средними, а именно

$$\sum_{i=1}^{i=s} \left(p_m - \frac{m_i}{n}\right)^2 = \delta_m^2 s = s\,\frac{p_m q_m}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{i=s} \frac{m_i}{n} = sp_m\ ,$$

вслѣдствіе чего $\sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{m_i}{n}\right)^2$ для ряда (m) получитъ слѣдующее выраженіе

$$\sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{m_i}{n}\right)^2 = s\,\frac{p_m q_m}{n} + 2sp_m^2 - sp_m^2 = s\,\frac{p_m q_m}{n} + sp_m^2.$$

Аналогично для ряда (a)

$$\sum_{i=1}^{i=s}\left(\frac{a_i}{n}\right)^2 = s\frac{p_a q_a}{n} + sp_a^2$$

и т. д. Суммируя эти выраженія для всѣхъ серій отъ a до z, получимъ:

$$\sum_{m=a}^{m=z}\sum_{i=1}^{i=s}\left(\frac{m_i}{n}\right)^2 = s\sum_{m=a}^{m=z}\frac{p_m q_m}{n} + s\sum_{m=a}^{m=z}p_m^2.$$

Подставляя въ выраженіе (I):

$$\Sigma\varepsilon^2 = szp^2 - 2p\Sigma\left(\frac{m}{n}\right) + s\sum_{m=a}^{m=z}\frac{p_m q_m}{n} + s\sum_{m=a}^{m=z}p_m^2.$$

Въ этомъ выраженіи, въ свою очередь,

$$\Sigma\left(\frac{m}{n}\right) = \sum_{m=a}^{m=z}\sum_{i=1}^{i=s}\left(\frac{m_i}{n}\right) = \left(\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} + \ldots + \frac{a_s}{n}\right) + \left(\frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n} + \ldots + \frac{b_s}{n}\right) + \ldots.$$

можетъ быть замѣнена черезъ соотвѣтствующія среднія и получитъ выраженіе

$$\Sigma\left(\frac{m}{n}\right) = sp_a + sp_b + \ldots + sp_z = s\sum_{m=a}^{m=z}p_m = szp.$$

Послѣ чего

$$\Sigma\varepsilon^2 = szp^2 - 2p\,szp + s\sum_{m=a}^{m=z}\frac{p_m q_m}{n} + s\sum_{m=a}^{m=z}p_m^2$$

$$= s\sum_{m=a}^{m=z}\frac{p_m q_m}{n} + s\sum_{m=a}^{m=z}p_m^2 - szp^2$$

или послѣ сокращенія на s:

$$\frac{1}{s}\cdot\Sigma\varepsilon^2 = \sum_{m=a}^{m=z}\frac{p_m q_m}{n} + \sum_{m=a}^{m=z}p_m^2 - zp^2 \ldots\ldots \text{(II)}.$$

Опредѣлимъ $\Sigma\, p_m q_m$ изъ тожества:

$$p_m q_m = pq + (p-q)(p-p_m) - (p_m - p)^2;$$

суммируя эти тожества для $m = a, b, \ldots$ до z, получимъ:

$$\sum_{m=a}^{m=z} p_m q_m = zpq + (p-q)(p-p_a + p-p_b + \ldots + p-p_z) -$$

$$(p_a-p)^2-(p_b-p)^2-\ldots-(p_z-p)^2$$

$$= zpq + (p-q)\left(zp - \sum_{m=a}^{m=z} p_m\right) - \sum_{m=a}^{m=z} (p_m-p)^2.$$

Такъ какъ

$$\sum_{m=a}^{m=z} p_m = zp$$

то

$$\sum_{m=a}^{m=z} p_m q_m = zpq - \sum_{m=a}^{m=z} (p_m-p)^2 \ldots\ldots (\alpha).$$

Выраженіе $\sum_{m=a}^{m=z} p_m^2 - zp^2$ (въ формулѣ II) опредѣлимъ изъ тожества:

$$(p_m-p)^2 = p_m^2 - 2p_m p + p^2,$$

суммируя которое для всѣхъ значеній m отъ a до z, получимъ:

$$\sum_{m=a}^{m=z} (p_m-p)^2 = \sum_{m=a}^{m=z} p_m^2 - 2p \sum_{m=a}^{m=z} p_m + zp^2$$

и замѣняя $\sum_{m=a}^{m=z} p_m$ черезъ zp:

$$\sum_{m=a}^{m=z} (p_m-p)^2 = \sum_{m=a}^{m=z} p_m^2 - 2zp^2 + zp^2$$

$$= \sum_{m=a}^{m=z} p_m^2 - zp^2 \ldots\ldots \qquad (\beta).$$

Подставляя найденныя выраженія (α) и (β) въ выраженіе (II), получимъ:

$$\frac{1}{s}\cdot\Sigma\varepsilon^2=\frac{zpq}{n}-\sum_{m=a}^{m=z}\frac{(p_m-p)^2}{n}+\sum_{m=a}^{m=z}(p_m-p)^2$$

$$=\frac{zpq}{n}+\frac{n-1}{n}\sum_{m=a}^{m=z}(p_m-p)^2.$$

Принимая во вниманіе, что среднее квадратическое уклоненіе для общеотносительной равно $\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{sz}}$, послѣ раздѣленія полученнаго выраженія на z находимъ:

$$\Delta=\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{sz}}=\sqrt{\left\{\frac{pq}{n}+\frac{n-1}{n}\sum_{m=a}^{m=z}\frac{(p_m-p)^2}{z}\right\}}.$$

Въ найденномъ выраженіи $\frac{pq}{n}$ представляетъ среднюю квадратическую мѣру уклоненія для вѣроятности p въ предположеніи нормальной дисперсіи (σ^2), $\sum_{m=a}^{m=z}\frac{(p_m-p)^2}{z}$ — среднее квадратическое уклоненіе общеотносительной для промежуточныхъ относительныхъ (δ_μ^2), коэффиціентъ $\frac{n-1}{n}$ при достаточно большемъ n приближается къ 1, и все выраженіе можетъ быть представлено:

$$\Delta=\sigma_c=\sqrt{\sigma^2+\delta_\mu^2}.$$

(См. L. v. Bortkewitch, Das Gesetz der kleinen Zahlen, Leipzig, 1898, стр. 29—30; E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung etc. Leipzig, 1903 стр. 318—319).

Сверхнормальному разсѣянію соотвѣтствовала бы слѣдующая организація опыта съ тиражемъ шаровъ. Послѣ того, какъ изъ урны, содержащей опредѣленное число бѣлыхъ и черныхъ шаровъ, напримѣръ въ отношеніи 1 : 1, сдѣлано сто группъ

тиражей по 100 тиражей въ каждой и получены сто относительныхъ чиселъ, являющихся случайно уклоняющимися выраженіями лежащей въ основѣ опытовъ вѣроятности, пусть будетъ взято сто урнъ съ такимъ отношеніемъ числа бѣлыхъ и черныхъ шаровъ въ каждой, какое получилось въ каждомъ изъ ста послѣдовательныхъ относительныхъ чиселъ. Если изъ каждой урны, въ свою очередь, сдѣлать по 100 группъ тиражей въ 100 тиражей въ каждой группѣ, то для каждой урны мы получимъ сто случайно уклоняющихся выраженій свойственнаго ей численнаго отношенія бѣлыхъ и черныхъ шаровъ. Полученныя такимъ образомъ группы должны были бы обнаруживать сверхнормальное разсѣяніе по отношенію къ исходному, первоначальному относительному числу.

Для опытной иллюстраціи сверхнормальнаго разсѣянія воспользуемся слѣдующимъ примѣромъ. Сосчитавъ, сколько разъ встрѣчается буква «о» на 100 буквъ въ различныхъ русскихъ текстахъ, получимъ слѣдующій результатъ: [1])

---

[1]) Такой подсчетъ сдѣланъ въ текстахъ: Пушкина (Скупой рыцарь), Гоголя (Ревизоръ), Гончарова (въ Университетѣ), Тургенева (Воспоминанія), Короленко (Тѣни), въ Проблеммахъ идеализма, Очеркахъ реалистическаго міровоззрѣнія и Законахъ Гражданскихъ (т. X, ч. 1 изд. 1887 г.), причемъ для каждаго сочиненія счетъ начинался съ начала текста.

Для отдѣльныхъ текстовъ въ каждой сотнѣ буква „о" повторялась слѣдующее число разъ

Пушкинъ	6	6	7	8	10	10	10	11	12	13	въ среднемъ	9·3
Гоголь	7	8	8	8	8	9	10	14	15	16	„	10·3
Гончаровъ	3	6	7	8	8	10	10	10	11	13	„	8·6
Тургеневъ	7	9	9	11	12	12	14	14	15	18	„	12·1
Короленко	6	8	10	11	11	14	14	19	19	21	„	13·3
Проблеммы	8	10	10	11	12	12	13	13	14	15	„	11·8
Очерки	4	8	8	10	10	10	11	11	12	17	„	10·1
Законы Гр.	4	4	7	7	8	8	8	11	13	14	„	8·4

На 100 буквъ текста буква „о“ встрѣчалась разъ:	Вѣроятность буквы „о“ въ каждой сотнѣ:	Число сотенъ съ такой вѣроятностью:
3	0·03	1
4	0·04	3
6	0·06	4
7	0·07	6
8	0·08	14
9	0·09	3
10	0·10	13
11	0·11	9
12	0·12	6
13	0·13	5
14	0·14	7
15	0·15	3
16	0·16	1
17	0·17	1
18	0·18	1
19	0·19	2
21	0·21	1

Средняя вѣроятность (p) составляетъ 0·105; среднее уклоненіе

$$\sigma = \sqrt{0{\cdot}105 \,.0{\cdot}895 \,.0{\cdot}01} = 0{\cdot}0332.$$

Вычисливъ на основаніи этого уклоненія и таблицы F_u предѣлы уклоненій и соотвѣтствующую имъ теоретическую вѣроятность и сопоставивъ вычисленныя уклоненія съ ближайшими къ нимъ дѣйствительными уклоненіями и соотвѣтствующимъ числомъ случаевъ такихъ уклоненій, получимъ слѣдующій результатъ:

σ	u	p+z	p—z	Ближайшія къ нимъ дѣйствительныя величины: от	Ближайшія къ нимъ дѣйствительныя величины: до	F_u въ %	Должно быть случаевъ:	Дѣйствительно есть:
0·0332	0·3	0·095	0·115	0·10	0·11	24	19	22
	0·7	0·082	0·128	0·08	0·13	52	42	50
	1·15	0·067	0·143	0·07	0·14	75	60	63
	2·0	0·039	0·171	0·04	0·17	95	76	75
	2·5	0·012	0·188	0·01	0·19	99	79	79

Такимъ образомъ мы видимъ, что дѣйствительное распредѣленіе уклоненій приблизительно совпадаетъ съ теоретической вѣроятностью случайныхъ уклоненій. Отсюда мы можемъ сдѣлать заключеніе, что въ основѣ всѣхъ величинъ ряда лежитъ одна и та же вѣроятность p, приближенно выражаемая средней или общеотносительной 0·105. Этотъ выводъ подтверждается также и приблизительнымъ совпаденіемъ мѣры уклоненія, вычисленной на основаніи вѣроятности, съ вычисленной по способу квадратовъ. Вычисленіе δ даетъ слѣдующій результатъ:

Средняя.	Дѣйствительныя.	Уклоненія.	Ихъ квадраты.	Число уклоненій.
0·105	0·03	0·075	0.005625	1
	0·04	0·065	0·004225	3
	0·06	0·045	0·002025	4
	0·07	0·035	0·001225	6
	0·08	0·025	0·000625	14
	0·09	0·015	0·000225	3
	0·10	0·005	0·000025	13
	0·11	0·005	0·000025	9
	0·12	0·015	0·000225	6
	0·13	0·025	0·000625	5
	0·14	0·035	0·001225	7
	0·15	0·045	0·002025	3
	0·16	0·055	0·003025	1
	0·17	0·065	0·004225	1
	0·18	0·075	0·005625	1
	0·19	0·085	0·007225	2
	0·21	0·105	0·011025	1
	Сумма		0·101200	80

Откуда слѣдуетъ, что

$$\delta = \sqrt{\frac{0{\cdot}101\,200}{80}} = \sqrt{0{\cdot}00\,12\,65} = 0{\cdot}0356$$

и отношеніе

$$\frac{\delta}{\sigma} = \frac{0{\cdot}0356}{0{\cdot}0332} = 1{\cdot}07$$

т. е. близко къ 1.

Иной результатъ получится въ томъ случаѣ, если мы опредѣлимъ среднюю частоту буквы «о» въ текстахъ, взятыхъ изъ различныхъ языковъ [1]).

Въ такомъ случаѣ 200 группъ по 100 буквъ (восьми русскихъ, трехъ французскихъ, трехъ латинскихъ, трехъ нѣмецкихъ и трехъ греческихъ текстахъ) дадутъ слѣдующій общій результатъ:

---

[1]) Кромѣ указанныхъ уже русскихъ взяты слѣдующіе тексты: для *французскаго* языка: 1. Cournot Exposition de la théorie des chances etc.; 2. Liagre, Calkul des probabilités, 3) Renard, Poil de Carotte; для *латинскаго:* 1) Psalmi; 2) Conringius, Exercitatio (по Gabaglio, I, 47); 3) Nepos, Miltiades; для *нѣмецкаго:* 1) Goethe, Faust; 2) Hagen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3) B. Bawerk, Capital, II Abth. (2 изд.); для *греческаго:* 1) ψαλτήριον 2) басни Эзопа (по Черному, 1900, стр. 191) и 3) Плутархъ Зап. Нов. Ун. т. 73, 1898 г. стр. 164). Всякій текстъ взятъ, начиная съ начала.

На каждую сотню каждаго текста буква „о" повторялась слѣдующее число разъ:

	1.	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	въ среднемъ	5·1
Франц.	2.	2	3	5	8	8	9	9	10	12	12	„	7·8
	3.	5	5	6	6	7	7	7	8	8	9	„	6·8
	1.	5	5	6	6	6	7	7	8	8	10	„	6·8
Лат.	2.	2	3	4	4	5	5	6	7	8	8	„	5·2
	3.	3	4	4	4	5	5	5	6	7	7	„	5·0
	1.	1	1	1	1	2	2	2	2	3	5	„	2·0
Нѣм.	2.	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	„	2·6
	3.	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	„	2·5
	1.	9	10	10	12	13	14	15	15	16	19	„	13·3
Греческ.	2.	8	9	11	11	11	12	13	13	16	18	„	12·2
	3.	6	8	10	10	11	13	14	14	14	15	„	11·5

Общія среднія для каждаго языка даютъ:

p_1 (для русскаго) 10·5 (вѣсъ 8)
p_2 (франц.) 6·6 (вѣсъ 3)
p_3 (латинск.) 5·7 (вѣсъ 3)
p_4 (нѣмецкій) 2·4 (вѣсъ 3)
p_5 (греческій) 12·3 (вѣсъ 3)

Вѣроятность „0" въ каждой сотнѣ:	Число сотенъ.
0·00	1
0·01	9
0·02	10
0·03	11
0·04	13
0·05	16
0·06	14
0·07	16
0·08	24
0·09	8
0·10	19
0·11	13
0·12	10
0·13	9
0·14	11
0·15	6
0·16	3
0·17	1
0·18	2
0·19	3
0·21	1

Средняя или общеотносительная для всѣхъ группъ составитъ

$$p = \frac{16{\cdot}47}{200} = 0{\cdot}082$$

Средняя мѣра уклоненія, выведенная на основаніи этой вѣроятности,

$$\sigma = \sqrt{0{\cdot}082 . 0\,918 . 0{\cdot}01}$$
$$= \sqrt{0{\cdot}000\,752\,76} = 0\,0275$$

Если при помощи этой мѣры уклоненія и таблицы F_n мы вычислимъ теоретическія уклоненія и соотвѣтствующія имъ вѣроятности и сравнимъ ихъ съ ближайшими дѣйствительными уклоненіями и соотвѣтствующими имъ числами случаевъ, то получимъ слѣдующіе результаты:

σ	n	p+σ	p−σ	Ближайшія дѣйствительныя величины: от	Ближайшія дѣйствительныя величины: до	Число случаевъ: Теоретически вычисленное:	Число случаевъ: Дѣйствительное:
0·0275	. 0·3	0·074	0·090	0·07	0·09	48	48
„	0·7	0·063	0·101	0·06	0·10	104	83
„	1·15	0·050	0·114	0·05	0·11	150	112
„	2·0	0·027	0·137	0·03	0·14	190	166
„	2·5	0·014	0·151	0·01	0·15	198	191

Число дѣйствительныхъ случаевъ уклоненій отъ средней, лежащихъ въ извѣстныхъ предѣлахъ, значительно разнится отъ вычисленнаго теоретически: въ предѣлахъ данныхъ уклоненій въ дѣйствительности лежитъ меньше случаевъ, чѣмъ слѣдовало бы по теоріи. Этому несовпаденію отвѣчаетъ и несовпаденіе мѣры уклоненія, вычислен-

ной на основаніи вѣроятности и по способу квадратовъ. Вычисленіе послѣдней даетъ слѣдующій результатъ:

Средняя.	Дѣйствительныя.	Уклоненія.	Квадраты уклоненій.	Число уклоненій.
0·082	0·00	0·082	·0067	1
	0·01	0·072	·0052	9
	0·02	0·062	·0038	10
	0·03	0·052	·0027	11
	0·04	0·042	·0018	13
	0·05	0·032	·0010	16
	0·06	0·022	·0005	14
	0·07	0·012	·0001	16
	0·08	0·002	·0000	24
	0·09	0·008	·0001	8
	0·10	0·018	·0003	19
	0·11	0·028	·0008	13
	0·12	0·038	·0014	10
	0·13	0·048	·0023	9
	0·14	0·058	·0034	11
	0·15	0·068	·0046	6
	0·16	0·078	·0061	3
	0·17	0·088	·0077	1
	0·18	0·098	·0096	2
	0·19	0·108	·0117	3
	0·21	0·128	·0164	1
	Сумма		0·3841	200

Откуда

$$\delta = \sqrt{\frac{0{\cdot}3841}{200}} = \sqrt{0{\cdot}00\,19\,20} = 0.044$$

и отношеніе

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{0{\cdot}044}{0{\cdot}027} = 1{\cdot}6,$$

т. е. уклоняется отъ 1 гораздо больше, чѣмъ для p, вычисленнаго на основаніи только русскихъ текстовъ.

Это обстоятельство даетъ намъ основаніе допустить, что мы имѣемъ дѣло не съ простой и неизмѣнной вѣроятностью, если только вообще

имѣемъ дѣло съ одной вѣроятностью для всего ряда. Сдѣлаемъ предположеніе, что въ основѣ ряда лежитъ вѣроятность, случайно мѣняющаяся для отдѣльныхъ частей ряда, и вычислимъ мѣру уклоненій въ этомъ предположеніи. Въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть общеотносительную (которую теперь обозначимъ черезъ p_c), по-прежнему,

$$p_c = 0{\cdot}082;$$

рядъ промежуточныхъ общеотносительныхъ:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0{\cdot}105 \text{ съ вѣсомъ} = 8 \\ p_2 &= 0{\cdot}066 \quad „ \quad „ = 3 \\ p_3 &= 0{\cdot}057 \quad „ \quad „ = 3 \\ p_4 &= 0{\cdot}023 \quad „ \quad „ = 3 \\ p_5 &= 0{\cdot}123 \quad „ \quad „ = 3 \end{aligned}$$

и среднюю мѣру уклоненія по формулѣ

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{pq}{n} + \frac{\Sigma (p-p_i)^2}{z}}$$

или

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{0{\cdot}082 \,.\, 0{\cdot}918}{100} + \frac{8\,.0{\cdot}023^2 + 3\,.0{\cdot}016^2 + 3\,.0{\cdot}025^2 + 3\,.0{\cdot}058^2 + 3\,.0{\cdot}041^2}{8+3+3+3+3}}$$

$$= \sqrt{0{\cdot}000\,753 + \frac{0{\cdot}022\,010}{20}} =$$

$$= \sqrt{0{\cdot}000\,753 + 0{\cdot}001\,100} = \sqrt{0{\cdot}00\,18\,53} = 0{\cdot}043$$

Полученная средняя мѣра уклоненія совпадаетъ съ среднимъ квадратическимъ уклоненіемъ

$$\delta = 0{\cdot}044$$

и отношеніе между ними

$$\frac{0{\cdot}044}{0{\cdot}043} = 1.$$

Распредѣленіе дѣйствительныхъ уклоненій, вычисленное на основаніи σ_c отвѣчаетъ теоретической вѣроятности случайныхъ уклоненій, какъ видно изъ слѣдующей таблицы:

$\sigma_c \cdot \mu$	Предѣлы уклоненій		Число случаевъ.	
	отъ	до	Теоретически вычисленное:	Дѣйствительное:
0·043.03	0·07	0·09	48	48
0·7	0·05	0·11	104	112
1·15	0·03	0·13	150	155
2·0	0·00	0·17	190	196
2·5	0·00	0·19	198	199

Откуда мы можемъ заключить, что данныя въ нашемъ рядѣ частноотносительныя числа представляютъ собою случайныя уклоненія отъ промежуточныхъ среднихъ, которыя въ свою очередь являются случайными уклоненіями отъ одной общей общеотносительной.

Приведенный опытъ вычисленія, какъ часто встрѣчается буква «о» на сотню буквъ въ текстахъ различныхъ языковъ, можетъ служить какъ для иллюстраціи сверхнормальнаго разсѣянія, такъ и поднормальнаго. Представимъ, что каждый языкъ представляетъ собою особую урну съ опредѣленнымъ отношеніемъ бѣлыхъ шаровъ ко всѣмъ вообще шарамъ: русскій языкъ — урну u_r, французскій — u_f, латинскій — u_l, нѣмецкій u_g и греческій — u_h.

Изъ урны u_r дѣлаемъ сто тиражей (текстъ Короленко), изъ коихъ 10 даютъ букву «о»; слѣдующіе 100 тиражей даютъ 19 разъ «о» и т. д.; такимъ образомъ получимъ 10 группъ по 100 тиражей и въ каждой буква «о» окажется слѣдующее число разъ: 10, 19, 21, 8, 14, 14, 19, 11, 6, 11. Та-

кое же количество группъ и тиражей сдѣлаемъ изъ u_r, взявъ послѣдовательно два другихъ текста («Очерки» и Тургеневъ). Всего получимъ 30 группъ по 100 тиражей въ каждой. То же повторимъ для u_f, для u_l, u_g и u_h. Полученные результаты приведены въ слѣдующей таблицѣ:

На сто тиражей буква «о» появилась:

U_r :	$u_{r,1}$	10	19	21	8	14	14	19	11	6	11
	$u_{r,2}$	8	10	12	17	11	8	11	10	4	10
	$u_{r,3}$	15	12	14	9	11	12	14	9	18	7
U_f :	$u_{f,1}$	6	9	5	8	6	7	5	8	7	7
	$u_{f,2}$	9	5	8	9	2	10	12	12	3	8
	$u_{f,3}$	7	3	6	6	5	5	3	4	7	5
U_l :	$u_{l,1}$	6	8	7	4	3	8	5	5	2	4
	$u_{l,2}$	10	5	7	6	8	6	8	5	6	7
	$u_{l,3}$	5	6	5	4	4	4	7	3	7	5
U_g :	$u_{g,1}$	2	5	4	3	4	3	2	1	1	0
	$u_{g,2}$	1	3	1	2	1	5	1	2	2	2
	$u_{g,3}$	1	1	3	1	4	3	2	4	2	5
U_h :	$u_{h,1}$	11	16	11	11	9	8	18	13	13	12
	$u_{h,2}$	12	10	19	13	15	15	9	14	10	16
	$u_{h,3}$	15	13	6	14	14	8	10	11	14	10

Вѣроятность появленія буквы «о» на основаніи первыхъ пяти сотенъ тиражей изъ урны U_r равняется

$$(10+19+21+8+14) : 5\times100=0{\cdot}144$$

и на основаніи послѣдующихъ пяти сотенъ равняется соотвѣтственно 0·122, 0·116, 0·086 и т. д. Или на сто буквъ буква «о» встрѣчается соотвѣтственно: 14·4, 12·2, 11·6, 8·6 и т. д. разъ.

На основаніи же всѣхъ вообще тиражей вѣ-

роятный составъ урнъ опредѣлится слѣдующимъ образомъ:

для U_r $\frac{355}{30} = 11{\cdot}83$ буквъ «о» на 100 буквъ текста

„ U_f $\frac{197}{30} = 6{\cdot}57$ „ „ „ „

„ U_l $\frac{170}{30} = 5{\cdot}67$ „ „ „ „

„ U_g $\frac{71}{30} = 2{\cdot}37$ „ „ „ „

„ U_h $\frac{370}{30} = 12{\cdot}33$ „ „ „ „

Ходъ вычисленій явствуетъ изъ слѣдующей таблицы:

U_r :	$Pr_{,1}$	= 72	: 500 или на 100	14·4	U_l :	$Pl_{,1}$ = 28	: 500 или на 100	5·6
	$Pr_{,2}$	= 61	„ „	12·2		$Pl_{,2}$ = 24	„ „	4·8
	$Pr_{,3}$	= 58	„ „	11·6		$Pl_{,3}$ = 36	„ „	7·2
	$Pr_{,4}$	= 43	„ „	8·6		$Pl_{,4}$ = 32	„ „	6·4
	$Pr_{,5}$	= 61	„ „	12·2		$Pl_{,5}$ = 24	„ „	4·8
	$Pr_{,6}$	= 60	„ „	12·0		$Pl_{,6}$ = 26	„ „	5·2
$p_r = \frac{355}{6.500}$; $100p_r = 11{\cdot}83$					$p_l = \frac{170}{6.500}$; $100p_l = 5{\cdot}67$			

U_f :	$Pf_{,1}$	= 34	: 500 или на 100	6·8	U_g :	$Pg_{,1}$ = 18	: 500 или на 100	3·6
	$Pf_{,2}$	= 34	„ „	6·8		$Pg_{,2}$ = 7	„ „	1·4
	$Pf_{,3}$	= 33	„ „	6·6		$Pg_{,3}$ = 8	„ „	1·6
	$Pf_{,4}$	= 45	„ „	9·0		$Pg_{,4}$ = 12	„ „	2·4
	$Pf_{,5}$	= 27	„ „	5·4		$Pg_{,5}$ = 10	„ „	2·0
	$Pf_{,6}$	= 24	„ „	4·8		$Pg_{,6}$ = 16	„ „	3·2
$p_f = \frac{197}{6.500}$; $100p_f = 6{\cdot}57$					$p_g = \frac{71}{6.500}$; $100p_g = 2{\cdot}37$			

U_h :	$Ph_{,1}$	= 58	: 500 или на 100	11·6
	$Ph_{,2}$	= 64	„ „	12·8
	$Ph_{,3}$	= 69	„ „	13·8
	$Ph_{,4}$	= 64	„ „	12·8
	$Ph_{,5}$	= 62	„ „	12·4
	$Ph_{,6}$	= 53	„ „	10·6

$p_h = \frac{370}{6.500}$; $100p_h = 12{\cdot}33.$

Расположивъ группы по возрастающей величинѣ, опредѣливъ среднюю, уклоненія каждой

группы отъ средней (x) и квадраты уклоненій, получимъ слѣдующую таблицу:

p	x	x^2
1·4	6·35	40·32
1·6	6·15	37·82
2·0	5·75	33·06
2·4	5·35	28·62
3·2	4·55	20·70
3·6	4·15	17·22
4·8	2·95	8·70
4·8	2·95	8·70
4·8	2·95	8·70
5·2	2·55	6·50
5·4	2·35	5·52
5·6	2·15	4·62
6·4	1·35	1·82
6·6	1·15	1·32
6·8	0·95	0·90
6·8	0·95	0·90
7·2	0·55	0·30
8·6	0·85	0·72
9·0	1·25	1·56
10·6	2·85	8·12
11·6	3·85	14·82
11·6	3·85	14·82
12·0	4·25	18·06
12·2	4.45	19·80
12·2	4·45	19·80
12·4	4·65	21·62
12·8	5·05	25·50
12·8	5·05	25·50
13·8	6·05	36·60
14·4	6·65	44·22

Средняя M $(=100p) = 7{\cdot}75$

$$\Sigma x^2 = 476{\cdot}93$$

$$\delta = \sqrt{15{\cdot}898} = 3{\cdot}99$$

или приблизительно $\delta = 4$.

Принимая $p = 0{\cdot}077$; $q = 0{\cdot}923$ и $n = 100$, получимъ мѣру уклоненія для простого p

$$\sigma = \sqrt{100 \,.\, 0{\cdot}077 \,.0{\cdot}923} = \sqrt{7{\cdot}11} = 2{\cdot}7.$$

Принимая же во вниманіе сложный составъ p, получимъ мѣру уклоненія

$$\sigma_c = \sqrt{7{\cdot}11 + \frac{(7{\cdot}75-11{\cdot}83)^2 + (7{\cdot}75-6{\cdot}57)^2 + (7{\cdot}75-5{\cdot}67)^2 + (7{\cdot}75-2{\cdot}37)^2 + (7{\cdot}75-12{\cdot}33)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{7{\cdot}11 + \frac{4{\cdot}08^2 + 1{\cdot}18^2 + 2{\cdot}08^2 + 5{\cdot}38^2 + 4{\cdot}58^2}{5}}$$

$$= \sqrt{7{\cdot}11 + \frac{72{\cdot}29}{5}} = \sqrt{7{\cdot}11 + 14{\cdot}46}$$

$$= \sqrt{21{\cdot}57} = 4{\cdot}6.$$

Такимъ образомъ мѣры уклоненія δ и σ_c хотя и неравны, но отличаются другъ отъ друга гораздо меньше, чѣмъ δ и σ, а именно

$$\frac{\sigma_c}{\delta} = 1{\cdot}1 \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\sigma} = 1{\cdot}5\,;$$

и распредѣленіе отдѣльныхъ уклоненій по δ и σ_c болѣе согласуется съ теоретическимъ, чѣмъ распредѣленіе по σ; послѣднее совершенно не соотвѣтствуетъ теоретическому.

При этомъ

$$\delta > \sigma$$

$$\sigma_c > \sigma$$

т. е. мы имѣемъ случай сверхнормальнаго разсѣянія.

При u=	Уклоненія по:			Въ предѣлахъ уклоненій число случаевъ.			
				Должно быть	Въ дѣйствительности есть по:		
	δ	σ_c	σ		δ	σ_c	σ
0·3	1·2	1·38	0·81	7	6	7	1
0·7	2·8	3·22	1·89	16	11	14	7
1·0	4·0	4·60	2·70	20	16	21	10
1·1	4·4	5·06	2·97	22	20	24	14
1·3	5·2	5·98	3·51	24	24	26	14
1·4	5·6	6·44	3·78	25	25	29	14
1·5	6·0	6·90	4·05	26	27	30	16
2·0	8·0	9·20	5·72	28	30	30	25

Общеотносительная $p = 0{\cdot}0775$ можетъ быть однако получена и другимъ путемъ, а именно: можно взять сто первыхъ тиражей изъ урны u_f, сто первыхъ тиражей изъ u_f, тоже изъ u_l, u_g и u_h и опредѣлить среднюю. Также составить среднюю изъ слѣдующей сотни тиражей для всѣхъ урнъ и т. д. Получится такимъ образомъ тридцать относительныхъ величинъ; въ составъ каждой изъ нихъ будетъ входить пять частноотносительныхъ; каждая изъ этихъ частноотносительныхъ является

случайно уклоняющимся выраженіемъ состава соотвѣтствующей урны; причемъ частноотносительныя, соотвѣтствующія отдѣльнымъ урнамъ, берутся, для образованія изъ нихъ каждый разъ (промежуточной) относительной, всегда въ одномъ и томъ же пропорціональномъ другъ къ другу отношеніи, а именно всякій разъ по одной частноотносительной для каждой урны. Способъ образованія (промежуточныхъ) относительныхъ изъ частноотносительныхъ соотвѣтствуетъ такимъ образомъ условіямъ полученія относительныхъ величинъ постояннаго состава. Средняя изъ тридцати (промежуточныхъ) относительныхъ даетъ общеотносительную также постояннаго состава. Поэтому отдѣльныя относительныя (промежуточныя) должны обладать по отношенію къ общеотносительной поднормальнымъ разсѣяніемъ.

Отличіе этого примѣра отъ предыдущаго сводится къ тому, что промежуточныя относительныя здѣсь получаются путемъ суммированія въ вертикальномъ направленіи, тогда какъ въ предыдущемъ случаѣ онѣ получались путемъ суммированія по горизонтальнымъ строкамъ. Такимъ образомъ получается тридцать слѣдующихъ частноотносительныхъ, выраженныхъ въ видѣ абсолютныхъ чиселъ на 100:

Урны:	u_r	u_f	u_l	u_g	u_h		p
№ столбцевъ:	1	2	3	4	5	6	7
	(10 + 6 + 6 + 2 + 11) : 5 =					35 : 5 =	7·0
	8	9	10	1	12	40	8·0
	15	7	5	1	15	43	8·6
	19	9	8	5	16	57	11·4
	10	5	5	3	10	33	6·6
	12	3	6	1	13	35	7·0
	21	5	7	4	11	48	9·6
	12	8	7	1	19	47	9·4
	14	6	5	3	6	34	6·8
	8	8	4	3	11	34	6·8
	17	9	6	2	13	47	9·4
	9	6	4	1	14	34	6·8
	14	6	3	4	9	36	7·2
	11	2	8	1	15	37	7·4
	11	5	4	4	14	38	7·6
	14	7	8	3	8	40	8·0
	8	10	6	5	15	44	8·8
	12	5	4	3	8	32	6·4
	19	5	5	2	18	49	9·8
	11	12	8	1	9	41	8·2
	14	3	7	2	10	36	7·2
	11	8	5	1	13	38	7·6
	10	12	5	2	14	43	8·6
	9	4	3	4	11	31	6·2
	6	7	2	1	13	29	5·8
	4	3	6	2	10	25	5·0
	18	7	7	2	14	48	9·6
	11	7	4	0	12	34	6·8
	10	8	7	2	16	43	8·6
	7	5	5	5	10	32	6·4

Складывая цыфры 7-го столбца и дѣля сумму на 30, получимъ общеотносительную для всей совокупности тиражей

$$np = \frac{232{\cdot}6}{30} = 7{\cdot}75 \text{ или } p = 0{\cdot}0775.$$

Сумма цыфръ 1-го столбца, дѣленная на 30, даетъ средній составъ урны u_r, опредѣленный на основаніи всего тиража изъ этой урны, или

$$np_r = \frac{355}{30} = 11{\cdot}83 \text{ или } p_r = 0{\cdot}118.$$

Такимъ же образомъ для второго, 3-го, 4-го, 5-го столбцовъ соотвѣтственно получимъ:

$$np_l = \frac{197}{30} = 6{\cdot}57 \text{ или } p_f = 0{\cdot}066$$

$$np_l = \frac{170}{30} = 5{\cdot}67 \text{ или } p_l = 0{\cdot}057$$

$$np_g = \frac{71}{30} = 2{\cdot}37 \text{ или } p_g = 0{\cdot}024$$

$$np_h = \frac{370}{30} = 12{\cdot}33 \text{ или } p_h = 0{\cdot}123.$$

Общеотносительная или средняя изъ приведенныхъ цыфръ даетъ ту же величину

$$np = \frac{355 + 197 + 170 + 71 + 370}{30{\cdot}5} = \frac{232{\cdot}6}{30} = 7{\cdot}75.$$

Расположивъ цыфры 7-го столбца въ возрастающемъ порядкѣ, опредѣливъ уклоненіе каждой отъ общей средней и квадратъ каждаго уклоненія, получимъ:

p	x	x	x^2
5·0	2·75	2·7	7·29
5·8	1·95	1·9	3·61
6·2	1·55	1·5	2·25
6·4	1·35	1·3	1·69
6·4	1·35	1·3	1·69
6·6	1·15	1·1	1·21
6·8	0·95	0·9	0·81
6·8	0·95	0·9	0·81
6·8	0·95	0·9	0·81
6·8	0·95	0·9	0·81
7·0	0·75	0·7	0·49
7·0	0·75	0·7	0·49
7·2	0·55	0·5	0·25
7·2	0·55	0·5	0·25
7·4	0·35	0·3	0·09
7·6	0·15	0·1	0·01
7·6	0·15	0·1	0·01
8·0	0·25	0·2	0·04
8·0	0·25	0·2	0·04
8·2	0·45	0.4	0·16
8·6	0·85	0·8	0·64
8·6	0·85	0·8	0·64
8·6	0·85	0·8	0·64
8·8	1·05	1·0	1·00
9·4	1·65	1·6	2·56
9·4	1·65	1·6	2·56
9·6	1·85	1·8	3·24
9·6	1·85	1·8	3·24
9·8	2·05	2·0	4·00
11·4	3·65	3·6	12·96

Средняя M (= 100 p) = 7·75

$$\Sigma x^2 = 54{\cdot}3$$

$$\delta = \sqrt{\frac{54{\cdot}3}{30}} = \sqrt{1{\cdot}81} = 1{\cdot}3.$$

Средняя мѣра уклоненія въ предположеніи простого $p = 0{\cdot}077$ равняется

$$\sigma = 2{\cdot}7,$$

и слѣдовательно

$$\delta < \sigma,$$

что указываетъ на возможность поднормальной дисперсіи. Принимая во вниманіе, что p представляетъ въ данномъ случаѣ среднюю вѣроятность постояннаго состава или p_c, опредѣлимъ

соотвѣтствующую мѣру уклоненія σ_c. Мѣры уклоненія p_r, p_f, p_l, p_g, p_h будутъ равны

$$\sigma_r = \sqrt{100.0{\cdot}118.0{\cdot}882} = \sqrt{10{\cdot}41}$$

$$\sigma_f = \sqrt{100.0{\cdot}066.0{\cdot}934} = \sqrt{6{\cdot}16}$$

$$\sigma_l = \sqrt{100.0{\cdot}057.0{\cdot}943} = \sqrt{5{\cdot}37}$$

$$\sigma_g = \sqrt{100.0{\cdot}024.0{\cdot}976} = \sqrt{2{\cdot}34}$$

$$\sigma_h = \sqrt{100.0\,123.0{\cdot}877} = \sqrt{10{\cdot}79}$$

и

$$\sigma_c = \sqrt{\left(\tfrac{1}{5}\right)^2 10{\cdot}41 + \left(\tfrac{1}{5}\right)^2 6{\cdot}16 + \left(\tfrac{1}{5}\right)^2 5{\cdot}37 + \left(\tfrac{1}{5}\right)^2 2{\cdot}34 + \left(\tfrac{1}{5}\right)^2 10{\cdot}79}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{25}\cdot 35{\cdot}07} = \sqrt{1{\cdot}4} = 1{\cdot}2$$

Такимъ образомъ σ_c почти совпадаетъ съ δ и также меньше σ.

Распредѣленіе отдѣльныхъ уклоненій по δ (и тоже по σ_c) близко подходитъ къ теоретическому, тогда какъ распредѣленіе по σ совершенно уклоняется отъ теоретическаго.

При $n=$	Уклоненіе по δ	Въ этихъ предѣлахъ уклоненій	
		Должно быть:	Въ дѣйствительности есть:
0·3	0·4	7	6
0·7	0·9	16	17
1·0	1·3	20	21
1·1	1·4	22	21
1·3	1·7	24	24
1·4	1·8	25	26
1·5	1·9	26	27
2·0	2·6	28	28

Характеръ разсѣянія опредѣляется отношеніемъ двухъ мѣръ уклоненій δ и σ. Отношеніе δ/σ, обозначаемое черезъ Q, представляетъ собою коэффиціентъ расхожденія мѣръ уклоненій. Въ зависимости отъ значенія этого коэффиціента, а именно

$$Q = \frac{\delta}{\sigma} \gtreqless 1,$$

мы имѣемъ въ первомъ случаѣ ($Q < 1$) поднормальное разсѣяніе, во второмъ ($Q = 1$) нормальное и въ третьемъ ($Q > 1$) сверхнормальное разсѣяніе.

Необходимо замѣтить, что въ случаѣ сверхнормальнаго разсѣянія величина отношенія расхожденія или Q обусловливается не только величиною суммы квадратовъ уклоненій отдѣльныхъ относительныхъ отъ общеотносительной ($\Sigma(p_i - p)^2$), но находится въ зависимости и отъ того, какое число случаевъ берется для образованія частноотносительнаго числа, т. е. находится въ зависимости отъ величины n. Мѣра уклоненія при сверхнормальномъ разсѣяніи выражается въ видѣ

$$\delta = \sigma_e = \sqrt{\frac{pq}{n} + \frac{n-1}{n} \Sigma \frac{(p_i - p)^2}{z}};$$

раздѣливъ это выраженіе на $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$, получимъ

$$Q = \frac{\delta}{\sigma} = \sqrt{\left| \frac{\frac{pq}{n} + \frac{n-1}{n} \Sigma \frac{(p_i - p)^2}{z}}{\frac{pq}{n}} \right|}$$

$$= \sqrt{1 + (n-1) \Sigma \frac{(p_i - p)^2}{z} \cdot \frac{1}{pq}}.$$

Изъ послѣдняго выраженія усматривается, что Q возрастаетъ и убываетъ съ возрастаніемъ и убываніемъ n или числа случаевъ, изъ которыхъ составлена группа, образующая частноотноситель-

ное число. Такъ, если мы все число случаевъ одинъ разъ раздѣлимъ на группы по 100 000 случаевъ въ каждой и другой разъ тѣ же случаи разобьемъ на меньшія группы по 100 случаевъ въ каждой, то при всѣхъ прочихъ равныхъ условіяхъ коэффиціентъ расхожденія въ первомъ случаѣ будетъ больше, чѣмъ во второмъ. Полагая, напримѣръ, при $n = 100\,000$, $\Sigma \frac{(p_i - p)^2}{z} \cdot \frac{1}{pq} = c$ и $Q = 2$, для $n = 100$ получимъ Q равнымъ всего 1·0015 [1]).

То же самое будетъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, если вмѣсто мѣры уклоненій для вѣроятности p взять мѣру уклоненій для абсолютныхъ чиселъ наступленія событій или np. Въ такомъ случаѣ мѣра уклоненія

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

и

$$\delta = \sigma_c = \sqrt{npq + \frac{n-1}{n} \frac{\Sigma(np_i - np)^2}{z}},$$

коффиціентъ же расхожденія представится въ видѣ

$$Q = \frac{\delta}{\sigma} = \sqrt{1 + (n-1)\frac{\Sigma (p_i - p)^2}{z} \cdot \frac{1}{pq}},$$

т. е. тожественно съ предыдущимъ случаемъ. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ съ частотою повторенія буквы «о» коэффиціентъ расхожденія составляетъ

$$Q = \sqrt{1 + \frac{0{\cdot}0408^2 + 0{\cdot}0118^2 + 0{\cdot}0208^2 + 0{\cdot}0538^2 + 0{\cdot}0458^2}{5.\,0{\cdot}0775.0{\cdot}9225}\, n}$$

(если вмѣсто n−1 взять для упрощенія вычисленій n) или

$$Q = \sqrt{1 + 0{\cdot}0202\, n}.$$

---

[1]) Bortkewitsch, Dr. L. von, Das Gesetz der kleinen Zahlen 1898, стр. 31.

Если взять группы изъ 100 буквъ и на основаніи вычисленныхъ для нихъ мѣръ уклоненій δ и σ опредѣлить коэффиціентъ Q, то, полагая въ приведенномъ выраженіи $n = 100$, получимъ

$$Q = \sqrt{1 + 2{\cdot}02} = \sqrt{3{\cdot}02} = 1{\cdot}7,$$

что совпадаетъ съ ранѣе указаннымъ отношеніемъ

$$\frac{\delta}{\sigma} = \frac{4{\cdot}6}{2{\cdot}7} = 1{\cdot}7.$$

Но взявъ группы изъ 500 буквъ, мы получили бы

$$Q = \sqrt{1 + 0{\cdot}0202.500} = \sqrt{11{\cdot}10} = 3{\cdot}3.$$

Поэтому, чѣмъ меньшія группы мы беремъ, тѣмъ болѣе приближается коэффиціентъ расхожденія къ величинѣ, характеризующей нормальное разсѣяніе, иначе говоря, малыя абсолютныя числа явленій какого-либо рода болѣе приближаются къ условіямъ нормальной дисперсіи, чѣмъ тѣ же явленія при изслѣдованіи ихъ въ большихъ группахъ. Указанное свойство малыхъ сравнительно чиселъ проф. Bortkewitch называетъ закономъ малыхъ чиселъ [1]).

Въ мѣрѣ уклоненія

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{pq}{n} + \frac{n-1}{n}\frac{\Sigma(p_i - p)^2}{z}}$$

первый членъ $\frac{pq}{n}$ выражаетъ случайныя уклоненія основной вѣроятности, имѣющія характеръ нормальнаго разсѣянія; второй членъ

$$\frac{\Sigma\,(p_i - p)^2}{z}$$

представляетъ добавочныя уклоненія промежуточ-

[1]) O. c. стр. 36; ср. Czuber E., Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1903, стр. 320.

ныхъ относительныхъ каждой серіи. Чѣмъ менѣе отличаются эти промежуточныя общеотносительныя отъ общей общеотносительной, т. е. чѣмъ постояннѣе основная общая вѣроятность, тѣмъ болѣе величина всего уклоненія опредѣляется первымъ членомъ, и тѣмъ болѣе разсѣяніе приближается къ типу нормальнаго. Чѣмъ болѣе измѣняется общая основная вѣроятность отъ серіи къ серіи, тѣмъ болѣе получаетъ преобладанія второй членъ выраженія и тѣмъ болѣе уклоняется разсѣяніе отъ нормальнаго и получаетъ характеръ сверхнормальнаго. Напротивъ, для абсолютныхъ чиселъ мѣра уклоненія

$$\sigma_c = \sqrt{\left\{ npq + \frac{\Sigma (p_i - p)^2}{z} \right\}}$$

съ возрастающимъ n опредѣляется преобладающимъ значеніемъ первой части выраженія. Но на коэффиціентъ расхожденія и въ томъ, и въ другомъ случаѣ возрастаніе n оказываетъ, какъ было показано, одинаковое вліяніе.

Способъ опредѣлять характеръ разсѣянія посредствомъ сравненія двухъ мѣръ уклоненій, вычисляемыхъ двумя разными способами, предложенъ Lexis'омъ. Способъ вычисленія мѣръ уклоненій по суммѣ квадратовъ уклоненій отдѣльныхъ величинъ, дающій въ результатѣ величину δ, Lexis называетъ «физикальнымъ», способъ же вычисленія на основаніи вѣроятности, дающій въ результатѣ σ, онъ называетъ «комбинаторнымъ». Изъ доказательства равенства обѣихъ мѣръ для случая нормальной дисперсіи явствуетъ, что и комбинаторный методъ также состоитъ въ вычисленіи суммы квадратовъ уклоненій, съ тою однако разницею, что при комбинаторномъ способѣ опредѣляются квадраты укло-

неній всѣхъ возможныхъ элементарныхъ исходовъ для группы въ n испытаній отъ наиболѣе вѣроятнаго исхода, тогда какъ при физикальномъ способѣ вычисляются суммы квадратовъ уклоненій средней не отъ единичныхъ, элементарныхъ исходовъ, а отъ нѣкоторой данной совокупности наблюдаемыхъ случаевъ. Это обстоятельство даетъ возможность перенести два способа вычисленія мѣры уклоненія и на абсолютныя числа.

Пусть будетъ $n\lambda$ измѣреній, дающихъ результаты

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_{n\lambda}$$

и среднюю

$$X = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n\lambda}}{n\lambda};$$

сумма квадратовъ уклоненій составитъ

$$(a_1-X)^2+(a_2-X)^2+\ldots+(a_{n\lambda}-X)^2 = S.$$

Мѣра уклоненія средней X составитъ $\sqrt{\frac{s}{n\lambda}} = D_0$.

Если изъ $n\lambda$ измѣреній образовано λ группъ, и для каждой опредѣлена средняя, рядъ которыхъ составитъ

$$X_1\ X_2\ \ldots\ X_\lambda,$$

то средняя изъ нихъ даетъ ту же величину X, а именно:

$$X = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_\lambda}{\lambda}.$$

Сумма квадратовъ уклоненій средней X отъ промежуточныхъ среднихъ составитъ

$$(X_1-X)^2+(X_2-X)^2+\ldots+(X_\lambda-X)^2=\Sigma.$$

Въ такомъ случаѣ мѣра уклоненія той же средней можетъ быть выражена въ видѣ

$$\sqrt{\frac{\Sigma}{\lambda}} = D.$$

Въ зависимости отъ того, какъ составлены промежуточныя среднія $X_1\ X_2 \ldots X_\lambda$ изъ элементарныхъ величинъ $a_1\ a_2 \ldots a_{n\lambda}$, обѣ мѣры уклоненій могутъ совпадать или не совпадать и ихъ отношеніе

$$D \gtreqless D_0$$

можетъ служить критеріемъ поднормальнаго, нормальнаго или сверхнормальнаго разсѣянія [1]).

Ряды, не подходящіе ни подъ одинъ изъ указанныхъ случаевъ разсѣянія, могутъ быть, въ свою очередь, сведены къ нѣсколькимъ типамъ:

1) ряды величинъ возрастающихъ или убывающихъ болѣе или менѣе правильно (развивающіеся—эволюторные ряды, по терминологіи Lexis'a);

2) ряды, въ которыхъ послѣдовательные члены возрастаютъ и убываютъ волнообразно; при этомъ такое возрастаніе и убываніе можетъ происходить черезъ промежутки болѣе или менѣе правильные—ряды періодическіе, или безъ всякой правильности—ряды осцилирующіе (Lexis);

3) ряды, въ которыхъ колебанія сдерживаются въ границахъ болѣе узкихъ, чѣмъ это допускается случаемъ—ряды связанные

4) и, наконецъ, ряды совершенно неправильные [2]).

---

[1]) Bortkewitsch, L. v., Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, Jahrb. f. N. Oek. u. St., III F., 10 B., стр. 342.

[2]) Lexis, Zur Theorie der Massenerscheinungen, 1877, стр. 33; Abhandlungen zur Theorie der Bev. u. Mor. Stat. 1903, стр. 170.

10. МѢРА УКЛОНЕНІЯ ДЛЯ ПРОСТѢЙШИХЪ ФУНКЦІЙ НАБЛЮДАЕМЫХЪ ВЕЛИЧИНЪ.

Въ предыдущемъ изложеніи приходилось переходить отъ мѣры уклоненія, данной для вѣроятности, къ мѣрѣ уклоненія для абсолютнаго числа случаевъ повторенія событія, или отъ мѣры уклоненія, данной для отдѣльныхъ величинъ, къ мѣрѣ уклоненія средней изъ этихъ величинъ. Вообще, если какая-либо величина представляетъ собою функцію другой или другихъ, то мѣра уклоненія ея находится въ извѣстномъ соотношеніи съ мѣрою уклоненія этихъ послѣднихъ. Простѣйшіе случаи такой зависимости состоятъ въ слѣдующемъ.

1) Если для нѣкоторой истинной величины a наиболѣе вѣроятное значеніе составляетъ a_0 съ мѣрою уклоненія, равной δ, то для другой величины, представляющей собою произведеніе данной на нѣкоторое постоянное число k, или для $A=ka$, наиболѣе вѣроятнымъ значеніемъ будетъ ka_0 и мѣрой уклоненія—$k\delta$. Такъ напримѣръ, если повторное измѣреніе $\frac{1}{10}$ части неизвѣстной линіи даетъ среднюю ариѳметическую a_0 и среднеквадратическое уклоненіе δ, то наиболѣе вѣроятное выраженіе длины линіи составитъ $10\times a_0$ съ мѣрою уклоненія $= 10\times\delta$. При этомъ постоянная k можетъ быть какъ цѣлымъ числомъ, такъ и дробью. На этомъ основаніи, если мѣра уклоненія для вѣ-

роятности p, опредѣленной на основаніи s испытаній, выражается въ видѣ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{s}},$$

то мѣра уклоненія для числа случаевъ повторенія событія при s испытаніяхъ, или для sp выразится въ видѣ:

$$\sigma = s\sqrt{\frac{pq}{s}} = \sqrt{spq},$$

и обратно.

2) Иначе будетъ въ томъ случаѣ, если неизвѣстной длины линію раздѣлимъ на k частей и каждую часть измѣримъ въ отдѣльности достаточное число разъ. Если для каждой части наиболѣе вѣроятное значеніе составляетъ

$$a_0,\ b_0,\ c_0 \ldots .$$

и мѣры уклоненія соотвѣтственно равняются

$$\delta_a,\ \delta_b,\ \delta_c \ldots ,$$

то наиболѣе вѣроятное значеніе всей линіи будетъ выражаться въ видѣ

$$a_0 + b_0 + \ldots ,$$

мѣра же уклоненія составитъ:

$$\sqrt{\delta_a^{\,2} + \delta_b^{\,2} + \ldots\ldots} .$$

Иначе говоря, если для истинной величины a наиболѣе вѣроятное значеніе a_0 съ уклоненіемъ δ_a и для истинной величины b наиболѣе вѣроятное значеніе b_0, съ мѣрой уклоненія δ_b, то для истинной величины M, которая является суммой a и b, наиболѣе вѣроятнымъ значеніемъ будетъ a_0+b_0, мѣра же уклоненія выразится въ видѣ

$$\sqrt{\delta_a^{\,2} + \delta_b^{\,2}} .$$

Дѣйствительно, пусть рядъ измѣреній или наблюденій нѣкоторой величины a дастъ рядъ значеній

$$a_1,\ a_2 \ldots\ldots$$

и рядъ измѣреній величины b —

$$b_1,\ b_2 \ldots\ldots;$$

положимъ, что уклоненія каждой величины перваго ряда отъ истиннаго значенія составляютъ

$$x_1,\ x_2 \ldots\ldots$$

и для второго ряда

$$z_1,\ z_2 \ldots\ldots$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\begin{aligned} a &= a_1 + x_1 & b &= b_1 + z_1 \\ a &= a_2 + x_2 & b &= b_2 + z_2 \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\ a &= a_n + x_n & b &= b_s + z_s . \end{aligned}$$

Если мы сложимъ первое, второе и т. д. равенство столбца (a) съ каждымъ изъ равенствъ второго столбца (b), то получимъ ns равенствъ:

$$\begin{aligned} a + b &= a_1 + b_1 + x_1 + z_1 \\ a + b &= a_1 + b_2 + x_1 + z_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a + b &= a_1 + b_s + x_1 + z_s \\ \\ a + b &= a_2 + b_1 + x_2 + z_1 \\ a + b &= a_2 + b_2 + x_2 + z_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a + b &= a_2 + b_s + x_2 + z_s \\ \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$a + b = a_n + b_1 + x_n + z_1$$
$$a + b = a_n + b_2 + x_n + z_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a + b = a_n + b_s + x_n + z_s .$$

Въ этихъ равенствахъ $a + b$ представляетъ истинную величину M, суммы типа $a_i + b_k$ (при $i = 1, 2 \ldots n$ и $k = 1, 2 \ldots s$) — всевозможныя сочетанія результатовъ наблюденія, которые обозначимъ черезъ

$$m_1 \; m_2 \ldots . \; m_{ns}$$

и $x_i + z_k$ всевозможныя уклоненія результатовъ наблюденія отъ величины M, которыя обозначимъ черезъ

$$y_1, \; y_2 \ldots . \; y_{ns} .$$

Въ такомъ случаѣ полученный результатъ можемъ написать въ видѣ:

$$M = m_1 + y_1$$
$$M = m_2 + y_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$M = m_{ns} + y_{ns}$$

Наиболѣе вѣроятное значеніе M выразится въ видѣ:

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_{ns}}{ns}$$

что составитъ

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} + \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_s}{s}$$

или

$$a_0 + b_0;$$

среднее же квадратическое уклоненіе будетъ равно

$$D = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{ns}^2}{ns}}.$$

Для опредѣленія послѣдняго выраженія найдемъ квадратъ одного уклоненія $y_k = x_1 + z_k$, или:

$$y_k^2 = x_1^2 + z_k^2 + 2x_1 z_k ;$$

придавая k послѣдовательно значенія отъ 1, 2 ... до s и суммируя всѣ равенства, получимъ

$$\Sigma y_k^2 = s x_1^2 + \Sigma z_k^2 + 2x_1 \Sigma z_k .$$

Равнымъ образомъ для $y_{s+k} = x_2 + z_k$:

$$y_{s+k}^2 = x_2^2 + z_k^2 + 2x_2 z_k ;$$

при k равномъ послѣдовательно 1, 2 ... до s, послѣ суммированія получимъ

$$\Sigma y_{s+k}^2 = s x_2^2 + \Sigma z_k^2 + 2x_2 \Sigma z_k$$

и т. д.

Принимая во вниманіе, что

$$\Sigma z_k = 0$$

получимъ:

$$\Sigma y_k^2 = s x_1^2 + \Sigma z_k^2$$

$$\Sigma y_{s+k}^2 = s x_2^2 + \Sigma z_k^2$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma y_{(n-1)s+k}^2 = s x_n^2 + \Sigma z_k^2$$

причемъ Σz_k^2 будетъ повторяться n разъ. Суммируя всѣ равенства, получимъ:

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_s^2 + y_{s+1}^2 + \ldots + y_{2s} + y_{2s+1} + \ldots + y_{ns} = s \Sigma x_i^2 + n \Sigma z_k^2$$

если i принимаетъ послѣдовательно значенія 1, 2 ... до n и k — 1, 2 ... до s.

Въ такомъ случаѣ

$$D = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{ns}} = \sqrt{\left[\frac{s\Sigma x_i^2}{ns} + \frac{n\Sigma z_k^2}{ns}\right]}$$

$$= \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}.$$

Это положеніе можетъ быть распространено и на случай любого числа величинъ: если

$$M = a + b + c + \ldots,$$

то средняя квадратическая мѣра уклоненія будетъ равна:

$$D = \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2 + \delta_c^2 + \ldots}.$$

3) Соединяя оба предыдущихъ случая, получаемъ новое положеніе: если для истинной величины a наиболѣе вѣроятное значеніе равняется a_0 и мѣра уклоненія — δ_a и для величины b наиболѣе вѣроятное значеніе равняется b_0 и мѣра уклоненія — δ_b; то для истинной величины $M = ia + kb$, гдѣ i и k представляютъ собою нѣкоторыя постоянныя величины, среднее квадратическое уклоненіе D будетъ равно:

$$\sqrt{i^2\delta_a^2 + k^2\delta_b^2}.$$

Это слѣдуетъ изъ того, что уклоненіе для ia будетъ равно $i\delta_a$ и квадратъ его $i^2\delta_a^2$ и для kb — $k^2\delta_b^2$; для суммы же ихъ получаемъ указанное выше выраженіе. При этомъ i и k могутъ быть какъ цѣлыя числа, такъ и дроби. На основаніи вышеизложеннаго, если для относительной p_1, вычисленной на основаніи n_1 наблюденій, мѣра уклоненія составляетъ

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{p_1 v_1}{n_1}}$$

и для относительной p_2, вычисленной на основаніи n_2 наблюденій,

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{p_2 q_2}{n_2}};$$

то для

$$p = p_1 + p_2$$

мѣра уклоненія выразится въ видѣ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}} .$$

Въ такомъ случаѣ для

$$np = np_1 + np_2$$

мѣра уклоненія составитъ

$$\sigma = \sqrt{n^2 \left(\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2} \right)}$$

и при $n_1 = n_2 = n$

$$\sigma = \sqrt{n \left(p_1 q_1 + p_2 q_2 \right)} .$$

Если же p составлено изъ p_1 и p_2 такимъ образомъ, что

$$p = ip_1 + kp_2$$

гдѣ i и k представляютъ собою постоянные коэффиціенты, то мѣра уклоненія выразится въ видѣ:

$$\sigma = \sqrt{i^2 \sigma_1^{\,2} + k^2 \sigma_2^{\,2}} .$$

Если, напримѣръ,

$$p = \frac{n_1}{n} p_1 + \frac{n_2}{n} p_2$$

или

$$np = n_1 p_1 + n_2 p_2 ,$$

то для p

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{n_1}{n} \right)^2 \frac{p_1 q_1}{n_1} + \left(\frac{n_2}{n} \right)^2 \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

что можетъ быть представлено также въ видѣ:

$$\sqrt{\frac{i\,p_1\,q_1 + k\,p_2\,q_2}{n}};$$

для пр мѣра уклоненія выразится въ видѣ:

$$\sqrt{n\,(i\,p_1\,q_1 + k\,p_2\,q_2)}$$

или замѣняя $i = \frac{n_1}{n}$ и $k = \frac{n_2}{n}$, въ видѣ:

$$\sqrt{n_1\,p_1\,q_1 + n_2\,p_2\,q_2}\,.$$

Напримѣръ, если вѣроятность опредѣленнаго рода смерти для мужчинъ составляетъ $^4/_5$ и для женщинъ — $^3/_5$, то для группы въ 400 мужчинъ мѣра уклоненія составитъ $\sqrt{400 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{64}$ и для группы въ 100 женщинъ — $\sqrt{100 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{24}$. Для группы же въ 400 мужчинъ и 100 женщинъ мѣра уклоненія выразится въ видѣ:

$$\sqrt{400 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + 100 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{88}.$$

(Westergaard, o. c., стр. 81).

4) Если при $M = a + b + c + \ldots$

и среднемъ квадратическомъ уклоненіи

$$D = \sqrt{\{\delta_a^{\,2} + \delta_b^{\,2} + \delta_c^{\,2} + \ldots\}}$$

мѣры уклоненія отдѣльныхъ величинъ совпадаютъ, или

$$\delta_a = \delta_b = \delta_c = \ldots = \delta$$

то

$$D = \delta\sqrt{n}$$

если n есть число группъ.

Иначе говоря, если отдѣльныя группы наблюденій являются одинаково точными (обладаютъ

одинаковою мѣрою уклоненія), то, соединивъ всѣ отдѣльныя группы въ одну общую, т. е. увеличивъ число наблюденій въ n разъ, мы увеличимъ мѣру уклоненія въ $\sqrt{n}$ разъ; мѣра уклоненія возрастаетъ въ пропорціи меньшей, чѣмъ число наблюденій; или для группы съ бо́льшимъ числомъ наблюденій мѣра уклоненія сравнительно меньше, чѣмъ для группы съ меньшимъ числомъ наблюденій.

Отсюда слѣдуетъ, что мѣра уклоненія ариѳметической средней изъ отдѣльныхъ группъ равноточныхъ наблюденій въ $\sqrt{n}$ разъ меньше мѣры уклоненія каждой отдѣльной группы. Дѣйствительно, если для

$$M = a + b + c + \ldots\ldots$$

мѣра уклоненія составляетъ при указанныхъ выше условіяхъ

$$\delta\sqrt{n},$$

то для

$$m = \frac{a+b+c+\ldots}{n}$$

она равняется, согласно предыдущему,

$$\frac{\delta\sqrt{n}}{n} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

До сихъ поръ мы принимали, что

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}},$$

гдѣ x представляетъ разность между каждымъ даннымъ результатомъ наблюденія и средней изъ всѣхъ наблюденій, т. е. наиболѣе вѣроятнымъ значеніемъ истинной величины. Мѣра уклоненія δ можетъ быть выражена болѣе точно. Слѣдуетъ

различать уклоненія каждой данной величины отъ ея наиболѣе вѣроятнаго значенія или средней, т. н. приближенныя уклоненія (scheinbare Fehler), и уклоненія отъ истиннаго значенія или истинныя уклоненія (wahre Fehler). Если среднее квадратическое уклоненіе въ первомъ случаѣ обозначимъ черезъ

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$$

и во второмъ

$$\eta = \sqrt{\frac{\Sigma z^2}{n}},$$

то отношеніе между ними выразится въ видѣ

$$\eta = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Такимъ образомъ среднее квадратическое уклоненіе отъ истиннаго значенія, выраженное въ приближенныхъ уклоненіяхъ, должно имѣть видъ

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n-1}}.$$ [1])

Но при достаточно большомъ n разница эта не играетъ большой роли, въ статистическихъ же изслѣдованіяхъ не имѣетъ никакого практическаго значенія, такъ какъ число наблюденій (n) здѣсь всегда должно быть достаточно велико, и статистическія цыфры вообще мало могутъ притязать на математическую точность.

Если однако принять для ряда наблюденій

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n-1}},$$

[1]) П. А. Некрасовъ, Теорія вѣроятностей, 1896. стр. 128—129. Лоренцъ Г., Элементы высшей математики, т. 2, 1908, стр. 451—458.

то мѣра уклоненія средней ариометической выразится въ видѣ:

$$\delta_m = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n(n-1)}} .$$

5) Если $M = ia + kb + lc + \ldots$ и мѣра уклоненій для M составляетъ

$$D = \sqrt{(i\delta_a)^2 + (k\delta_b)^2 + \ldots} ,$$

то, при $i = k = l = \ldots = g$, мѣра уклоненія получитъ видъ

$$g\sqrt{\delta_a^{\,2} + \delta_b^{\,2} + \ldots}$$

и при $\delta_a = \delta_b = \ldots = \delta$:

$$D = g\delta\sqrt{n} .$$

5) Необходимо замѣтить, что всѣ означенныя формулы вѣрны какъ для $M = a + b + c + \ldots$, такъ и для $M = a - b - c - \ldots$, иначе вѣрны для $M = a \pm b \pm c \pm \ldots$ [1]).

---

[1]) Otto Koll, Die Theorie des Beobachtungsfehlers und die Methode der kleinsten Quadrate mit ihrer Anwendung etc. 1893.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

1. ОБЩЕЕ ПОНЯТІЕ О ПРЕОБРАЗОВАНІИ РЯДОВЪ.

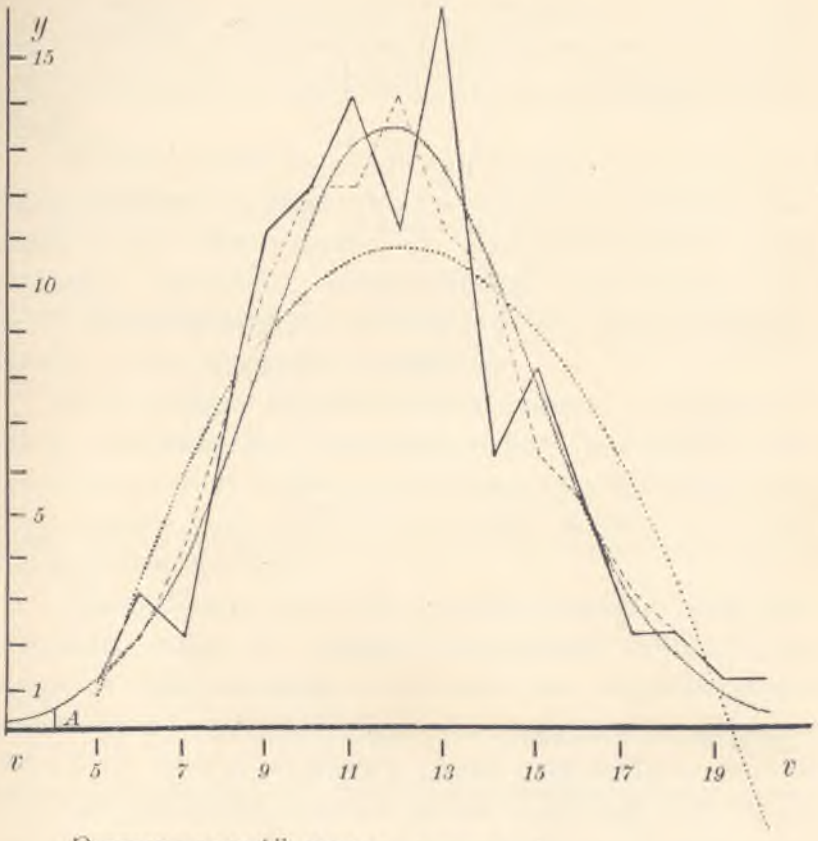
Предыдущее изложеніе показываетъ, что распредѣленіе дѣйствительныхъ величинъ въ эмпирическихъ рядахъ въ извѣстныхъ случаяхъ приближается къ теоретическому распредѣленію, выводимому a priori на основаніи опредѣленныхъ допущеній. Эмпирическій рядъ никогда однако въ точности не совпадаетъ съ теоретическимъ: отдѣльныя дѣйствительныя величины обыкновенно въ той или другой мѣрѣ уклоняются отъ теоретической величины соотвѣтствующихъ имъ членовъ апріорнаго ряда.

Если сдѣлать допущеніе, что правильность распредѣленія дѣйствительныхъ величинъ ряда обусловливается наличностью условій, сходныхъ съ тѣми, какія принимаются за основаніе при апріорномъ построеніи теоретическаго ряда; иначе говоря, если сдѣлать допущеніе, что дѣйствительный рядъ является эмпирическимъ выраженіемъ теоретическаго ряда, то отсюда возникаютъ двѣ задачи:

во-первыхъ, преобразовать рядъ такимъ образомъ, чтобы отдѣльныя эмпирическія величины его были замѣнены наиболѣе вѣроятными ихъ теоретическими значеніями и

во-вторыхъ, найти мѣру расхожденія эмпирическаго и теоретическаго рядовъ въ цѣломъ.

Къ стр. 185–186.



Эмпирическій рядъ ——— :

1 3 2 7 11 12 14 11 16 6 8 5 2 2 1 1

Преобразованный рядъ - - - - - :

1 2 4 7 10 12 12 14 11 10 6 5 3 2 1 1

см. также стр. 192.



Преобразованіе ряда путемъ замѣны дѣйствительныхъ величинъ значеніями соотвѣтствующихъ членовъ теоретическаго ряда имѣетъ троякое значеніе:

1) законъ распредѣленія величинъ ряда выступаетъ съ теоретическою ясностью, недоступной статистическому матеріалу въ его эмпирическомъ видѣ;

2) несоотвѣтствіе эмпирическаго ряда съ теоретическимъ въ извѣстныхъ случаяхъ можетъ указывать на присутствіе въ эмпирическомъ рядѣ особыхъ причинъ, постороннихъ апріорному закону распредѣленія, и навести на ихъ изслѣдованіе и послѣдующее открытіе;

и 3) найдя теоретическій законъ распредѣленія, отвѣчающій эмпирическому матеріалу, мы можемъ a priori найти теоретическую величину любого члена ряда, хотя бы этотъ членъ не данъ былъ эмпирически.

Простѣйшій способъ преобразованія дѣйствительнаго ряда, съ цѣлью выясненія общаго его вида и направленія, состоитъ въ выравниваніи отдѣльныхъ членовъ ряда на основаніи ближайшихъ къ нимъ величинъ ряда: напримѣръ, вмѣсто данной величины можно взять среднюю изъ предшествующей, данной и послѣдующей. Пусть данъ рядъ величинъ:

1, 3, 2, 7, 11, 12, 14, 11, 16, 6, 8, 5, 2, 2, 1, 1,

въ общемъ возрастающій къ серединѣ и затѣмъ снова убывающій; отдѣльные члены ряда однако уклоняются отъ этого общаго направленія. Взявъ послѣдовательно среднія изъ трехъ сосѣднихъ членовъ и замѣняя ими каждый разъ величину,

стоящую посерединѣ, получимъ преобразованный рядъ:

1, 2, 4, 7, 10, 12, 12, 14, 11, 10, 6, 5, 3, 2, 1, 1.

Графическое изображеніе первоначальнаго и преобразованнаго ряда наглядно показываетъ результатъ преобразованія.

Вмѣсто того, чтобы брать среднюю изъ трехъ сосѣднихъ величинъ, Wittstein беретъ среднюю изъ пяти, повторяя эту операцію дважды. Такимъ образомъ рядъ

a, b, c, d, e, f.....

послѣ перваго преобразованія вмѣсто величины e получаетъ

$$e' = \frac{c+d+e+f+g}{5},$$

а послѣ второго

$$e'' = \frac{a+2b+3c+4d+5e+4f+3g+2h+i}{25}.$$

Этотъ способъ основанъ на предположеніи, что нѣкоторая часть случаевъ, которые должны были бы попасть въ данный членъ ряда, напр. e, попадаетъ въ два предыдущіе и два послѣдующіе члены; средняя стремится исправить эту случайную неточность. Такъ какъ подобная случайность тѣмъ менѣе вѣроятна, чѣмъ далѣе отстоитъ членъ ряда отъ преобразуемаго, то естественно брать далѣе отстоящіе члены съ меньшимъ вѣсомъ, что и достигается при вторичномъ преобразованіи [1]).

[1]) Th. Wittstein, Mathematische Statistik, Hannover, 1867, стр. 30, 31.

Поэтому Filipowski беретъ средній членъ съ вѣсомъ вдвое большимъ противъ сосѣднихъ:

$$c = \frac{b + 2c + d}{4}$$ [1]).

Болѣе точный способъ состоитъ въ томъ, что при преобразованіи ряда принимаются во вниманіе не только ближайшіе члены ряда, но всѣ вообще величины ряда. Идея замѣны дѣйствительныхъ величинъ ряда ихъ наиболѣе вѣроятными значеніями состоитъ въ принятіи, что 1) весь рядъ подчиненъ одному общему закону и 2) что значеніе каждаго члена опредѣляется мѣстомъ, какое онъ занимаетъ въ рядѣ; иначе говоря, значеніе его является функціей разстоянія отъ нѣкоторой исходной точки. Эту функцію въ общемъ видѣ можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots$$

гдѣ y представляетъ собою членъ ряда, занимающій опредѣленное мѣсто, x — разстояніе этого члена отъ точки, принятой за исходную; a, b, c, d...— постоянныя величины, которыя требуется знать или опредѣлить для того, чтобы найти искомое значеніе y.

Пусть намъ данъ рядъ дѣйствительныхъ величинъ:

$$A, B, C, D\ldots\ldots;$$

пусть первая величина ряда находится на разстояніи отъ исходной точки, которое мы принимаемъ за 1; если каждая послѣдующая величина ряда: B, C, D.... находится на такомъ же раз-

[1]) K. Blaschke, Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen, Wien, 1893, стр. 45—46, 38—39, даетъ оцѣнку этихъ пріемовъ и сводитъ ихъ къ общему виду.

стояніи отъ предыдущей, то B отстоитъ отъ исходной точки на 2, C на 3, D на 4 и т. д. Такое распредѣленіе будетъ имѣть мѣсто, напримѣръ, въ томъ случаѣ, если A, B, C .... представляютъ собою число лицъ извѣстной генераціи, переживающихъ первый годъ жизни, второй, третій ...., и исходной точкой взято 0 лѣтъ. Обозначивъ искомую величину для членовъ A, B, C, D ... черезъ $y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots$, мы получимъ для y_1 разстояніе $x = 1$, для y_2 $x_2 = 2$ и т. д., и послѣдовательный рядъ y получитъ слѣдующее выраженіе:

$$y_1 = a + b.1 + c.1^2 + d.1^3 + \ldots.$$
$$y_2 = a + b.2 + c.2^2 + d.2^3 + \ldots.$$
$$y_3 = a + b.3 + c\,3^2 + d.3^3 + \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Для рѣшенія этихъ уравненій необходимо имѣть значеніе величинъ a, b, c, d..... Это значеніе должно быть опредѣлено на основаніи эмпирически даннаго матеріала, т. е. дѣйствительныхъ величинъ ряда A, B, C, D ...., для чего необходимо эти послѣднія связать уравненіями съ выраженіями, отвѣчающими послѣдовательнымъ y. Причемъ, такихъ уравненій должно быть столько, сколько величинъ a, b, c ... мы желаемъ взять. Если мы не желаемъ дѣлать вычисленія слишкомъ сложными, приходится ограничиться сравнительно малымъ числомъ искомыхъ постоянныхъ. Взявъ, напримѣръ, только a, b и c, мы получимъ рядъ

$$y_1 = a + b + c$$
$$y_2 = a + 2b + 2^2c$$
$$y_3 = a + 3b + 3^2c$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

въ которомъ подлежатъ опредѣленію три постоянныя, и слѣдовательно изъ всѣхъ выраженій $a+bx+cx^2$ и всѣхъ эмпирически данныхъ величинъ A, B, C . . . требуется составить три уравненія. Эти уравненія могутъ быть составлены различнымъ способомъ. Одинъ изъ такихъ способовъ состоитъ въ слѣдующемъ [1]).

Если бы каждый членъ ряда y точно отвѣчалъ соотвѣтствующему члену ряда A, B, C . . . ,

то $$\Sigma y = A+B+C+\ldots.$$

и $$\Sigma xy = x_1 A + x_2 B + x_3 C + \ldots..$$

какъ равнымъ образомъ

$$\Sigma x^1 y = x_1^1 A + x_2^1 B + x_3^1 C + \ldots.$$

Допустимъ, что эти равенства будутъ имѣть мѣсто, хотя отдѣльные члены обоихъ рядовъ неравны. Положимъ, что дѣйствительный рядъ состоитъ изъ четырехъ членовъ A, B, C, D. Тогда

$$y_1+y_2+y_3+y_4=A+B+C+D \qquad (1)$$

$$y_1+2y_2+3y_3+4y_4=A+2B+3C+4D \qquad (2)$$

$$y_1+2^2y_2+3^2y_3+4^2y_4=A+2^2B+3^2C+4^2D. \qquad (3)$$

Или подставляя вмѣсто y ихъ выраженія, мы получимъ:

$$a+b+c+a+2b+2^2c+a+3b+3^2c+a+4b+4^2c= \\ =A+B+C+D \ldots\ldots \quad (1)$$

$$a+b+c+2(a+2b+2^2c)+3(a+3b+3^2c)+4(a+4b+4^2c)= \\ =A+2B+3C+4D \ldots. \quad (2)$$

$$a+b+c+2^2(a+2b+2^2c)+3^2(a+3b+3^2c)+4^2(a+4b+4^2c)= \\ =A+2^2B+3^2C+4^2D \ldots \quad (3);$$

[1]) W. Palin Elderton, Frequency-Curves and Correlation, London (написано въ 1906 г.).

что послѣ нѣкоторыхъ преобразованій даетъ

$$a(1^0+2^0+3^0+4^0)+b(1+2+3+4)+c(1^2+2^2+3^2+4^2)=$$
$$=A.1^0+B.2^0+C.3^0+D.4^0$$

$$a(1+2+3+4)+b(1^2+2^2+3^2+4^2)+c(1^3+2^3+3^3+4^3)=$$
$$=A.1+B.2+C.3+D.4$$

$$a(1^2+2^2+3^2+4^2)+b(1^3+2^3+3^3+4^3)+c(1^4+2^4+3^4+4^4)=$$
$$=A.1^2+B.2^2+C.3^2+D.4^2$$

или

$$4a+10b+30c=A+B+C+D=\Sigma(F.x^0)$$
$$10a+30b+100c=\Sigma(F.x^1)$$
$$30a+100b+354c=\Sigma(F.x^2),$$

гдѣ $F=A, B\ldots$ и $x=1, 2\ldots$; эти уравненія даютъ возможность получить a, b, c и опредѣлить значеніе y.

Пусть A, B .... представляютъ собою рядъ чиселъ

$$1\ \ 3\ \ 2\ \ 7\ ;$$

тогда

$$4a+10b+30c=13$$
$$10a+30b+100c=41$$
$$30a+100b+354c=143$$

откуда

$$a=-0\,3382$$
$$b=\ \ 1{\cdot}5872$$
$$c=-0{\cdot}0451$$

и

$y_1=1{\cdot}2$ вмѣсто 1
$y_2=2{\cdot}6$ „ 3
$y_3=4{\cdot}0$ „ 2
$y_4=5{\cdot}2$ „ 7.

Практическое удобство этого пріема состоитъ, между прочимъ, въ томъ, что 1) такъ какъ Σy приравнивается суммѣ дѣйствительныхъ членовъ ряда, то сумма преобразованныхъ величинъ равна суммѣ эмпирическихъ данныхъ (или площади кривыхъ преобразованнаго и дѣйствительнаго ряда равны) и 2) такъ какъ Σ произведеній каждаго y на разстояніе его отъ исходной точки равна такой же суммѣ для дѣйствительныхъ величинъ, то среднее разстояніе отъ исходной точки въ обоихъ рядахъ также совпадаетъ.

Какъ видно, изъ вышеизложеннаго, примѣненіе указаннаго пріема требуетъ вычисленія суммъ произведеній каждаго члена ряда на соотвѣтствующее разстояніе отъ исходной точки, взятое послѣдовательно въ возрастающихъ степеняхъ, какъ то:

$$A.1^0 + B.2^0 + C.3^0 + D.4^0$$

$$A.1 + B.2 + C.3 + D.4$$

$$A.1^2 + B.2^2 + C.3^2 + D.4^2 \text{ и т. д.}$$

Такого рода суммы, по терминологіи проф. Pearson'a, носятъ названіе моментовъ; сумма произведеній каждаго члена на соотвѣтствующее разстояніе въ 0-ой степени представляетъ нулевой моментъ (ν_0), такая же сумма произведеній на разстоянія въ 1-ой, 2-ой . . . степени представляетъ первый, второй . . . моментъ (ν_1, ν_2 . . . .

Такимъ образомъ

$$\Sigma y x^n = y_1 x_1^n + y_2 x_2^n + \ldots = \nu_n$$

представляетъ собою n-ый моментъ.

2. ВЫЧИСЛЕНІЕ МОМЕНТОВЪ.

Различные способы полученія моментовъ поясним на слѣдующемъ примѣрѣ, который послужитъ матеріаломъ для иллюстраціи всего дальнѣйшаго изложенія.

Сосчитавъ, сколько разъ буква i встрѣчается въ послѣдовательныхъ сотняхъ буквъ латинскаго текста (De Imperio Cn. Pompei ad Quirites oratio), получимъ слѣдующій рядъ цыфръ для каждой сотни:

9	12	6	11	10	9	11	17	11	15
16	16	15	18	9	13	14	11	9	12
8	11	13	11	11	12	12	13	10	15
18	5	9	12	13	12	7	10	10	12
11	17	16	13	12	6	10	16	15	7
10	15	11	16	13	8	20	9	9	9
12	9	14	11	8	14	14	15	14	8
11	15	12	10	10	8	15	10	13	13
14	6	12	13	10	13	13	11	11	11
19	9	13	13	13	9	13	13	8	8

Сосчитавъ число сотенъ, въ которыхъ буква i встрѣчается одинаковое число разъ, получимъ:

Число i въ сотню буквъ.	Число сотенъ.
5	1
6	3
7	2
8	7
9	11
10	12
11	14
12	11
13	16
14	6
15	8
16	5
17	2
18	2
19	1
20	1

Всего 100 сотенъ, или 10 000 буквъ и въ числѣ ихъ буква i встрѣчается 1 170 разъ. Назовемъ мѣняющееся число буквъ i въ разныхъ сотняхъ варіантами (V), а соотвѣтствующее каждой варіантѣ число случаевъ—ея частотою (f). Варіанты могутъ быть нанесены на оси абсцисъ какимъ-либо принятымъ масштабомъ въ видѣ точекъ (x), отстоящихъ отъ какой-либо исходной точки; въ такомъ случаѣ частоты могутъ быть изображены въ видѣ ординатъ (y), выходящихъ изъ соотвѣтствующихъ точекъ абсциссы; соединивъ

вершины ординатъ получимъ кривую частоты распредѣленія буквы «i» въ сотняхъ латинскаго текста.

Если на этомъ чертежѣ принять за исходную точку A, то разстоянія (x) варіантъ 5, 6, 7 и т. д. будутъ: 1, 2, 3 . . . . . 16 (I); или принявъ за начало точку, отвѣчающую варіантѣ 5, получимъ рядъ разстояній (x): 0, 1, 2 . . . . . 15 (II); или принявъ за начало точку, отвѣчающую какой-либо варіантѣ въ серединѣ ряда, напр. 12, получимъ разстоянія (x): −7, −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0; +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, (III); или принявъ за начало точку, отвѣчающую 20, получимъ рядъ x: −15, −14 . . . . , −2, −1, 0 . . . (IV). Если возьмемъ любой рядъ x, произведенія каждаго x на соотвѣтствующую частоту (f) дадутъ въ суммѣ моментъ распредѣленія отъ избранной точки; при этомъ, если x будутъ взяты въ 1-ой степени — первый моментъ, если во второй — второй моментъ, въ n-ой — n-ый моментъ. Численная величина этихъ моментовъ для избраннаго примѣра выразится слѣдующимъ образомъ:

	Для исходной точки (I):						для точки (III):			
v	f	x	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$	x	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
5	1	1	1	1	1	7	49	7	49
6	3	2	4	6	12	6	36	18	108
7	2	3	9	6	18	5	25	10	50
8	7	4	16	28	112	4	16	28	112
9	11	5	25	55	275	3	9	33	99
10	10	6	36	60	360	2	4	20	40
11	14	7	49	98	686	1	1	14	14
12	11	8	64	88	704	0	0		
13	16	9	81	144	1296	1	1	16	16
14	6	10	100	60	600	2	4	12	24
15	8	11	121	88	968	3	9	24	72
16	5	12	144	60	720	4	16	20	80
17	2	13	169	26	338	5	25	10	50
18	2	14	196	28	392	6	36	12	72
19	1	15	225	15	225	7	49	7	49
20	1	16	256	16	256	8	64	8	64
				Σ= 779	6963			Σ= 130	899
								+109	
								21	

Такимъ образомъ, если за начало взять точку A абсцисы, то первый моментъ распредѣленія будетъ

$$\nu_1' = \Sigma f \times x = 779$$

и второй

$$\nu_2' = \Sigma f \times x^2 = 6\,963;$$

для начальной точки, отвѣчающей варіантѣ 12, первый моментъ составитъ:

$$\nu_1'' = \Sigma f \times x = -21$$

и второй

$$\nu_2'' = \Sigma f \times x^2 = 899.$$

Моменты можно брать либо въ ихъ абсолютной величинѣ, какъ это сдѣлано выше, либо на единицу частоты. Въ такомъ случаѣ абсолютную величину момента надо раздѣлить на сумму частотъ, и моменты на единицу распредѣленія получатъ выраженіе:

$$\nu_1 = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}, \quad \nu_2 = \frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} \text{ и т. д.},$$

что даетъ слѣдующія численныя величины для указаннаго примѣра:

$$\nu_1' = \frac{779}{100}, \quad \nu_2' = \frac{6963}{100}$$

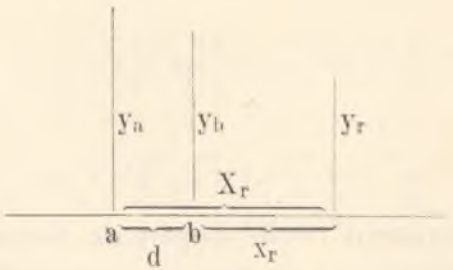
$$\nu_1'' = -0{\cdot}21, \quad \nu_2'' = 8{\cdot}99.$$

Очевидно, что ариѳметическія дѣйствія гораздо проще, если исходную точку взять по серединѣ ряда; равнымъ образомъ ясно, что они усложнились бы, если бы исходную точку взять въ промежуткѣ между двумя варіантами, напримѣръ, на разстояніи $^1/_4$ отъ точки 12, т. е. тамъ гдѣ должна была бы приходиться варіанта 12·25;

въ этомъ случаѣ всѣ x оказались бы дробными числами, а именно для точки 12, 11 . . . : –0·25, –1·25 . . . , а для точекъ 13, 14 . . . : +0·75, 1·75 . . . .

Среди всѣхъ возможныхъ точекъ, которыя мы можемъ брать за начальныя для опредѣленія моментовъ, особенно важное значеніе имѣетъ та точка, которая отвѣчаетъ среднему ариѳметическому значенію варіанты. Эта точка лежитъ въ серединѣ ряда и, обыкновенно, гдѣ-нибудь въ промежуткѣ между двумя сосѣдними варіантами — въ данномъ случаѣ, напримѣръ, она составляетъ 11·79 — поэтому рѣдко совпадаетъ съ цѣлыми дѣленіями абсциссы. Непосредственное вычисленіе моментовъ отъ этой точки было бы сопряжено съ большими сравнительно затрудненіями. Эти затрудненія устраняются, если найти зависимость между моментомъ распредѣленія отъ данной точки и отъ всякой другой; зная эту зависимость, можно взять за начало для вычисленія моментовъ точку, которая является наиболѣе удобной, и отъ нея перейти къ той, какая требуется по тѣмъ или инымъ соображеніямъ.

Если данъ n-ый моментъ распредѣленія отъ точки a, то можно найти n-ый моментъ распредѣленія отъ точки b слѣдующимъ образомъ.



Пусть разстояніе нѣкоторой ординаты y_r отъ исходной точки a будетъ X_r; въ такомъ случаѣ n-ый моментъ для этой ординаты составитъ:

$$y_r X^n$$

Пусть разстояніе этой же ординаты отъ нѣкоторой другой точки b равно x_r, и разстояніе a отъ b равно d; тогда $X_r = x_r + d$

и $$y_r X_r^n = y_r (x_r + d)^n$$

$$= y_r \left(x_r^n + n d x_r^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x_r^{n-2} d^2 + \ldots + d^n\right).$$

Такое же выраженіе получимъ для всякой другой ординаты; суммируя n-ые моменты для всѣхъ ординатъ, получимъ n-ый моментъ всего распредѣленія или

$$\Sigma y_r X_r^n = \nu_n' = \Sigma y_r \left(x_r^n + n x_r^{n-1} d + \frac{n(n-1)}{1.2} x_r^{n-2} d^2 + \ldots + d^n\right)$$

$$= \Sigma y_r x_r^n + n d \Sigma y_r x_r^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 \Sigma y_r x_r^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + d^n \Sigma y_r$$

гдѣ ν_n' представляетъ собою n-ый моментъ распредѣленія отъ точки a и $\Sigma y_r x_r^n$ — n-ый моментъ распредѣленія отъ нѣкоторой другой точки b, который мы обозначимъ его черезъ ν_n'', $\Sigma y_r x_r^{n-1}$ — n—1-ый моментъ отъ точки b или ν_{n-1}'' и т. д. Или:

$$\nu_b' = \nu_n'' + n d \nu''_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 \nu''_{n-2} + \ldots\ldots,$$

откуда

$$\nu_n'' = \nu_n' - n d \nu''_{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 \nu''_{n-2} - \ldots\ldots \qquad (I).$$

На основаніи этой формулы возможно опредѣлить моменты отъ точки, соотвѣтствующей сред-

ней ариѳметической всѣхъ варіантъ. Для этого необходимо принять во вниманіе слѣдующее.

1) Первый моментъ распредѣленія отъ точки a, приходящійся на единицу частоты, (или отъ какой-либо другой точки), т. е.

$$\frac{\Sigma f.x}{\Sigma f} = \nu_1'$$

представляетъ собою среднее ариѳметическое разстояніе всѣхъ точекъ абсциссы, отвѣчающихъ ординатамъ, отъ точки, принятой за исходную. На этомъ разстояніи отъ исходной точки лежитъ та точка, которая отвѣчаетъ среднеариѳметической варіантѣ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ рядъ варіантъ, лежащихъ на равномъ другъ отъ друга разстояніи, которое мы принимаемъ за единицу

$$V_a\ V_b\ V_c \ldots V_g\ V_h\ V_i\ V_k\ V_l \ldots V_s\ V_t\ V_u$$

пусть варіанта V_i принята за исходную точку, и положеніе ея на абсцисѣ $= 0$, разстояніе же варіанты V_a отъ этой точки $= n$ и варіанты $V_u = n'$; пусть соотвѣтствующія варіантамъ частоты будутъ:

$$f_a\ f_b\ f_c \ldots f_g\ f_h\ f_i\ f_k\ f_l \ldots f_s\ f_t\ f_u\ .$$

Каждая изъ варіантъ можетъ быть выражена черезъ варіанту V_i, а именно

$V_a = V_i - n$	$V_u = V_i + n'$
$V_b = V_i - n + 1$	$V_t = V_i + n' - 1$
$V_c = V_i - n + 2$	$V_s = V_i + n' - 2$
. . . . .	. . . . .
$V_g = V_i - 2$	$V_l = V_i + 2$
$V_h = V_i - 1$	$V_k = V_i + 1$

$$V_i = V_i$$

Въ такомъ случаѣ средняя ариѳметическая варіантъ или

$$V_m = \frac{\Sigma V_i f}{\Sigma f}$$

можетъ быть представлена въ видѣ суммы

$$(V_i - n) f_a + (V_i - n + 1) f_b + \ldots + (V_i - 2) f_g + (V_i - 1) f_h + \\ + V_i f_i + (V_i + 1) f_k + (V_i + 2) f_l + \ldots + (V_i + n' - 1) f_t + \\ + (V_i + n') f_u ,$$

дѣленной на сумму

$$f_a + f_b + \ldots + f_g + f_h + f_i + f_k + f_l + \ldots f_t + f_u .$$

Раскрывъ скобки, получимъ

$$\frac{V_i (f_a + f_b + \ldots + f_i + \ldots f_t + f_u)}{f_a + f_b + \ldots + f_i + \ldots + f_t + f_u} + \\ + \frac{-f_a n - f_b (n-1) - \ldots - f_g 2 - f_h 1 + f_k 1 + f_l 2 + \ldots + f_t (n'-1) + f_u n'}{f_a + f_b + \ldots + f_i + \ldots + f_t + f_u}$$

что равняется:

$$V_i + \frac{\Sigma f.x}{\Sigma f} = V_i + \nu_1'$$

т. е. средне-ариѳметическая варіанта

$$V_m = V_i + \nu_1'$$

или

$$V_m - V_i = \nu_1' .$$

Иначе говоря, если мы къ величинѣ варіанты, принятой за исходную точку прибавимъ первый моментъ распредѣленія, мы получимъ среднюю ариѳметическую всѣхъ варіантъ; или первый моментъ представляетъ собою разницу между средней ариѳметической и исходной варіантой; если же положеніе послѣдней на абсциссѣ принято за

0, то ν_1' представляетъ разстояніе средне-ариѳметической варіанты отъ исходной точки. Назовемъ точку абсциссы, отвѣчающую среднеариѳметической варіантѣ, срединой распредѣленія; тогда ν_1' представляетъ собою разстояніе средины распредѣленія отъ исходной точки.

2) Если взять за исходную точку средину распредѣленія, то первый моментъ распредѣленія отъ нея, который обозначимъ черезъ ν_1, представляетъ разстояніе исходной точки, (т. е. средины распредѣленія) отъ средины распредѣленія, или отъ самой себя и потому равняется 0, или

$$V_m - V_m = \nu_1 = 0.$$

3) Нулевой моментъ распредѣленія отъ любой точки въ томъ числѣ и отъ точки среднеариѳметической варіанты) равняется 1; дѣйствительно:

$$\nu_0 = \frac{f_a\, x_a{}^0 + f_b\, x_b{}^0 + \ldots}{f_a + f_b + \ldots} = \frac{\Sigma f}{\Sigma f} = 1.$$

На основаніи изложеннаго, принимая въ формулѣ (I), а именно

$$\nu_n'' = \nu_n' - n d \nu_{n-1}'' - \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 \nu_{n-2}'' - \ldots$$

ν_n'' за n-ый моментъ распредѣленія отъ точки, отвѣчающей среднеариѳметической варіантѣ, или отъ средины распредѣленія, т. е. за ν_n;

ν_n' — за n-ый моментъ распредѣленія отъ любой иной исходной точки;

d — за разстояніе послѣдней отъ средины распредѣленія, или $d = \nu_1'$;

и придавая n послѣдовательно значенія, равныя 1, 2, 3 . . . , получимъ:

$$\nu_0 = 1$$

$$\nu_1 = 0$$

$$\nu_2 = \nu_2' - 2\nu_1'.\nu_1 - \frac{2.1}{1.2}\nu_1'^2\nu_0$$

$$= \nu_2' - 2\nu_1'.0 - \nu_1'^2.1$$

$$\nu_2 = \nu_2' - \nu_1'^2$$

$$\nu_3 = \nu_3' - 3\nu_1'\nu_2 - \frac{3.2}{1.2}\nu_1'^2\nu_1 - \frac{3.2.1}{1.2.3}\nu_1'^3\nu_0$$

$$= \nu_3' - 3\nu_1'\nu_2 - \frac{3.2}{1.2}\nu_1'^2.0 - \frac{3.2.1}{1.2.3}\nu_1'^3.1$$

$$\nu_3 = \nu_3' - 3\nu_1'\nu_2 - \nu_1'^3$$

и такимъ же образомъ далѣе:

$$\nu_4 = \nu_4' - 4\nu_1'\nu_3 - 6\nu_1'^2\nu_2 - \nu_1'^4.$$

Ниже приведены вычисленія для численнаго примѣра:

v	f	x	x^2	x^3	fx	fx^2	fx^3	x^4	fx^4
5	1	−7	49	−343	−7	49	−343	2401	2401
6	3	−6	36	216	18	108	648	1296	3888
7	2	−5	25	−125	−10	50	−250	625	1250
8	7	−4	16	−64	−28	112	448	256	1792
9	11	−3	9	−27	−33	99	−297	81	891
10	10	−2	4	−8	−20	40	−80	16	160
11	14	−1	1	−1	−14	14	−14	1	14
12	11	0							
13	16	1	1	1	16	16	16	1	16
14	6	2	4	8	12	24	48	16	96
15	8	3	9	27	24	72	216	81	648
16	5	4	16	64	20	80	320	256	1280
17	2	5	25	125	10	50	250	625	1250
18	2	6	36	216	12	72	432	1296	2592
19	1	7	49	343	7	49	343	2401	2401
20	1	8	64	512	8	64	512	4096	4096
	Σf=100				Σfx= −130 +109 = −21	Σfx²= 889	Σfx³= −2080 +2137 = −57		Σfx⁴=22775

Для единицы распредѣленія

$$\nu_1' = \frac{\Sigma f x}{\Sigma f} = \frac{21}{100} = -0{\cdot}21$$

$$\nu_2' = \frac{\Sigma f x^2}{\Sigma f} = \frac{899}{100} = 8{\cdot}99$$

$$\nu_3' = \frac{\Sigma f x^3}{\Sigma f} = \frac{57}{100} = 0{\cdot}57$$

$$\nu_4' = \frac{\Sigma f x^4}{\Sigma f} = \frac{22775}{100} = 227{\cdot}75$$

Если исходную точку перенести въ середину распредѣленія, то система моментовъ для послѣдней опредѣляется слѣдующимъ образомъ:

Разстояніе точки средины распредѣленія отъ исходной = первому моменту распредѣленія отъ исходной точки $= \nu_1' = -0{\cdot}21$. На этомъ разстояніи отъ исходной точки лежитъ средина распредѣленія. Такъ какъ исходная точка = 0, то средина распредѣленія лежитъ между 0 и -1, на разстояніи (отъ 0) $= -0{\cdot}21$. Исходной точкѣ 0 отвѣчаетъ значеніе основанія (v), равное 12; точкѣ 1 — значеніе v, равное 11; срединѣ распредѣленія, отстоящей отъ 0 на $-0{\cdot}21$, отвѣчаетъ значеніе v, равное $12 - 0{\cdot}21 = 11{\cdot}79$. Это есть среднее значеніе для ряда v; дѣйствительно $\frac{\Sigma V f}{\Sigma f} = \frac{1179}{100} = 11{\cdot}79$.

Итакъ разстояніе средины распредѣленія отъ исходной точки, равное ν_1', или $d = -0{\cdot}21$.

$$\nu_0 = 1$$

$$\nu_1 = 0$$

$$\nu_2 = \nu_2' - d^2 = 8{\cdot}99 - (-0{\cdot}21)^2 = \underline{8{\cdot}9459}$$

$$\nu_3 = \nu_3' - 3d\nu_2 - d^3 = 0{\cdot}57 - 3.(-0{\cdot}21).8{\cdot}9459 - (-0{\cdot}21)^3 =$$

$$= 0{\cdot}57 + 5{\cdot}6359 + 0{\cdot}0093 = \underline{6{\cdot}2152}$$

$$\nu_4 = \nu_4' - 4d\nu_3 - 6d^2\nu_2 - d^4$$
$$= 227{\cdot}75 - 4\,(-0{\cdot}21).6{\cdot}2152 - 6\,(-0{\cdot}21)^2.8{\cdot}9459 - (-0{\cdot}21)^4$$
$$= 227{\cdot}75 + 5\,2208 - 2{\cdot}3671 = \underline{230{\cdot}6037.}$$

Замѣтимъ, что второй моментъ распредѣленія отъ точки среднеариѳметической варіанты или

$$\nu_2 = \nu_2' - \nu_1'^2$$

представляетъ собою квадратъ среднеквадратическаго уклоненія (δ) или

$$\nu_2 = \delta^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\delta^2 = \frac{(V_a - V_m)^2 f_a + (V_b - V_m)^2 f_b + \ldots + (V_n - V_m)^2 f_n}{f_a + f_b + \ldots + f_n}.$$

Разности каждой величины ряда и средней ариѳметической: $V_a - V_m$, $V_b - V_m$ и т. д., будучи выражены въ извѣстныхъ единицахъ и перенесены на ось абсциссъ, дадутъ разстоянія каждой варіанты отъ среднеариѳметической или x_a, x_b, ... x_n и

$$\delta^2 = \frac{x^2_a f_a + x^2_b f_b + \ldots + x^2_n f_n}{f_a + f_b + \ldots + f_n} = \nu^2.$$

Такимъ образомъ способъ моментовъ служитъ облегченнымъ пріемомъ для вычисленія: во 1-хъ, средней ариѳметической для ряда величинъ и, во 2-хъ, средняго квадратическаго уклоненія. А именно: средняя ариѳметическая равна члену ряда, принятому за начало (исходной варіантѣ), плюсъ первый моментъ распредѣленія отъ этого члена; среднее квадратическое уклоненіе равно второму моменту распредѣленія, считая отъ среднеариѳметической ряда; или

$$V_m = V_0 + \nu_1'$$
$$\delta = \sqrt{\nu_2} = \sqrt{\nu_2' - \nu_1'^2}.$$

Систему моментовъ можно получить также пріемомъ послѣдовательнаго суммированія частотъ.

Пусть данъ рядъ частотъ (f)

$$f_1 \quad f_2 \quad f_3 ,$$

отстоящихъ другъ отъ друга на равномъ разстояніи, принятомъ за единицу; если исходную точку взять на разстояніи, равномъ 1, передъ первымъ членомъ ряда, то разстоянія частотъ (x) выразятся въ видѣ ряда

$$1 \quad 2 \quad 3 .$$

Расположимъ ряды вертикально, обозначивъ каждую строку цыфрами I II III:

x	f	N_1
1	f_1	I
2	f_2	II
3	f_3	III

и будемъ складывать f по строкамъ, начиная снизу и ставя сумму противъ соотвѣтствующей строки, а именно:

f_3 — строка III (N_2)
$f_3 + f_2$ „ II „
$f_3 + f_2 + f_1$ „ I „

или

x	f	N_1		N_2
1	f_1	I	$f_1 + f_2 + f_3$	I
2	f_2	II	$f_2 + f_3$	II
3	f_3	III	f_3	III

Съ полученными строками поступимъ такимъ же образомъ и такъ далѣе, получая послѣдовательно

рядъ строкъ N_3, N_4 . . . Результатъ представленъ въ слѣдующей таблицѣ:

x	f	N_1	N_2	N_3
1	f_1	I	$f_1+f_2+f_3$ I	$f_1+2f_2+3f_3$ I
2	f_2	II	f_2+f_3 II	f_2+2f_3 II
3	f_3	III	f_3 III	f_3 III

N_4	N_5
$f_1+3f_2+6f_3$ I	$f_1+4f_2+10f_3$ I
f_2+3f_3 II	f_2+4f_3 II
f_3 III	f_3 III

Мы видимъ, что сумма строкъ I—III столбца N_1, которую обозначимъ черезъ S_1, даетъ

$$S_1 = f_1 + f_2 + f_3$$

т. е. первую строку слѣдующаго столбца N_2; такимъ же образомъ сумма строкъ столбца N_2 или S_2, равная

$$S_2 = f_1 + 2f_2 + 3f_3$$

даетъ первую строку слѣдующаго столбца N_3 и т. д.

Чтобы поставить эти суммы въ связь съ моментами, пріймемъ во вниманіе, что:

$$S_1 = f_1 + f_2 + f_3 = \Sigma f = \nu_0' \text{ (строка I столбца } N_2)$$

$$S_2 = f_1 + 2f_2 + 3f_3 = \Sigma f.x = \nu_1' \text{ (строка I столбца } N_3)$$

$$S_3 = f_1 + (1+2)\,f_2 + (1+2+3)\,f_3$$

$$= f_1 + \frac{(1+2).2}{2} f_2 + \frac{(1+3).3}{2} f_3$$

$$= f_1 \frac{(x_1+1)x_1}{2} + f_2 \frac{(x_2+1)x_2}{2} + f_3 \frac{(x_3+1)x_3}{2}$$

$$= \frac{f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + f_3x_3^2 + f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3}{2}$$

$$= \frac{\Sigma fx^2 + \Sigma fx}{2} = \frac{\nu_2' + \nu_1'}{2} \text{ (строка I столбца } N_4);$$

$$S_4 = f_1 + 4f_2 + 10f_3 = f_1 \frac{1.2.3}{2.3} + f_2 \frac{2.3.4}{2.3} + f_3 \frac{3.4.5}{2.3}$$

$$= f_1 \frac{x_1(x_1+1)(x_1+2)}{2.3} + f_2 \frac{x_2(x_2+1)(x_2+2)}{2.3} + f_3 \frac{x_3(x_3+1)(x_3+2)}{2.3}$$

$$= \frac{f_1x_1^3+3f_1x_1^2+2f_1x_1+f_2x_2^3+3f_2x_2^2+2f_2x_2+f_3x_3^3+3f_3x_3^2+2f_3x_3}{2.3}$$

$$= \frac{\Sigma fx^3 + 3\Sigma fx^2 + 2\Sigma fx}{2.3}$$

$$= \frac{\nu_3' + 3\nu_2' + 2\nu_1'}{6}.$$

Такимъ же образомъ

$$S_5 = \frac{\nu_4' + 6\nu_3' + 11\nu_2' + 6\nu_1'}{24} \text{ и т. д.}$$

причемъ здѣсь моменты берутся въ абсолютной величинѣ, а не на единицу частоты, т. е.

$$\nu_1' = \Sigma fx, \text{ а не } \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

и

$$\nu_2' = \Sigma fx^2, \text{ а не } \frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f},$$

вслѣдствіе чего, при переходѣ къ относительнымъ величинамъ моментовъ на единицу частоты, всѣ суммы надо раздѣлить на $\Sigma f = S_1$.

Отсюда

$$\nu_1' = S_2 = d$$
$$\nu_2' = 2S_3 - d$$
$$\nu_3' = 6S_4 - 3\nu_2' - 2d$$
$$\nu_4' = 24S_5 - 6\nu_3' - 11\nu_2' - 6d$$

Или переходя отъ взятой исходной точки къ серединѣ распредѣленія, т. е. отъ ν' къ ν, и принимая во вниманіе, что

$$\nu_2 = \nu_2' - d^2$$
$$\nu_3 = \nu_3' - 3d\nu_2 - d^3$$
$$\nu_4 = \nu_4' - 4d\nu_3 - 6d^2\nu_2 - d^4$$

получимъ:

$$\nu_2 = 2S_3 - d(1+d) \quad \text{гдѣ } d = S_2$$

$$\nu_3 = 6S_4 - 3(\nu_2 + d^2) - 2d - 3d\nu_2 - d^3$$
$$= 6S_4 - 3\nu_2(1+d) - 2d(1+d) - d^2(1+d)$$
$$= 6S_4 - 3\nu_2(1+d) - d(d+1)(d+2)$$

$$\nu_4 = 24S_5 - 2\nu_3[2(d+1)+1] - \nu_2[6(d+1)(d+2)-1]$$
$$- d(d+1)(d+2)(d+3).$$

Численный примѣръ даетъ слѣдующіе результаты:

x	f	N_2	N_3	N_4
1	1	100	779	3 871
2	3	99	679	3 092
3	2	96	580	2 413
4	7	94	484	1 833
5	11	87	390	1 349
6	10	76	303	959
7	14	66	227	656
8	11	52	161	429
9	16	41	109	268
10	6	25	68	159
11	8	19	43	91
12	5	11	24	48
13	2	6	13	24
14	2	4	7	11
15	1	2	3	4
16	1	1	1	1
	$S_1' = 109$	$S_2' = 779$	$S_3' = 3\,871$	$S_4' = 15\,208$

При переходѣ къ относительной величинѣ моментовъ на единицу частоты, получимъ

$$S_2 = \frac{S_2'}{S_1'} = 7{\cdot}79$$

$$S_3 = 38{\cdot}71$$

$$S_4 = 152{\cdot}08\,;$$

откуда

$$d = S_2 = 7{\cdot}79$$

$$\nu_2 = 2.38{\cdot}71 - 7{\cdot}79(7{\cdot}79+1) = 8{\cdot}9459$$

$$\nu_3 = 6.152{\cdot}08 - 3.8{\cdot}9459.8{\cdot}79 - 7{\cdot}79.8{\cdot}79.9{\cdot}79$$
$$= 6{\cdot}2152.$$

Суммированіе въ томъ видѣ, какъ оно здѣсь приведено, даетъ суммы, находящіяся въ опредѣленномъ соотношеніи съ моментами, для которыхъ исходная точка взята внѣ ряда, на разстояніи отъ перваго члена ряда, равномъ 1. Для облегченія вычисленій можно взять исходную точку гдѣ-нибудь въ серединѣ ряда. Тогда разстоянія (x) будутъ въ одну сторону отрицательными, въ другую — положительными; въ такомъ случаѣ и порядокъ суммированія измѣнится: суммированіе необходимо дѣлать отдѣльно для отрицательной половины ряда и отдѣльно для положительной, въ обѣихъ начиная отъ членовъ, наиболѣе отстоящихъ отъ исходной точки, въ направленіи къ серединѣ ряда. Такъ какъ въ отрицательной половинѣ ряда x получаютъ значеніе $-x$, то вслѣдствіе этого въ формулѣ суммъ получатся слѣдующія измѣненія [1]):

$f.x$	при $-x$	получитъ	значеніе	$-f.x$ и
Σfx	„	„	„	$-\Sigma fx\,(=S_2)$;
$f\frac{x(x+1)}{2}$	„	„	„	$\frac{-x(-x+1)}{2}f$ или $f\frac{x(x-1)}{2}$ и
$\Sigma\frac{fx(x+1)}{2}$	„	„	„	$\Sigma f\frac{x(x-1)}{2}\,(=S_3)$;
$f\frac{x(x+1)(x+2)}{2.3}$	„	„	„	$\frac{-x(-x+1)(-x+2)}{2.3}f$ или $-f\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}$ и
$\Sigma\frac{fx(x+1)(x+2)}{2.3}$	„	„	„	$-\Sigma f\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\,(=S_4)$
$\Sigma\frac{fx(x+1)(x+2)(x+3)}{2.3.4}$	„	„	„	$\Sigma f\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{2.3.4}\,(=S_5)$

[1]) Palin Elderton, o. c. стр. 22.

Такимъ образомъ, вмѣсто того, чтобы получать сумму строкъ каждаго столбца въ первой строкѣ слѣдующаго столбца, мы будемъ получать отдѣльно а) сумму отрицательныхъ строкъ даннаго столбца въ центральной строкѣ слѣдующаго столбца на отрицательной его сторонѣ и б) сумму положительныхъ строкъ въ центральной строкѣ съ положительной стороны столбца; вся же сумма получится сложеніемъ этихъ двухъ частныхъ суммъ.

При этомъ сумма членовъ столбца N_2 на отрицательной сторонѣ (часть суммы S_2) будетъ фигурировать на центральной строкѣ столбца N_3 съ отрицательнымъ знакомъ, въ видѣ $-\Sigma fx$, и такимъ же образомъ съ отрицательнымъ знакомъ будутъ фигурировать суммы отрицательныхъ половинъ всѣхъ четныхъ столбцовъ (N_4 N_6 . . .) въ видѣ центральныхъ членовъ нечетныхъ столбцовъ (N_5, N_7 . . .).

Кромѣ того, такъ какъ

при $x = 1$ обращается въ 0 $x-1$

„ $x = 2$ „ „ „ $x-2$

и т. д.

то въ суммѣ S_3 обращается въ 0 строка, отстоящая на 1 отъ исходной точки, а слѣдовательно центральная строка въ слѣдующемъ столбцѣ N_4 будетъ равна 0; въ суммѣ S_4 такимъ же образомъ обращаются въ 0 строки, отстоящія на 1 и 2 отъ исходной точки, вслѣдствіе чего двѣ центральныя строки слѣдующаго столбца N_5 обращаются въ нуль и т. д.

Изложенное представляется на численномъ примѣрѣ въ слѣдующемъ видѣ.

x	N_1	1	N_2	N_3	N_4	N_5
7		1	1	1	1	1
6		3	4	5	6	7
5		2	6	11	17	24
4		7	13	24	41	65
3		11	24	48	89	(—)154
2		10	34	82	171	—
1		14	48	(—)130	—	—
0		11				
1		16	41	109	268	606
2		6	25	68	159	338
3		8	19	43	91	179
4		5	11	24	48	88
5		2	6	13	24	40
6		2	4	7	11	16
7		1	2	3	4	5
8		1	1	1	1	1
		$S_1=100$	S x= 130	S —x=171	S —x= 154	
			S x= 109	S x=268	S x= 606	
			$S_2=$ 21	$S_3=439$	$S_4=452$	

Сумма S_2 получается сложеніемъ двухъ центральныхъ строкъ столбца N_3, причемъ строка отрицательной половины берется съ знакомъ —; S_3 получается суммированіемъ двухъ среднихъ строкъ столбца N_4, причемъ обѣ строки берутся съ знакомъ +, и въ отрицательной половинѣ столбца вмѣсто отсутствующей центральной строки берется предыдущая; S_4 получается суммированіемъ двухъ среднихъ строкъ столбца N_5, причемъ на отрицательной половинѣ берется съ — третья строка отъ исходной точки, такъ какъ двѣ ближайшія обращены въ 0 и т. д.

Взявъ вмѣсто абсолютныхъ величинъ суммъ ихъ относительныя величины, приходящіяся на 1 частоты, на основаніи предыдущаго, получимъ:

$$S_2 = -0{\cdot}21 = d$$

или средняя ариометическая варіантъ, отвѣчаю-

щихъ даннымъ f, лежитъ на разстояніи –0·21 отъ исходной точки.

$$S_3 = \quad 2{\cdot}68 + 1{\cdot}71 = 4{\cdot}39$$
$$S_4 = -1{\cdot}54 + 6{\cdot}06 = 4{\cdot}52.$$

Откуда

$$\nu_2 = 2.4{\cdot}39 - [-0.21\,(1-0{\cdot}21)]$$
$$= 2.4{\cdot}39 + 0{\cdot}21.0{\cdot}79 = 8{\cdot}9459$$
$$\nu_3 = 6.4{\cdot}52 - 3.8{\cdot}9459\,(1-0{\cdot}21) + 0{\cdot}21\,(1-0{\cdot}21)\,(2-0{\cdot}21)$$
$$= 6{\cdot}2152.$$

3. РАСПРЕДѢЛЕНІЕ ВАРІАНТЪ.

При вычисленіи моментовъ варіанты съ соотвѣтствующими имъ частотами должны быть распредѣлены (по возрастающей величинѣ варіантъ) на равныхъ промежуткахъ другъ отъ друга, принимаемыхъ за единицу. При такомъ распредѣленіи возможны два случая.

1) Варіанты въ дѣйствительности возрастаютъ на равные промежутки, и каждой варіантѣ отвѣчаетъ опредѣленная частота. Такой случай имѣетъ мѣсто въ ранѣе приведенномъ примѣрѣ, гдѣ варіанты возрастаютъ на единицу:

5, 6, 7, 8 . . . .

Если бы въ такого рода рядѣ одно изъ промежуточныхъ значеній отсутствовало (напр., если бы не было ни одной сотни съ 6 буквами «і»), его можно помѣстить съ частотою 0. Въ такомъ рядѣ каждая частота представляетъ собою ординату, отвѣчающую одному опредѣленному значенію варіанты.

2) Частота отвѣчаетъ нѣсколькимъ значеніямъ варіанты, лежащимъ въ опредѣленныхъ предѣлахъ: напримѣръ, для извѣстной генераціи въ теченіе пятаго года жизни умираетъ M_1 лицъ, въ теченіе шестого — M_2 лицъ и т. д. Такого рода обозначеніе одной частотой цѣлаго ряда значеній варіантъ въ опредѣленныхъ предѣлахъ является необходимымъ, когда варіанты измѣняются либо неравномѣрно, либо по слишкомъ малымъ промежуткамъ, оперировать съ которыми неудобно, либо когда каждому значенію варіанты отвѣчаетъ незначительная частота, и только соединеніемъ нѣсколь-

кихъ варіантъ достигается бо́льшая наглядность въ направленіи измѣненія частотъ.

Вообще всякій рядъ первоначально получается въ такомъ видѣ, что каждой данной варіантѣ отвѣчаетъ опредѣленная частота; и лишь затѣмъ онъ или остается въ такомъ видѣ, или сводится въ болѣе компактный видъ. При такомъ сведеніи интервалы, которымъ приписывается одна общая частота, могутъ быть установлены по произволу; но они должны быть на всемъ протяженіи ряда однообразны, иначе нарушается равенство разстояній отдѣльныхъ частотъ. Чѣмъ шире будутъ интервалы, тѣмъ меньше членовъ будетъ представлять рядъ частотъ; вообще интервалы не должны быть такъ малы, чтобы рядъ состоялъ изъ слишкомъ большого числа членовъ, что затрудняетъ вычисленія и часто не даетъ нагляднаго представленія о характерѣ движенія частотъ съ возрастаніемъ варіантъ; но они не должны быть и слишкомъ велики, чтобы послѣдовательныя различія частотъ не стушовывались въ общихъ цыфрахъ. Поэтому удобнѣе всего соединять варіанты въ такіе интервалы, чтобы, при сравнительно умѣренномъ числѣ членовъ ряда, законъ измѣненія частотъ обнаруживался съ достаточною ясностью.

Это же правило должно служить руководящимъ началомъ и при выборѣ начальнаго значенія интервала; ибо съ выборомъ того или другого начала для интервала варіанты могутъ попадать въ разные интервалы, отчего мѣняются частоты отвѣчающія каждому интервалу.

Слѣдующій примѣръ поясняетъ сказанное [1]).

[1]) G. Th. Fechner, Kollektivmasslehre, Leipzig, 1897, стр. 102, 123—124, 134 и вообще по данному вопросу главы VII и VIII.

Измѣренія 450 череповъ (Verticalumfang) даютъ слѣдующій первоначальный матеріалъ:

V въ mm	f	V	f	V	f
368	1	401	12	427	3
371	2	402	13	428	4
376	1	403	6	430	3
378	1	404	10	431	3
379	1	405	18	432	2
380	2	406	8	433	5
381	1	407	8	434	5
382	2	408	16	435	4
383	3	409	13	438	1
384	3	410	20	440	3
385	8	411	9	442	1
386	2	412	15	443	1
387	6	413	8	447	1
388	4	414	12	448	1
389	5	415	21		
390	7	416	6		
391	7	417	5		
392	7	418	16		
393	2	419	9		
394	8	420	15		
395	12	421	8		
396	4	422	7		
397	7	423	5		
398	14	424	12		
399	3	425	8		
400	13	426	7		

Если выбрать интервалъ=5 mm. и начало отъ 365·5 mm., то таблица получитъ слѣдующій видъ:

V	f
отъ 365·5 до 370·5	1
„ 370·5 „ 375·5	2
„ 375·5 „ 380·5	5
„ 380·5 „ 385·5	17
„ 385·5 „ 390·5	24
„ 390·5 „ 395·5	36
„ 395·5 „ 400·5	41
„ 400·5 „ 405·5	59
„ 405·5 „ 410·5	65
„ 410·5 „ 415·5	65
„ 415·5 „ 420·5	51
„ 420·5 „ 425·5	40
„ 425·5 „ 430·5	17
„ 430·5 „ 435·5	19
„ 435·5 „ 440·5	4
„ 440·5 „ 445·5	2
„ 445·5 „ 450·5	2

При интервалѣ въ 10 mm. и томъ же началѣ таблица выравнивается:

V	f
365·5—375·5	3
375·5—385·5	22
385·5—395·5	60
395·5—405·5	100
405·5—415·5	130
415·5—425·5	91
425·5—435·5	36
435·5—445·5	6
445·5—455·5	2

Но при интервалѣ въ 40 mm. она будетъ состоять только изъ трехъ членовъ

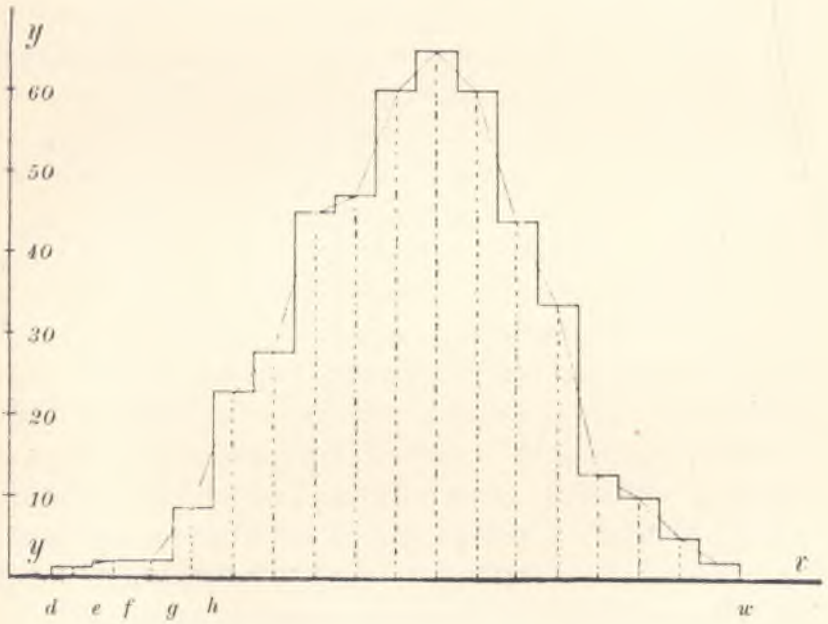
185
263
2

При интервалѣ въ 5 mm., но началѣ отъ 363·5 сразу получится таблица съ болѣе равномѣрнымъ возрастаніемъ и убываніемъ f, а именно:

v	f
363·5—368·5	1
368·5—373·5	2
373·5—378·5	2
378·5—383·5	9
383·5—388·5	23
388·5—393·5	28
393·5—398·5	45
398·5—403·5	47
403·5—408·5	60
408·5—413·5	65
413·5—418·5	60
418·5—423·5	44
423·5—428·5	34
428·5—433·5	13
433·5—438·5	10
438·5—443·5	5
443·5—448·5	2

Изображая графически такой рядъ, въ которомъ каждой частотѣ отвѣчаетъ одна опредѣленная варіанта, мы изображали варіанты въ видѣ равноотстоящихъ точекъ на абсциссѣ, а частоты въ видѣ соотвѣтствующей длины ординатъ. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда частота представляетъ число случаевъ, лежащихъ въ извѣстныхъ предѣлахъ варіанты, послѣдовательные предѣлы варіантъ естественно изображать въ видѣ линій опредѣленной длины, расположенныхъ по абсциссѣ; частоты же въ такомъ случаѣ представятся въ видѣ прямоугольниковъ съ соотвѣтственно пропорціональными высотами. Такъ рядъ, приведенный на стр. 214, изображенъ на прилагае-

Къ стр. 214 – 215.



момъ чертежѣ: линія de представляетъ предѣлы измѣненія варіантъ отъ 363·5 до 368·5, линія ef — отъ 368·5 до 373·5 и т. д. Построенные на основаніяхъ de, ef и т. д. прямоугольники представляютъ площади, пропорціональныя частотамъ 1, 2, 2, 9 и т. д. Сумма площадей всѣхъ прямоугольниковъ представляетъ собою сумму всѣхъ случаевъ въ предѣлахъ отъ наименьшей (363·5) до наибольшей (448·5) варіанты.

Тотъ же самый рядъ можно изобразить и посредствомъ системы ординатъ. Если изъ середины основаній каждаго прямоугольника построить ординаты, изображающія высоты прямоугольниковъ, то ихъ величины будутъ также пропорціональны частотамъ: варіанты отъ d до e, отъ e до f и т. д., соотвѣтственно сведены къ одной центральной ординатѣ („нагружены“ на одну ординату), почему такой графическій способъ изображенія носитъ названіе системы „нагруженныхъ“ ординатъ (method of loaded ordinates). Если вершины ординатъ соединить прямыми линіями, то получится кривая распредѣленія частотъ. Площадь, ограниченная крайними ординатами, кривой и осью абсциссъ замѣняетъ собою сумму площадей прежнихъ прямоугольниковъ.

Наиболѣе точное графическое изображеніе мы получили бы въ томъ случаѣ, если бы вмѣсто прямоугольниковъ (или ихъ высотъ) представили частоты въ видѣ трапецій; это лучше соотвѣтствовало бы тому обстоятельству, что число случаевъ, отвѣчающихъ варіантамъ въ направленіи отъ d къ e, отъ e къ f и т. д., возрастаетъ (до максимума, а затѣмъ убываетъ).

Для системы прямоугольниковъ можно соста-

вить моменты, по аналогіи съ системою ординатъ. Пусть основаніе каждаго прямоугольника равно c и исходная точка взята на разстояніи $^1/_2$ c отъ начала перваго прямоугольника; въ такомъ случаѣ площадь r-аго прямоугольника равна $y_r c$, разстояніе средины его отъ исходной точки составляетъ rc, и произведеніе площади на разстояніе

$$y_r c \times rc;$$

сумма же такихъ произведеній для всѣхъ прямоугольниковъ

$$\Sigma y_r c \times rc$$

составитъ первый моментъ распредѣленія и

$$\Sigma y_r c \times (rc)^n$$

составитъ n-ый моментъ распредѣленія.

Если вмѣсто того, чтобы брать систему прямоугольниковъ, мы сосредоточимъ всѣ варіанты каждаго отдѣльнаго дѣленія на его средней ординатѣ, то вычисленіе моментовъ по такимъ ординатамъ даетъ извѣстную погрѣшность. Поэтому моменты, вычисленные по системѣ серединныхъ ординатъ требуютъ поправки, которая по опредѣленію Sheppard'a, выражается въ слѣдующемъ [1]). Если систему исправленныхъ моментовъ обозначить черезъ μ (для исходной точки отъ средины распредѣленія), то

$$\mu_2 = \nu_2 - {}^1/_{12}$$

$$\mu_3 = \nu_3$$

$$\mu_4 = \nu_4 - \frac{1}{2}\nu_2 + \frac{7}{240}.$$

[1]) W. Palin Elderton, Frequency-Curves a. Correlation. стр. 29.

Можно также представлять всю площадь разбитой не на прямоугольники, а на трапеціи. Въ такомъ случаѣ моменты, вычисленные по системѣ серединныхъ ординатъ требуютъ нѣсколько иной поправки [1]).

Для упрощенія обозначеній мы будемъ называть въ дальнѣйшемъ изложеніи:

---

[1]) K. Pearson, Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. II. Philos. Trans. of the Royal Soc. A. v. 186. P. 1. 1895, стр. 346—352, даетъ слѣдующее соотношеніе моментовъ для ординатъ, прямоугольниковъ и трапеціи, построенныхъ пропорціонально послѣдовательнымъ членамъ бинома $(p+q)^n$ resp. $(p+q)^n\, a/c$ для площадей, гдѣ a — вся площадь и c — единица мѣры:

для ординатъ . . ν_2 . . npq

„ „ . . ν_4 . . $npq + npq\,3(n-2)pq$

„ прямоуг. . . ν_2 . . $npq + \frac{1}{12}$

„ „ . . ν_4 . . $npq + npq\,3(n-2)pq + \frac{1}{2}npq + \frac{1}{80}$

„ трапецій . . ν_2 . . $npq + \frac{1}{6}$

„ „ . . ν_4 . . $npq + npq\,3(n-2)pq + npq + \frac{1}{15}$

или въ общемъ видѣ:

$$\nu_2 = npq + \varkappa_1$$

$$\nu_4 = \varkappa_2 + npq\,(\varkappa_2 + 3(n-2)pq)$$

причемъ $\varkappa$ получаетъ значеніе:

	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa_3$
для ординатъ . .	0	0	1
„ прямоугольн. .	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{80}$	1·5
„ трапецій . .	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	2

Duncker (o. c. стр. 19) на основаніи Pearson'a принимаетъ:

$$\nu_2 = \varkappa_2 + \frac{1}{6}$$

$$\nu_4 = \varkappa_4 + \varkappa_2 + \frac{1}{15}.$$

1) черезъ μ_1 μ_2 . . . μ_n — моменты распредѣленія для исходной точки, взятой отъ средины распредѣленія, какъ въ томъ случаѣ, когда они вычислены съ указанной выше поправкой, такъ и тогда, когда такой поправки не требуется;

2) черезъ ν_1 ν_2 . . . ν_n — моменты, взятые отъ всякой другой точки.

При такомъ обозначеніи моменты μ безъ поправки равняются:

$$\mu_0 = 1$$
$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$
$$\mu_5 = \nu_5 - 5\nu_1\nu_4 + 10\nu_1^2\nu_3 - 10\nu_1^3\nu_2 + 4\nu_1^5;$$

тѣ же моменты съ поправкой по системѣ прямоугольниковъ составятъ:

$$\mu_0 = 1$$
$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 - \frac{1}{12}$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 - \frac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1^2) + \frac{7}{240}$$
$$\mu_5 = \nu_5 - 5\nu_1\nu_4 + 10\nu_1^2\nu_3 - 10\nu_1^3\nu_2 + 4\nu_1^5 - {}^5/_6\,\mu_3.$$

4. ПРЕОБРАЗОВАНІЕ РЯДА ПОСРЕДСТВОМЪ ФУНКЦІИ ПРОСТѢЙШАГО ВИДА.

При помощи системы моментовъ мы можемъ данный рядъ ординатъ

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \ldots .$$

замѣнить рядомъ наиболѣе вѣроятныхъ ихъ выраженій, вычисленныхъ теоретически a priori, пользуясь формулой

$$\begin{aligned} y_1 &= a + b + c \\ y_2 &= a + 2b + 2^2c \\ y_3 &= a + 3b + 3^2c \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

или въ общемъ видѣ

$$y_x = a + xb + x^2c + x^3d + \ldots .$$

Возьмемъ исходную точку гдѣ-нибудь по серединѣ ряда y-овъ, сообразно этому опредѣлимъ x-ы, т. е. разстояніе каждаго y отъ исходной точки и выразимъ каждый y посредствомъ формулы $a+xb+x^2c+\ldots$, взявъ въ ней только три первыхъ члена. Результатъ изображенъ въ слѣдующей таблицѣ:

x	y	$= a+xb+x^2c$
$-n$	y_{-n}	$a-nb+n^2c$
$-(n-1)$	$y_{-(n-1}$	$a-(n-1)b+(n-1)^2c$
. . . .	. . . .	. . . . .
-2	y_{-2}	$a-2b+2^2c$
-1	y_{-1}	$a-1b+1^2c$
1	y_1	$a+1b+1^2c$
2	y_2	$a+2b+2^2c$
. . . .	. . . .	. . . . .
$n-1$	y_{n-1}	$a+(n-1)b+(n-1)^2c$
n	y_n	$a+nb+n^2c$

. . . . . I.

Сумма величинъ второй графы даетъ

$$\Sigma y = \nu_0$$

равную суммѣ величинъ третьей графы или

$$\nu_0 = 2.na + 2(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)c \quad \ldots\ldots \text{I.}$$

Взявъ такимъ же образомъ первый моментъ ряда y-овъ, получимъ слѣдующую таблицу

$$\begin{aligned}
-ny_{-n} &= -na + n^2b - n^3c \\
-(n-1)y_{-(n-1)} &= -(n-1)a + (n-1)^2b - (n-1)^3c \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-2y_{-2} &= -2a + 2^2b - 2^3c \\
-y_{-1} &= -a + b - c \\
y_1 &= +a + b + c \quad \ldots\ldots \text{II.} \\
2y_2 &= 2a + 2^2b + 2^3c \\
&\ldots\ldots\ldots \\
(n-1)y_{n-1)} &= (n-1)a + (n-1)^2b + (n-1)^3c \\
ny_n &= na + n^2b + n^3c
\end{aligned}$$

Суммированіемъ соотвѣтствующихъ строкъ, получимъ

$$\Sigma ny_n = \nu_1 = 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)b \quad \ldots\ldots \text{II.}$$

Для опредѣленія второго момента получимъ таблицу:

$$\begin{aligned}
(-n)^2y_{-n} &= n^2a - n^3b + n^4c \\
&\ldots\ldots\ldots \\
(-2)^2y_{-2} &= 2^2a - 2^3b + 2^4c \\
(-1)^2y_{-1} &= 1^2a - 1^3b + 1^4c \\
1^2y_1 &= 1^2a + 1^3b + 1^4c \quad \ldots\ldots \text{III} \\
2^2y_2 &= 2^2a + 2^3b + 2^4c \\
&\ldots\ldots\ldots \\
n^2y_n &= n^2a + n^3b + n^4c
\end{aligned}$$

Суммированіемъ получимъ

$$\Sigma n^2 y_n = \nu_2 = 2(1^2+2^2+\ldots+n^2)a+2(1^4+2^4+\ldots+n^4)c \ldots \text{ III.}$$

Наконецъ для третьяго момента получимъ:

$$\begin{aligned}
(-n)^3 y_{-n} &= -n^3 a + n^4 b - n^5 c \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(-2)^3 y_{-2} &= -2^3 a + 2^4 b - 2^5 c \\
(-1)^3 y_{-1} &= - a + b - c \\
1^3 y_1 &= + a + b + c \\
2^3 y_2 &= + 2^3 a + 2^4 b + 2^5 c \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n^3 y_n &= n^3 a + n^4 b + n^5 c
\end{aligned}$$

Суммированіе даетъ результатъ:

$$\Sigma n^3 y_n = \nu_3 = 2(1^4+2^4+\ldots+n^4)b \ldots \qquad \text{IV.}$$

Такимъ образомъ мы получаемъ систему уравненій:

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= 2na + 2(1^2+2^2+\ldots+n^2)c \\
\nu_1 &= 2(1^2+2^2+\ldots+n^2)b \\
\nu_2 &= 2(1^2+2^2+\ldots+n^2)a + 2(1^4+2^4+\ldots n^4)c \\
\nu_3 &= 2(1^4+2^4+\ldots+n^4)b,
\end{aligned}$$

которую можно было бы продолжить и далѣе. Эти уравненія могутъ быть представлены въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= 2na + 2(1^2+2^2+\ldots+n^2)c \\
&= 2n\left\{\frac{2na}{2n} + \frac{2(1^2+2^2+\ldots+n^2)c}{2n}\cdot\frac{n^2}{n^2}\right\} \\
&= 2n\left\{a + \frac{(1^2+2^2\ldots+n^2)cn^2}{n^3}\right\}
\end{aligned}$$

Принимая во вниманіе, что

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

и

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2},$$

каковое выраженіе, при n какъ угодно большомъ, стремится къ предѣлу $^1/_3$, при указанномъ предположеніи получимъ:

$$\nu_0 = 2n\left(a+\frac{cn^2}{3}\right).$$

Далѣе,

$$\nu_1 = 2(1^2+2^2+\ldots+n^2)b$$
$$= 2n^2\,\frac{2(1^2+2^2+\ldots+n^2)bn}{2n^3}$$

что при тѣхъ же предположеніяхъ дастъ:

$$\nu_1 = 2n^2\,\frac{bn}{3}$$

Равнымъ образомъ

$$\nu_2 = 2(1^2+2^2+\ldots+n^2)a+2(1^4+2^4+\ldots+n^4)c$$
$$= 2n^3\left\{\frac{2(1^2+2^2+\ldots+n^2)a}{2n^3}+\frac{2(1^4+2^4\ldots+n^4)c}{2n^3}\cdot\frac{n^2}{n^2}\right\}$$

при

$$\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$$ равномъ въ предѣлѣ $\frac{1}{5}$

$$\nu_2 = 2n^3\left(\frac{a}{3}+\frac{cn^2}{5}\right)$$

и наконецъ

$$\nu_3 = 2n^4\,\frac{bn}{5}.$$

Или:

$$\frac{1}{2n}\,\nu_0 = a+\frac{cn^2}{3}$$

$$\frac{1}{2n}\,\frac{\nu_1}{n} = \frac{bn}{3}$$

$$\frac{1}{2n}\,\frac{\nu_2}{n^2} = \frac{a}{3}+\frac{cn^2}{5}$$ и т. д.

Въ общемъ видѣ для выраженія

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots$$

мы получимъ рядъ уравненій, построенныхъ по общему типу

$$\frac{1}{2n}\frac{\nu_k}{n^k} = \frac{a}{k+1} + \frac{cn^2}{k+3} + \frac{en^4}{k+5}$$ для четныхъ k и k=0

и

$$\frac{1}{2n}\frac{\nu_k}{n^k} = \frac{bn}{k+2} + \frac{dn^3}{k+4} + \frac{fn^5}{k+6} \ldots$$ для нечетныхъ k.

Придавая k послѣдовательно значенія, равныя 1, 2, 3 . . . получимъ: [1])

$$\frac{1}{2n}\nu_0 = a + \frac{cn^2}{3} + \frac{en^4}{5} + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2n}\frac{\nu_1}{n} = \frac{bn}{3} + \frac{dn^3}{5} + \frac{fn^5}{7} + \ldots$$

$$\frac{1}{2n}\frac{\nu_2}{n^2} = \frac{a}{3} + \frac{cn^2}{5} + \frac{en^4}{7} + \ldots$$

$$\frac{1}{2n}\frac{\nu_3}{n^3} = \frac{bn}{5} + \frac{dn^3}{7} + \frac{fn^7}{9} + \ldots$$

$$\frac{1}{2n}\frac{\nu_4}{n^4} = \frac{a}{5} + \frac{cn^2}{7} + \frac{en^4}{9} + \ldots$$

$$\frac{1}{2n}\frac{\nu_5}{n^5} = \frac{bn}{7} + \frac{dn^3}{9} + \frac{fn^9}{11} + \ldots$$

. . . . . .

Эта система уравненій даетъ возможность опредѣлить желательное число постоянныхъ a, b, c . . . при помощи системы моментовъ. Такъ, взявъ только три члена

$$y = a + bx + cx^2$$

рѣшеніемъ указанныхъ уравненій получимъ:

$$a = \frac{3}{4}\left(\frac{3\nu_0}{2n} - \frac{5\nu_2}{2n^3}\right)$$

[1]) W. Palin Elderton, Frequency-Curves a. Correlation, стр. 30—31.

$$b = \frac{3\nu_1}{2n^2}$$

$$c = \frac{15}{4n^2}\left(-\frac{\nu_0}{2n} + \frac{3\nu_2}{2n^2}\right)$$

гдѣ $2n$ представляетъ собою число членовъ ряда и ν — моменты, взятые отъ исходной точки по серединѣ ряда.

Для численнаго примѣра мы получимъ слѣдующій результатъ.

y	x	yx	x^2	yx^2	
1	−7·5	− 7·5	56·25	2.56·25	
3	−6·5	19·5	42·25	4.42·25	
2	−5·5	−11·0	30·25	4.30·25	
7	−4·5	−31·5	20·25	9.20·25	
11	−3·5	−38·5	12·25	16.12·25	
10	−2·5	−25·0	6·25	18.6·25	
14	−1·5	−21·0	2·25	20.2·25	
11	−0·5	− 5·5	0·25	27.0·25	
16	0·5	8·0	0·25		
6	1·5	9·0	2·25		
8	2·5	20·0	6·25		
5	3·5	17·5	12·25		
2	4·5	9·0	20·25		
2	5·5	11·0	30·25		
1	6·5	6·5	42·25		
1	7·5	7·5	56·25		
8	$100=\nu_0$	$71=\nu_1$		$945=\nu_2$	$2n=16$

Откуда

$$a = \frac{3}{4}\left(\frac{3.100}{16} - \frac{5.945}{6.8^2}\right) = 10{\cdot}601$$

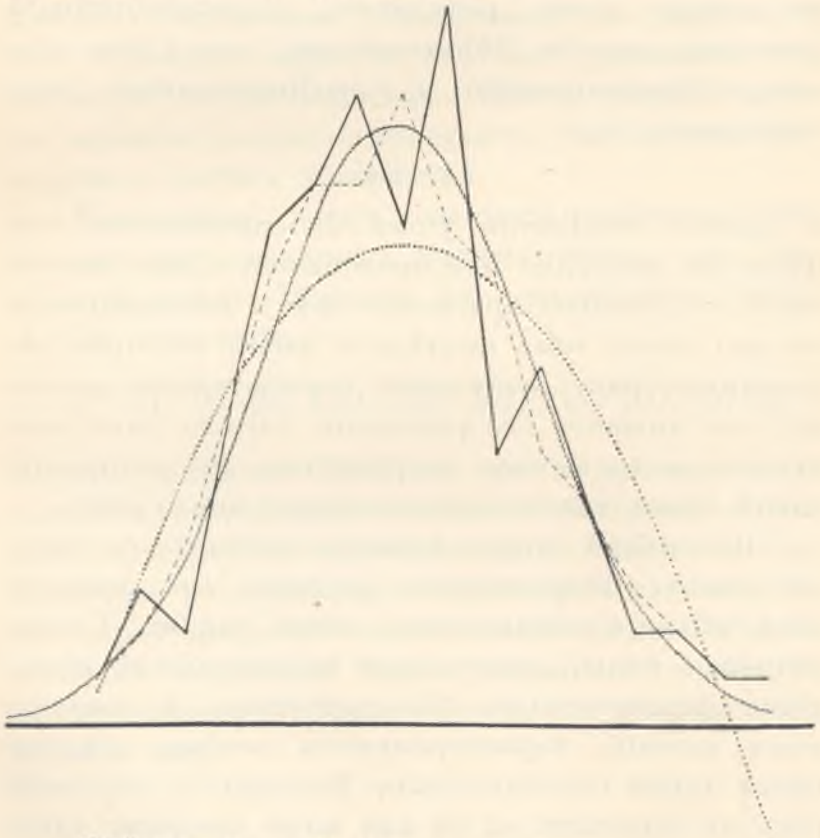
$$b = \frac{3.-71}{2.8^3} = -0{\cdot}208$$

$$c = \frac{15}{4.8^2}\left(-\frac{100}{16} + \frac{3.945}{2.8^3}\right) = -0{\cdot}204.$$

Найденныя значенія a, b, c даютъ слѣдующій преобразованный рядъ вмѣсто первоначальнаго:

y	y'	y	y'
1	0·7	16	10·4
3	3·3	6	9·8
2	5·6	8	8·8
7	7·4	5	7·4
11	8·8	2	5·5
10	9·8	2	3·3
14	10·4	1	0·6
11	10·6	1	−2·4

Различіе обоихъ рядовъ выступаетъ ясно при графическомъ ихъ изображеніи.



Дѣйствительный рядъ ——

Преобразованный рядъ . . . . .

5. ПРЕОБРАЗОВАНІЕ РЯДА ПОСРЕДСТВОМЪ НОРМАЛЬНОЙ КРИВОЙ.

Приведенный примѣръ указываетъ, что принятая для преобразованія ряда формула

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots$$

не всегда даетъ результатъ, удовлетворяющій условіямъ задачи. Дѣйствительно, хотя сумма членовъ дѣйствительнаго и преобразованнаго ряда совпадаетъ, т. е.

$$\Sigma y = \Sigma y',$$

и законъ измѣненія у-овъ, въ зависимости отъ мѣста въ рядѣ, для преобразованнаго ряда выступаетъ съ бо́льшею правильностью и наглядностью, но при всемъ томъ послѣдній членъ въ преобразованномъ ряду получаетъ отрицательное значеніе, что лишаетъ его реальнаго смысла, такъ какъ буква «i» не можетъ встрѣчаться въ какой-либо сотнѣ буквъ текста отрицательное число разъ.

Въ выборѣ формы функціи, наиболѣе соотвѣтствующей эмпирическимъ рядамъ, мы связаны извѣстными особенностями этихъ рядовъ. Статистическіе ряды, получаемые въ результатѣ измѣренія органическихъ, біологическихъ и соціальныхъ явленій, характеризуются вообще слѣдующими двумя особенностями. Во-первыхъ, варіанты ряда не выходятъ за тѣ или иные предѣлы; такъ, число какихъ-либо органовъ, величина ихъ, продолжительность жизни, количество рожденій, цѣны товаровъ и т. д. имѣютъ ту или иную конечную

минимальную величину, какъ равнымъ образомъ и конечную максимальную, т. е. имѣютъ какую-нибудь опредѣленную малую и большую величину, меньше и больше которой въ дѣйствительности не встрѣчается. Иначе говоря, частота варіантъ, выходящихъ за предѣлы тѣхъ или иныхъ величинъ, равняется 0. Во-вторыхъ, въ этихъ предѣлахъ варіанты какой-либо одной (рѣдко двухъ еще рѣже трехъ) величинъ встрѣчаются въ наибольшемъ количествѣ, тогда какъ число другихъ варіантъ обыкновенно уменьшается по мѣрѣ того, какъ величины варіанты все болѣе удаляются отъ наиболѣе частой величины. Иначе говоря, частоты варіантъ сперва возрастаютъ, достигаютъ максимума и затѣмъ убываютъ.

Указаннымъ двумъ условіямъ отвѣчаетъ прежде всего рядъ величинъ, получающихся отъ разложенія бинома Ньютона въ простѣйшемъ видѣ: $(1+1)^n$, напримѣръ:

$$(1+1)^{10}=1,\ 10,\ 45,\ 120,\ 210,\ 252,\ 210,\ 120,\ 45,\ 10,\ 1.$$

Именно биномомъ Ньютона мы пользовались въ началѣ изложенія для того, чтобы построить a priori рядъ величинъ, обнаруживающихъ такую же правильность распредѣленія отдѣльныхъ членовъ, какая характеризуетъ статистическіе ряды. Въ дальнѣйшемъ изложеніи было указано на то, что та же правильность точнѣе выражается посредствомъ функціи вида

$$F=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt.$$

Послѣдовательные члены функціи этого вида даютъ симметрическую кривую, которая проходитъ черезъ максимальное значеніе и въ обѣ стороны опускается до оси абсциссъ на безконечно малое разстояніе.

Обѣ функціи построены прежде всего на предположеніи, что мы имѣемъ дѣло со всевозможными комбинаціями конечнаго или безконечно большого числа отдѣльныхъ погрѣшностей, падающихъ съ одинаковою вѣроятностью какъ въ одну, такъ и въ другую сторону. Такъ какъ легко и наглядно можно представить, что «повторно наблюдаемая величина подвергается вліянію случайныхъ уклоненій, которыя съ одинаковою легкостью и въ одинаковой степени дѣйствуютъ какъ въ положительную, такъ и въ отрицательную сторону» [1]), то естественно, что биноміальная кривая и логариѳмическая кривая Gauss'a были первыми способами объясненія правильности эмпирическихъ рядовъ. Эти способы мы встрѣчаемъ уже у Quetelet, на нихъ же построены методологическія изслѣдованія Lexis'a.

Какъ биноміальная кривая типа $(1+1)^n$, такъ и кривая Gauss'a симметричны. Между тѣмъ эмпирическіе ряды сплошь и рядомъ представляютъ большую или меньшую асимметрію. Иногда эта асимметрія столь ничтожна, что практически рядъ можетъ быть принятъ за симметрическій; но во многихъ случаяхъ асимметрія достигаетъ значительныхъ размѣровъ, такъ что подведеніе такихъ рядовъ подъ формулы симметрическихъ функцій естественно должно вызвать сомнѣнія. Правда,

[1]) Слова Lexis'a, см. Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- u. Moralstatistik, 1903, стр. 119.

иногда асимметрія является результатомъ того, что въ одномъ рядѣ смѣшаны два различныхъ ряда болѣе или менѣе близкихъ другъ къ другу величинъ. Расчлененіемъ такого смѣшаннаго ряда на два отдѣльныхъ асимметрія въ значительной степени или даже вполнѣ устраняется. Классическими образцами такого рода расчлененія являются изслѣдованія Quetelet и Alph. Bertillon'a относительно роста, изслѣдованія Lexis'a — относительно нормальной продолжительности жизни, продолженныя и обобщенныя Pearson'омъ [1]). H. Westergaard [2]) считаетъ такого рода расчлененіе одной изъ главныхъ задачъ обработки статистическаго матеріала и на многочисленныхъ примѣрахъ показываетъ, что многіе ряды обнаруживаютъ нормальную дисперсію, если принять во вниманіе ихъ составной характеръ и сообразно съ этимъ вычислять мѣру уклоненія. Въ виду этихъ соображеній господствующее мнѣніе признаетъ, что симметрическая функція является вполнѣ подходящей формулой для теоретическаго изслѣдованія эмпирическихъ рядовъ [3]). Асимметрія многихъ рядовъ не ускользнула, разумѣется, отъ вниманія Quetelet, Lexis'a, Westergaard'a, но они не придавали этому обстоятельству особеннаго значенія [4]).

---

[1]) Lexis, Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft, 1887. K. Pearson, The Chances of Death etc., v. 1, 1897, стр. 26—27.

[2]) Harald Westergaard, Grundzüge der Theorie der Statistik 1890.

[3]) Lexis, Anthropologie u. Anthropometrie въ Handw. der Staatswiss., 2 Aufl., 1 B., стр. 397: „der Nachweis einer auch nur annähernd hervortretenden Symmetrie mehr theoretisches Interesse hat, als die genaue Darstellung einer Gruppierung durch eine unsymmetrische Kurve". H. Westergaard, Grundzüge etc, стр. 70.

[4]) Lexis, Abhandlungen zur Theorie etc. стр. 119—126.

Однако расчлененіе составного ряда не всегда можетъ дать два симметричныхъ ряда; эти ряды также легко могутъ оказаться асимметричными, какъ и множество нерасчленяющихся статистическихъ рядовъ. Вообще, по справедливому замѣчанію проф. Pearson'a, нѣкоторая степень асимметріи является, повидимому, характеристикой почти всѣхъ статистическихъ рядовъ. Вслѣдствіе этого симметрическія формулы вполнѣ точно отвѣчаютъ дѣйствительности только въ рѣдкихъ случаяхъ; часто онѣ могутъ быть примѣняемы съ практически небольшой или даже ничтожной погрѣшностью къ эмпирическимъ рядамъ съ малой асимметріей; но во многихъ случаяхъ симметричныя формулы совершенно не соотвѣтствуютъ эмпирическому матеріалу. Поэтому необходимо придать функціи такой видъ, который допускалъ бы примѣненіе ея и къ рядамъ съ очевидной асимметріей.

Задача эта исполнена K. Pearson'омъ; онъ показалъ, что симметрическая формула Gauss'a представляетъ собою частный случай кривой, имѣющій мѣсто при опредѣленныхъ ограничительныхъ условіяхъ, сравнительно рѣдко отвѣчающихъ дѣйствительности; рядомъ съ этой формулой существуетъ рядъ другихъ формулъ; подобно тому, какъ формула Gauss'a обобщаетъ биномъ вида $(1+1)^n$, такъ послѣднія отвѣчаютъ болѣе общему случаю бинома $(p+q)^n$, когда p не равно q. Причемъ всѣ формулы представляютъ собою частные случаи развитія одной и той же функціи [1]).

---

[1]) K. Pearson, Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. II. Skew Variation in Homogeneous Material. Philosoph. Trans. of the Royal Society. A. Vol. 186. P. 1, 1895, стр. 343 и сл.

Логическій ходъ изслѣдованій Pearson'a состоитъ въ слѣдующемъ [1]).

Въ статистическомъ рядѣ, представляющемъ собою частоты, отвѣчающія различнымъ величинамъ какого-либо явленія или объекта, мы принимаемъ частоту (y) за функцію величины явленія или объекта, сравнительную же величину послѣдняго измѣряемъ разстояніемъ (x) отъ нѣкоторой исходной точки; иначе говоря, мы принимаемъ, что

$$y = f(x).$$

Эта функція должна удовлетворять слѣдующимъ условіямъ: въ началѣ и въ концѣ ряда y долженъ равняться 0 (иначе говоря, должна быть конечная наименьшая и такая же наибольшая варіанта, или внѣ опредѣленныхъ конечныхъ предѣловъ варіанты не встрѣчаются: ихъ частоты $= 0$); гдѣ-нибудь въ серединѣ ряда y долженъ достигать своего максимальнаго значенія. То же самое мы выразимъ, если скажемъ, что скорость измѣненія функціи въ трехъ мѣстахъ должна равняться 0: въ началѣ и концѣ ряда (гдѣ $y = 0$) и въ серединѣ (гдѣ ростъ кривой останавливается въ максимальной точкѣ).

Скорость измѣненія функціи измѣряется отношеніемъ прироста функціи (y) къ вызвавшему этотъ приростъ приросту независимаго перемѣннаго (x). Если мы предположимъ, что функція измѣняется непрерывно, такъ что безконечно малому приросту независимаго перемѣннаго отвѣчаетъ безконечно малое приращеніе функціи, то скорость измѣненія функціи въ предѣлѣ будетъ выражаться отношеніемъ безконечно малаго при-

[1]) W. Palin Elderton, Frequency-Curves and Correlation. London.

роста функціи (y) или dy къ безконечно малому приросту независимаго перемѣннаго (x) или dx, или $\frac{dy}{dx}$, каковое выраженіе въ трехъ случаяхъ должно, согласно условію, обращаться въ 0.

Это условіе будетъ, напримѣръ, исполнено, если мы положимъ, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(x+a)}{F(x)}$$

ибо $\frac{dy}{dx}$ обращается въ 0 при $y = 0$, что имѣетъ мѣсто въ двухъ случаяхъ, и при $x = -a$.

Расположивъ F (x) по восходящимъ степенямъ x, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(x+a)}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots},$$

или

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots}$$

Ограничившись въ знаменателѣ только тремя членами $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ и принимая во вниманіе, что

$$\frac{1}{y} = \frac{d \log y}{dy},$$

получимъ:

$$\frac{d \log y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

или

$$\frac{d \log y}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}.$$

По этому отношенію безконечно малаго приращенія logy къ безконечно малому приращенію x, или такъ называемому дифференціальному отношенію, которое является производной функціей отъ какой то первоначальной конечной функціи, требуется найти послѣднюю. Для того, чтобы изъ безко-

нечно малыхъ приращеній получить всю искомую величину, необходимо суммировать всѣ безконечно малыя приращенія, которыхъ, очевидно, должно быть безконечно большое число, чтобы дать нѣкоторую конечную величину. Обозначивъ это дѣйствіе знакомъ интеграла, получимъ:

$$\int \frac{d \log y}{dx} dx = \int \frac{x+a}{b_0+b_1 x+b_2 x^2} dx.$$

Извѣстно, что

$$\int \frac{d \log y}{dx} dx = \log y;$$

во второй же части сдѣлаемъ произвольное допущеніе, что $b_1=b_2=0$. Въ такомъ случаѣ въ результатѣ получимъ

$$\log y = \int \frac{x+a}{b_0} dx.$$

Найти $\int \frac{x+a}{b_0} dx$ или проинтегрировать указанное выраженіе, принимая за перемѣнную x, значитъ найти такое выраженіе, которое будучи подвергнуто обратному дѣйствію, т. е. дифференцированію, даетъ $\frac{x+a}{b_0}$. При дифференцированіи члены выраженія, не содержащіе перемѣннаго (x), обращаются въ 0, а члены, содержащіе x, получаютъ въ видѣ коэффиціента величину, представляющую степень перемѣннаго, самое же перемѣнное понижается въ своей степени на 1. Поэтому

$$\int \frac{x+a}{b_0} dx$$

будетъ равняться

$$\frac{x^2}{2b_0} + \frac{ax}{b_0} + \text{ постоянная } (C)$$

или

$$\frac{x^2}{2b_0} + \frac{2ax}{2b_0} + \frac{a^2}{2b_0} + \text{ постоянная } (c)$$

Такимъ образомъ

$$\log y = \frac{(x+a)^2}{2b_0} + c.$$

Но извѣстно, что если

$$\log z = t,$$

то

$$z = e^t;$$

поэтому и въ данномъ случаѣ

$$y = e^{\frac{(x+a)^2}{2b_0} + c}$$

что, въ свою очередь, можетъ быть представлено въ видѣ:

$$y = e^c e^{\frac{(x+a)^2}{2b_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Въ этомъ выраженіи $x+a$ представляетъ собою разстояніе искомой ординаты y отъ нѣкоторой точки. Если мы пріймемъ, что

$$x+a = 0,$$

то искомой ординатой будетъ ордината, выходящая изъ принятой точки, ибо разстояніе ординаты отъ точки $= 0$. Но согласно условію, при $x+a = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, т. е. мы получаемъ точку, гдѣ кривая достигаетъ максимума. Иначе говоря, при допущеніи $x+a = 0$ искомой ординатой будетъ максимальная ордината или ордината, отвѣчающая наиболѣе частому значенію варіанты. Обозначивъ ее черезъ y_0, получимъ

$$y_0 = e^c e^0 = e^c .$$

Если разстояніе всякой другой ординаты отъ ординаты y_0, которую пріймемъ за исходную, равняется x, то $x+a$ представляетъ разстояніе тѣхъ же ординатъ отъ нѣкоторой другой точки. Если этой другой точкой будемъ считать середину распредѣленія, то a будетъ представлять собою разстояніе наиболѣе частой варіанты отъ средней

ариѳметической или разстояніе между наибольшей ординатой и ординатой, отвѣчающей серединѣ распредѣленія. Опредѣлимъ это разстояніе, а равнымъ образомъ другую постоянную (b_0) формулы (I) въ моментахъ распредѣленія.

Для этой цѣли воспользуемся первоначальнымъ равенствомъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(a+x)}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots},$$

которое представимъ въ видѣ:

$$(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots)\frac{dy}{dx} = y(x+a).$$

Умноживъ обѣ части на x^n, проинтегрируемъ по x:

$$\int x^n(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots)\frac{dy}{dx}\,dx = \int y(x+a)x^n\,dx.$$

Интегрируя лѣвую половину по частямъ, принявъ за одну часть $\frac{dy}{dx}$, по формулѣ $\int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx = uv - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$; и правую, какъ сумму yx^{n+1} и yax^n, по формулѣ $\int[f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int\varphi(x)\,dx$; получимъ:

$$x^n(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots)y - \int[nb_0x^{n-1}+(n+1)b_1x^n + (n+2)b_2x^{n+1}+\ldots]\,ydx = \int yx^{n+1}\,dx + \int ayx^n\,dx.$$

Когда y за предѣлами ряда равенъ 0, то выраженіе $x^n(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots)y$ превратится въ 0, и формула получаетъ видъ:

$$-\int[nb_0x^{n-1}+(n+1)b_1x^n+\ldots]ydx = \int yx^{n+1}dx + \int ayx^n\,dx.$$

Выраженіе

$$\int yx^n dx$$

означаетъ сумму произведеній всѣхъ послѣдовательныхъ ординатъ (соотвѣтствующихъ каждому послѣдовательному безконечно малому приращенію x) на x^n (т. е. разстояніе каждой ординаты отъ исходной точки въ n-ой степени); иначе говоря указанное выраженіе представляетъ собою n-ый моментъ распредѣленія или μ_n; такимъ же образомъ

$$\int yx^{n-1} dx$$

представляетъ n−1-ый моментъ распредѣленія или μ_{n-1} и т. д.

Слѣдовательно предыдущее равенство можетъ быть представлено въ видѣ:

$$-nb_0\mu_{n-1} - (n+1)b_1\mu_n - (n+2)b_2\mu_{n+1} - \ldots = \mu_{n+1} + a\mu_n$$

или

$$a\mu_n + nb_0\mu_{n-1} + (n+1)b_1\mu_n + (n+2)b_2\mu_{n+1} + \ldots = -\mu_{n+1}.$$

Придавая послѣдовательно n значенія 0, 1, 2, 3 . . . s, мы можемъ получить s+1 уравненій, которыя даютъ возможность опредѣлить s+1 неизвѣстныхъ a, b_0, b_1, b_2 . . . и выразить ихъ въ моментахъ распредѣленія, а именно:

$$a\mu_0 + 0.b_0 + b_1\mu_0 + 2b_2\mu_1 + \ldots = -\mu_1$$
$$a\mu_1 + b_0\mu_0 + 2b_1\mu_1 + 3b_2\mu_2 + \ldots = -\mu_2$$
$$a\mu_2 + 2b_0\mu_1 + 3b_1\mu_2 + 4b_2\mu_3 + \ldots = -\mu_3$$

и т. д.

Если мы ограничимся двумя неизвѣстными a и b_0, полагая остальныя $b_1 = b_2 = \ldots = 0$, то взявъ два первыхъ уравненія, получимъ

$$a\mu_0 = -\mu_1$$
$$a\mu_1 + b_0\mu_0 = -\mu_2.$$

Такъ какъ приведенная выше система уравненій имѣетъ мѣсто для моментовъ, взятыхъ отъ любой исходной точки, то принявъ за исходную точку середину распредѣленія и имѣя въ виду, что въ такомъ случаѣ $\mu_0 = 1$ и $\mu_1 = 0$, подставимъ эти величины въ два данныхъ уравненія и получимъ:

$$a = o$$

$$b_0 = -\mu_2.$$

Такъ какъ a представляетъ собою разстояніе максимальной ординаты отъ средины распредѣленія, то мы видимъ, что при сдѣланныхъ нами допущеніяхъ, $x + a = x$, т. е. максимальная ордината y_0 совпадаетъ съ ординатой (y_m) середины распредѣленія. Формула I (стр. 234), послѣ подстановки найденныхъ значеній, получаетъ выраженіе:

$$y = y_0 e^{-x^2/2\mu_2}.$$

Принимая во вниманіе, что второй моментъ отъ средины распредѣленія представляетъ не что иное, какъ квадратъ среднеквадратическаго уклоненія (стр. 202) или $\mu_2 = \delta^2$, мы можемъ написать

$$y = y_0 e^{-x^2/2\delta^2}.$$

Полученное выраженіе представляетъ собою не что иное, какъ формулу нормальной кривой Gauss'a. Суммированіе всѣхъ членовъ по безконечно малымъ приращеніямъ x даетъ извѣстную уже (стр. 76) формулу

$$F = \frac{2}{\sqrt{2\pi spq}} \int_0^i e^{-\frac{x^2}{2spq}} dx, \quad \text{или} \quad F = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt,$$

въ которой γ представляетъ предѣлъ, до котораго суммируются члены и

$$\gamma = \frac{1}{\delta\sqrt{2}},$$

$$t^2 = \frac{x^2}{2\delta^2}.$$

Исходная ордината y_0, какъ уже было сказано, является наибольшей, т. е. отвѣчаетъ наиболѣе частой варіантѣ, и вмѣстѣ съ тѣмъ является ординатой середины распредѣленія, т. е. средней ариѳметической варіанты; въ тоже время, въ виду полной симметріи ряда, она лежитъ въ его серединѣ, т. е. отвѣчаетъ центральной варіантѣ. Величина y_0 опредѣляется изъ слѣдующаго условія. Если все данное число случаевъ N какого-либо явленія пріймемъ за площадь кривой, то

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} y_0 e^{-x^2/2\delta^2} dx,$$

т. е. площадь получается суммированіемъ всѣхъ ординатъ по безконечно малымъ приращеніямъ x. Такъ какъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 \cdot \frac{1}{2\delta^2}} = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2\delta^2},$$

то

$$N = y_0 \delta \sqrt{2\pi}$$

и

$$y_0 = \frac{N}{\delta\sqrt{2\pi}} = \frac{N}{\sqrt{2\pi\gamma_2}}.$$

6. ВЫВОДЪ АСИММЕТРИЧНОЙ КРИВОЙ.

Изъ сказаннаго явствуетъ, что нормальная кривая, которую мы въ предыдущемъ изложеніи исключительно имѣли въ виду при теоретическомъ изслѣдованіи рядовъ, построенныхъ на случайныхъ уклоненіяхъ, представляетъ собою въ дѣйствительности частный случай нѣкоторой общей формулы, а именно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+a)}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots}$$

и получается при допущеніи, что

$$b_1 = b_2 = \ldots = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при иныхъ допущеніяхъ получится рядъ другихъ кривыхъ того же общаго рода, но иного типа. Дѣйствительно, взявъ кромѣ a и b_0 еще одну постоянную b_1 и полагая $b_2 = b_3 = \ldots = 0$, мы получимъ кривую другого типа.

Взявъ равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+a)}{b_0+b_1x}$$

и поступая аналогично предыдущему, получимъ:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{b_0+b_1x}$$

$$\frac{d\log y}{dx} = \frac{x+a}{b_0+b_1x}$$

$$\int \frac{d\log y}{dx}\,dx = \int \frac{x+a}{b_0+b_1x}\,dx$$

$$\log y = \int \frac{x+a}{b_0+b_1x}\,dx.$$

Выраженіе $\frac{x+a}{b_0+b_1 x}$ можно представить въ видѣ:

$$\frac{1}{b_1} + \frac{a - \frac{b_0}{b_1}}{b_1 x + b_0} ;$$

въ такомъ случаѣ

$$\log y = \int \left(\frac{1}{b_1} + \frac{a - \frac{b_0}{b_1}}{b_1 x + b_0} \right) dx.$$

Принимая во вниманіе, что

$$\int (A+B)\, dx = \int A dx + \int B dx,$$

получимъ:

$$\int \left(\frac{1}{b_1} + \frac{a - \frac{b_0}{b_1}}{b_1 x + b_0} \right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{b_1} dx + \int \frac{a - \frac{b_0}{b_1}}{b_1 x + b_0} dx.$$

Но $\int \frac{1}{b_1} dx = \frac{1}{b_1} x$, выраженіе же $\frac{a - \frac{b_0}{b_1}}{b_1 x + b_0}$ можетъ быть представлено въ видѣ $\left(a - \frac{b_0}{b_1}\right) \cdot \frac{1}{b_1 x + b_0}$ и тогда

$$\int \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right) \cdot \frac{1}{b_1 x + b_0} dx = \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right) \frac{1}{b_1} \log (b_1 x + b_0).$$

Слѣдовательно

$$\log y = \int \left(\frac{1}{b_1} + \frac{a - \frac{b_0}{b_1}}{b_1 x + b_0} \right) dx$$

$$= \frac{x}{b_1} + \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right) \frac{1}{b_1} \log (b_1 x + b_0) + c.$$

Извѣстно, что когда

$$\log y = a + b \log c$$

то

$$y = e^a c^b,$$

слѣдовательно въ данномъ случаѣ

$$y = e^{c}\, e^{x/b_1} (b_0 + b_1 x)^{1/b_1 \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (II).$$

Если въ этомъ выраженіи положимъ $x + a = 0$ или $x = -a$, то y получитъ значеніе максимальной ординаты (y_0) и будетъ равно:

$$y_0 = e^{c}\, e^{-a/b_1} (b_0 - b_1 a)^{1/b_1 \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right)},$$

откуда

$$e^{c} = y_0 \frac{1}{e^{-a/b_1} (b_0 - b_1 a)^{1/b_1 \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right)}}$$

Подставивъ значеніе e^{c} въ формулу II, мы должны принять во вниманіе, что, беря за исходную точку максимальную ординату y_0, мы должны уменьшить разстояніе всѣхъ ординатъ отъ этой исходной точки на a, т. е. вмѣсто $x + a$ мы должны взять x и вмѣсто x мы должны взять $x - a$. Вслѣдствіе этого выраженіе II получитъ видъ:

$$y = y_0 \frac{e^{\frac{x-a}{b_1}} [b_0 + b_1 (x-a)]^{1/b_1 \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right)}}{e^{-\frac{a}{b_1}} (b_0 - b_1 a)^{1/b_1 \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right)}} \quad \ldots\ldots \quad II^{a}$$

Раздѣливъ

$$e^{\frac{x-a}{b_1}} \text{ на } e^{-\frac{a}{b_1}}$$

получимъ

$$e^{\frac{x}{b_1} - \frac{a}{b_1} + \frac{a}{b_1}} = e^{x/b_1};$$

выраженіе $b_0 + b_1(x-a)$ можно представить въ видѣ

$$b_0 + b_1 x - b_1 a = \left(x + \frac{b_0}{b_1} - a\right) b_1$$

и аналогично

$$b_0 - b_1 a = \left(\frac{b_0}{b_1} - a\right) b_1 .$$

Въ такомъ случаѣ

$$\frac{b_0 + b_1 x - b_1 a}{b_0 - b_1 a} = \frac{x + \frac{b_0}{b_1} - a}{\frac{b_0}{b_1} - a} = \frac{x}{\frac{b_0}{b_1} - a} + 1$$

и уравненіе II^a получитъ видъ:

$$y = y_0 e^{x/b_1} \left(1 + \frac{x}{\frac{b_0}{b_1} - a}\right)^{1/b_1 \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right)} \ldots . \qquad \text{II}^b.$$

Въ этомъ выраженіи остается опредѣлить постоянныя a, b_0, b_1 при помощи моментовъ.

Взявъ изъ извѣстной уже системы уравненій три первыхъ уравненія:

$$a\mu_0 + 0b_0 + b_1\mu_0 = -\mu_1$$
$$a\mu_1 + b_0\mu_0 + 2b_1\mu_1 = -\mu_2$$
$$a\mu_2 + 2b_0\mu_1 + 3b_1\mu_2 = -\mu_3$$

и принимая въ нихъ $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$,

получимъ

$$a + b_1 = 0$$
$$b_0 = -\mu_2$$
$$-b_1\mu_2 + 3b_1\mu_2 = -\mu_3$$

откуда

$$a = \frac{\mu_3}{2\mu_2}$$
$$b_0 = -\mu_2$$
$$b_1 = -\frac{\mu_3}{2\mu_2} .$$

Подставляя найденныя величины въ уравненіе Π^0, получимъ:

$$y = y_0 e^{-\frac{2\mu_2 x}{\mu_3}} \left(1 + \frac{x}{\frac{2\mu_2^2}{\mu_3} - \frac{\mu_3}{2\mu_2}}\right)^{\left(\frac{4\mu_2^2}{\mu_3^2} - 1\right)}$$

Полагая

$$\frac{2\mu_2}{\mu_3} = \gamma$$

$$\frac{2\mu_2^2}{\mu_3} - \frac{\mu_3}{2\mu_2} = \alpha$$

$$\gamma\alpha = \frac{2\mu_2}{\mu_3}\left(\frac{2\mu_2^2}{\mu_2} - \frac{\mu_3}{2\mu_2}\right) = \frac{4\mu_2^3}{\mu_3^2} - 1$$

получимъ:

$$y = y_0 e^{-\gamma x}\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma\alpha}.$$

Эта кривая. въ отличіе отъ нормальной, асимметрична: ордината средней ариѳметической точки лежитъ вправо отъ максимальной ординаты на разстояніи $a = \mu_3/2\mu_2$. Слѣва кривая начинается отъ абсциссы, поднимается до максимума и затѣмъ менѣе круто, чѣмъ съ лѣвой стороны, опускается къ абсциссѣ, приближаясь къ ней справа на безконечно малое разстояніе, подобно тому, какъ у нормальной кривой это имѣетъ мѣсто съ обѣихъ сторонъ. Начало кривой съ лѣвой стороны находится на разстояніи $\alpha = \frac{2\mu_2^2}{\mu_3} - \frac{\mu_3}{2\mu_2}$ отъ максимальной ординаты, ибо, если мы положимъ $x = -\alpha$, то

$$y = y_0 e^{-\gamma x}(1-1)^{\gamma\alpha} = 0,$$

т. е. соотвѣтствующая ордината $= 0$.

Максимальная ордината y_0 этого типа опредѣляется также, какъ для случая нормальной кривой, но получаетъ болѣе сложное выраженіе. Если N представляетъ все число случаевъ, $p = \gamma\alpha$, $z =$

$\gamma(\alpha+x)$, начало кривой находится на разстояніи $-\alpha$ отъ максимальной ординаты (и при $x=-\alpha, y=0$), а правая вѣтвь уходитъ въ безконечность, то

$$N=\int_{-\alpha}^{\infty} y_0\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma\alpha} e^{-\gamma x}\,dx$$

можетъ быть представлено въ видѣ

$$N=\int_{0}^{\infty} y_0 \frac{\gamma^{\gamma\alpha}(\alpha+x)^{\gamma\alpha} e^{\gamma\alpha} \cdot \gamma}{\gamma^{\gamma\alpha}\alpha^{\gamma\alpha} e^{\gamma\alpha} e^{\gamma x}\gamma}\,dx.$$

Принимая во вниманіе, что

$$\frac{dz}{dx}=\gamma \text{ или } \gamma dx=dz,$$

получимъ:

$$N=\int_{0}^{\infty} y_0\left[\gamma(\alpha+x)\right]^{\gamma\alpha}\alpha^{-\gamma\alpha} e^{-\gamma(\alpha+x)+\gamma\alpha}\gamma^{-(\gamma\alpha+1)}\,dz$$

$$=\int_{0}^{\infty} y_0 z^p \alpha^{-p} e^{-z+p}\gamma^{-(p+1)}\,dz$$

$$N = y_0\frac{e^p}{\gamma p^p}\int_{0}^{\infty} z^p e^{-z}\,dz$$

$$= y_0\frac{\alpha e^p}{\alpha\gamma p^p}\int_{0}^{\infty} z^p e^{-z}\,dz$$

$$= y_0\frac{\alpha e^p}{p^{p+1}}\,\Gamma(p+1)\,.$$

Отсюда

$$y_0=\frac{N p^{p+1}}{\alpha e^p\,\Gamma(p+1)}\,.$$

Выраженіе $\Gamma(p+1)$ представляетъ собою т. н. гамма — функцію Euler'a, для вычисленія которой приложены таблицы, способъ же вычисленія показанъ ниже (см. типъ I).

7. ТИПЫ КРИВЫХЪ.

Различіе между формулой кривой двухъ указанныхъ типовъ является результатомъ вида выраженія $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ въ знаменателѣ функціи

$$\frac{x+a}{b_0+b_1 x+b_2 x^2},$$

подлежащей интегрированію. Для одного типа мы принимаемъ $b_1 = b_2 = 0$, и выраженіе въ знаменателѣ получаетъ видъ: b_0, а $\int \frac{d \log y}{dx} dx$ превращается въ

$$y = y_0 \, e^{-x^2/2\mu_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha).$$

Если же принять только $b_2 = 0$, то въ знаменателѣ получается $b_0 + b_1 x$, что даетъ результатъ:

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\gamma x} e^{-\gamma x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta).$$

Выраженіе $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ разлагается, какъ извѣстно, на множителей, представляющихъ разности аргумента x и его корней, т. е. значеній аргумента, обращающихъ функцію въ 0, а именно:

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = b_2 [x - R_1][x - R_2]$$
$$= b_2 \left[x - \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4 b_0 b_2}}{2 b_2}\right]\left[x - \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4 b_0 b_2}}{2 b_2}\right].$$

Поэтому $\frac{x+a}{b_0+b_1 x+b_2 x^2}$ можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{b_2} \cdot \frac{x+a}{\left[x - \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4 b_0 b_2}}{2 b_2}\right]\left[x - \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4 b_0 b_2}}{2 b_2}\right]}$$

и всякаго рода допущенія относительно постоянныхъ b_0, b_1, b_2 даютъ тѣ или иныя значенія корнямъ выраженія въ знаменателѣ. Различныя значенія, какія получаютъ корни функціи $b_0+b_1x+b_2x^2$ при тѣхъ или иныхъ допущеніяхъ относительно b_0, b_1, b_2, находятъ себѣ отраженіе въ значеніяхъ, какія получаетъ выраженіе

$$\frac{b_1^2}{4b_0b_2}$$

при сдѣланныхъ допущеніяхъ. Поэтому изслѣдованіе значенія корней указанной функціи можетъ быть сведено къ изслѣдованію значенія выраженія $\frac{b_1^2}{4b_0b_2}$; каждому значенію послѣдняго будутъ отвѣчать опредѣленныя значенія корней функціи, а значеніямъ корней — опредѣленный результатъ при интегрированіи функціи въ данномъ ея значеніи. А такъ какъ въ результатѣ интегрированія получается тотъ или иной типъ формулы кривой, то выраженіе $\frac{b_1^2}{4b_0b_2}$ получаетъ характеръ критерія, по величинѣ котораго мы можемъ опредѣлить типъ кривой, соотвѣтствующій различнымъ допущеніямъ относительно b_0, b_1, b_2.

Такъ типъ кривой (α) отвѣчаетъ значенію критерія $= 0$; типъ кривой (β) — значенію критерія$=\infty$. Обозначивъ критерій $\frac{b_1^2}{4b_0b_2}$ буквой k и придавая ему всевозможныя значенія, мы получимъ слѣдующіе типы кривыхъ.

1. $\frac{b_1^2}{4b_0b_2} < 0$, т. е. представляетъ величину отрицательную; такъ какъ b_1^2 всегда положительная величина, то $k < 0$ можетъ быть лишь при отрицательномъ значеніи $4b_0b_2$ (т. е. когда $4b_0b_2 =$

$-\sqrt{(4b_0b_2)^2}$). Въ такомъ случаѣ $-(4b_0b_2)$ даетъ величину положительную и выраженіе $\sqrt{b_1^2-(4b_0b_2)}$ будетъ представлять величину тоже положительную; при этомъ

$$\sqrt{b_1^2-(4b_0b_2)} > \sqrt{b_1^2} \quad \text{или} \quad b_1$$

и потому

$$-b_1+\sqrt{b_1^2-(4b_0b_2)}\ ,$$

даетъ величину положительную, которую обозначимъ черезъ $+A_1$, а

$$-b_1-\sqrt{b_1^2-(4b_0b_2)}$$

даетъ отрицательную величину $-A_2$.

Такимъ образомъ выраженіе съ $b_0+b_1x+b_2x^2$ въ знаменателѣ, подлежащее интегрированію, получитъ видъ:

$$\frac{x+a}{(x+A_1)(x-A_2)}$$

и можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\frac{A_1-a}{A_1+A_2}\cdot\frac{1}{x+A_1}+\frac{A_2+a}{A_1+A_2}\cdot\frac{1}{x-A_2}=\frac{x+a}{(x+A_1)(x-A_2)}\ .$$

Интегрированіе этого выраженія даетъ:

$$\log y=\frac{A_1-a}{A_1+A_2}\log(x+A_1)+\frac{A_2+a}{A_1+A_2}\log(x-A_2)+c$$

откуда

$$y=e^c(x+A_1)^{\frac{A_1-a}{A_1+A_2}}(x-A_2)^{\frac{A_2+a}{A_1+A_2}}\ .$$

Взявъ за исходную точку y_0, послѣ соотвѣтствующихъ преобразованій и принятія упрощенныхъ символическихъ обозначеній, мы получимъ кривую типа:

$$y=y_0\left(1+\frac{x}{a_1}\right)^{\nu a_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{\nu a_2}$$

(I типъ Pearson'a).

2. $\frac{b_1^2}{4b_0 b_2} = 0$. Этотъ результатъ возможенъ при $b_1^2 = 0$; въ такомъ случаѣ оба корня

$$\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_2} \quad \text{и} \quad \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_2}$$

равны по абсолютной величинѣ, но имѣютъ разные знаки:

$$\frac{+\sqrt{4b_0 b_2}}{2b_2} = +A \text{ и } \frac{-\sqrt{4b_0 b_2}}{2b_2} = -A.$$

Въ такомъ случаѣ въ предыдущей формулѣ $\alpha_1 = \alpha_2$ и получается кривая типа

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m$$

(II типъ Pearson'a).

3. Если при этомъ и $b_2 = 0$, то получится разсмотрѣнный уже ранѣе случай, дающій нормальную кривую типа

$$y = y_0 \, e^{-\frac{x^2}{2\beta^2}}$$

(V типъ Pearson'a, типъ VII Elderton'a).

Различіе случаевъ 2 и 3 зависитъ отъ величины добавочнаго критерія β_2, о чемъ будетъ сказано ниже.

4. $\frac{b_1^2}{4b_0 b_2} > 0$ и < 1, что означаетъ, что $4b_0 b_2$ величина положительная (т. к. b_1^2 всегда положительно) и $b_1^2 < 4b_0 b_2$. Вслѣдствіе этого подкоренная величина будетъ отрицательна и оба корня представляютъ комплексныя величины; интегри-

рованію будетъ подлежать выраженіе $(x-iA)(x+iA)$ и въ результатѣ получится кривая типа:

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-m} e^{-\nu \tan g^{-1} x/a}$$

или

$$y = y_0 \cos^{2m} \theta \, e^{-\nu\theta}, \text{ гдѣ } \tan\theta = \frac{x}{a} \text{ и } \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$$

(типъ IV Pearson'a).

5. $\frac{b_1^2}{4b_0 b_2} > 1$ и $< \infty$, что означаетъ, что $4b_0 b_2$ положительная величина и $< b_1^2$; въ такомъ случаѣ $b_1^2 - 4b_0 b_2$ даетъ положительную величину, меньше b_1; поэтому оба корня будутъ одного знака съ $-b_1$, но разной величины. Функція получитъ видъ $(x+A_1)(x+A_2)$ и въ результатѣ даетъ кривую типа

$$y = y_0 (x-\alpha)^{q_2} x^{-q_1}$$

(VI типъ Elderton'a, Pearson стр. 399 op. cit.).

6. $\frac{b_1^2}{4b_0 b_2} = 1$, или $b_1^2 = 4b_0 b_2$, вслѣдствіе чего подкоренная величина $= 0$ и оба корня равны. Функція $(x+A)^2$ даетъ въ результатѣ кривую

$$y = y_0 x^{-p} e^{-\gamma/x}$$

(V типъ Elderton'a, Pearson стр. 375 op. cit.).

7. $\frac{b_1^2}{4b_0 b_2} = \infty$, получается при $b_2 = 0$; при этомъ одинъ корень обращается въ нуль, другой въ безконечность; этому случаю отвѣчаетъ разсмотрѣнная уже кривая типа

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\gamma a} e^{-\gamma x}$$

(III типъ Pearson'a).

Указанные типы кривыхъ различаются по двумъ основнымъ признакамъ: 1) симметріи и 2) протяженію абсциссы.

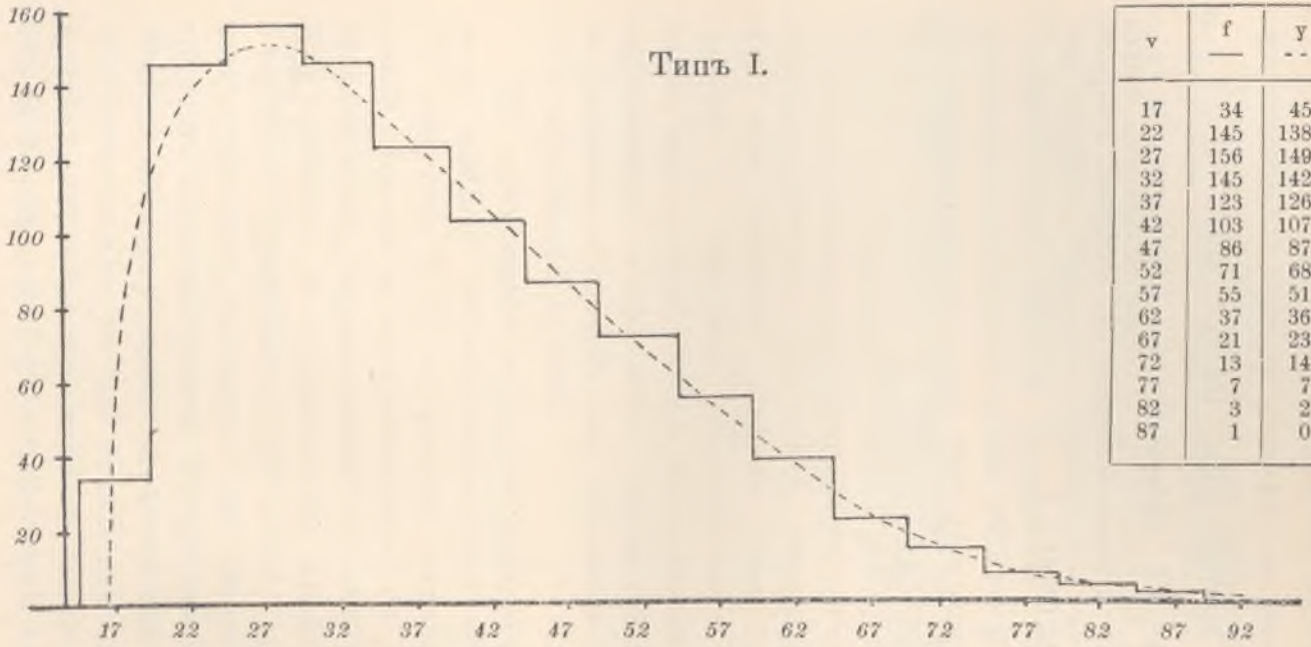
По симметріи кривыя распадаются на а) симметричныя и б) несимметричныя. Къ симметричнымъ относятся типъ II $\left(y = y_0\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^m\right)$ и нормальная кривая; симметрія выражается въ томъ, что максимальная ордината совпадаетъ съ ординатой среднеариѳметической точки абсциссы. Ассимметрія выражается въ томъ, что максимальная ордината не совпадаетъ съ ординатой середины распредѣленія, и величина разстоянія между этими двумя точками абсциссы (измѣряемая въ единицахъ среднеквадратическаго уклоненія) опредѣляетъ бо́льшую или меньшую степень асимметріи; расположеніе же середины распредѣленія вправо или влѣво отъ исходной точки максимальной ординаты опредѣляетъ направленіе асимметріи. Къ асимметричнымъ относятся всѣ остальные типы, кромѣ II и нормальной кривой.

По протяженію абсциссы кривыя раздѣляются на а) кривыя съ неограниченной абсциссой въ обѣ стороны, б) съ абсциссой, ограниченной съ одной стороны и неограниченной съ другой и в) съ абсциссой, ограниченной съ обѣихъ сторонъ. Для кривыхъ съ ограниченной абсциссой длина послѣдней опредѣляетъ, при всѣхъ прочихъ равныхъ условіяхъ, бо́льшую или меньшую степень крутости подъема кривой. Теоретически неограниченную абсциссу можно практически принимать за ограниченную въ той точкѣ, гдѣ ордината получаетъ значеніе, практически не отличающееся отъ 0. Къ кривымъ съ безконечной абсциссой от-

носятся кривыя типа IV' $\left(y = y_0\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m} e^{-\nu \operatorname{tan}^{-1} x/a}\right)$ и нормальная; къ ограниченнымъ съ одной только стороны — кривая типа III $\left(y = y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\gamma a} e^{-\gamma x}\right)$ и типа V' и VI Elderton'a $(y = y_0 x^{-p} e^{-\gamma/x}$ и $y = y_0(x-\alpha)^{q_2} x^{-q_1})$; ограниченными съ обѣихъ сторонъ являются кривыя I, II $\left(y = y_0\left(1+\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\nu a_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{\nu a_2}\right.$ и $\left. y = y_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^m\right)$.

Различіе въ типѣ кривыхъ можно видѣть на графическихъ изображеніяхъ.

Типъ I.

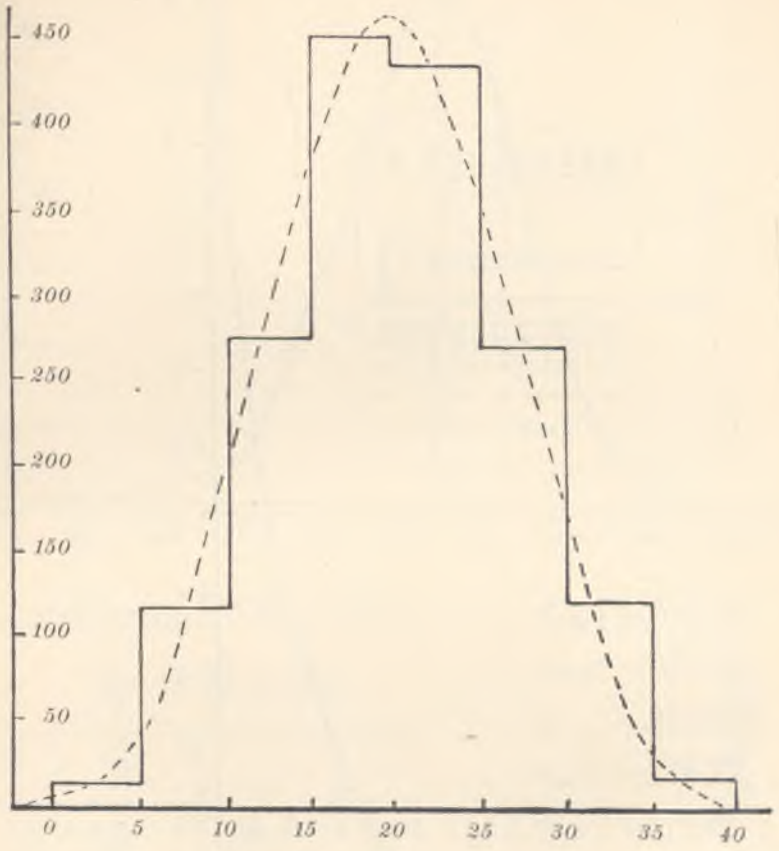


v	f	y
17	34	45·7
22	145	138·2
27	156	149·5
32	145	142·1
37	123	126·6
42	103	107·6
47	86	87·7
52	71	68·5
57	55	51·0
62	37	36·0
67	21	23·6
72	13	14·0
77	7	7·2
82	3	2·9
87	1	0·7

$$y = 149{\cdot}47\left\{1+\frac{x}{1{\cdot}99638}\right\}^{0{\cdot}409\,833}\left\{1+\frac{x}{13{\cdot}52728}\right\}^{2{\cdot}776\,978}$$

(W. Palin Elderton, Frequency-Curves, стр. 54—57)

Типъ II.



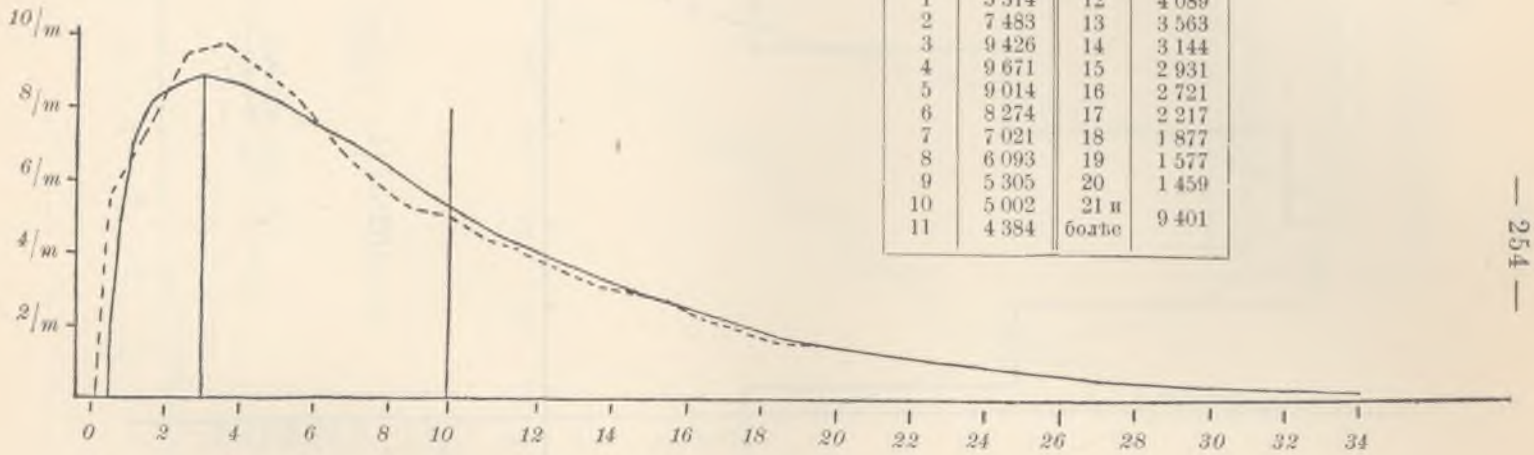
v	f	y
0— 4	11	11
5— 9	116	104
10—14	274	287
15—19	451	440
20—24	432	440
25—29	267	287
30—34	116	104
35—	16	11

$$y = 462{\cdot}57\left(1-\frac{x^2}{4{\cdot}543079}\right)^{4{\cdot}141766}$$

(W. Palin Elderton, l. c. стр. 62—64).

Типъ III.

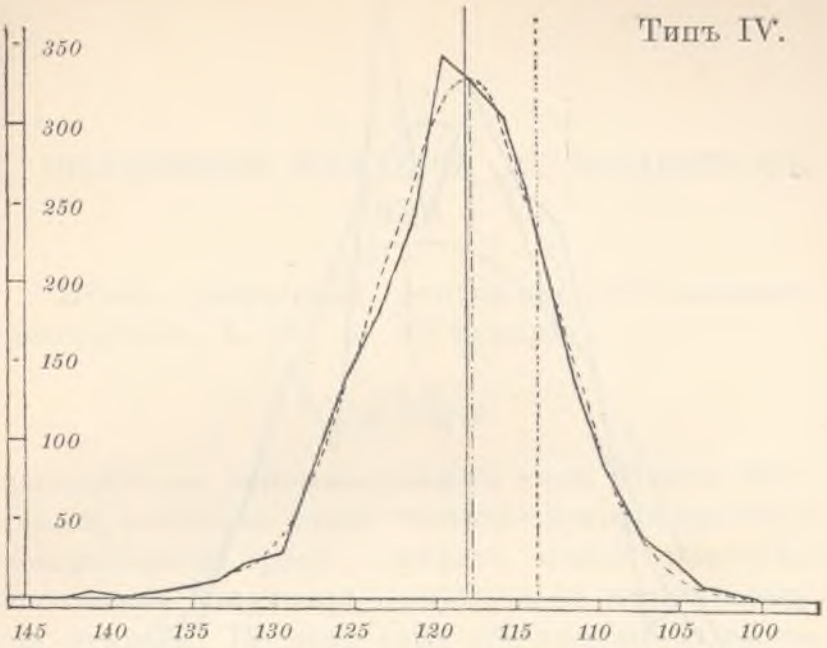
v	f	v	f
1	5 314	12	4 089
2	7 483	13	3 563
3	9 426	14	3 144
4	9 671	15	2 931
5	9 014	16	2 721
6	8 274	17	2 217
7	7 021	18	1 877
8	6 093	19	1 577
9	5 305	20	1 459
10	5 002	21 и	9 401
11	4 384	болѣе	



$$y = 8882{\cdot}45\left\{1+\frac{x}{2{\cdot}4573}\right\}^{0{\cdot}36891} e^{-0{\cdot}150\,127\,x}$$

(K. Pearson, Contributions etc. II. Trans. Roy. Soc. A. v. 186. p. I. стр. 395—396, листъ 11, фиг. 12).

Типъ IV.



$$y = 235{\cdot}323 \cos^{32{\cdot}8023}\theta \, e^{-4{\cdot}56967\,\theta}$$

$$x = 14{\cdot}9917 \tan\theta.$$

v	f	v	f
141—142	1	119—120	342
139—140	0	117—118	321
137—138	1	115—116	297
135—136	5	113—114	222
133—134	10	111—112	137
131—132	21	109—110	84
129—130	28	107—108	42
127—128	79	105—106	27
125—126	138	103—104	8
123—124	183	101—102	2
121—122	243	99—100	1

$y_{med} = 322{\cdot}14$

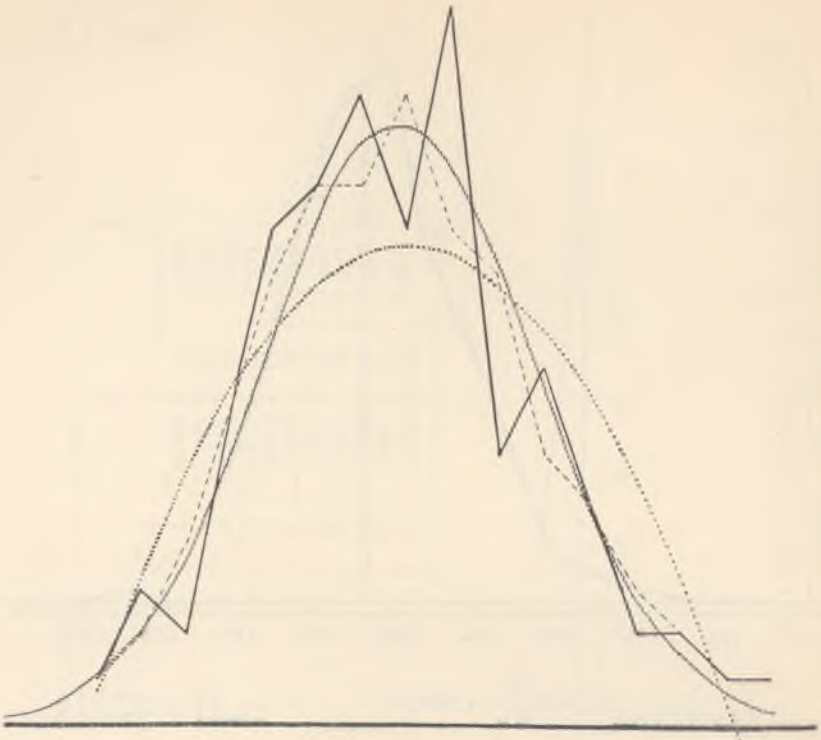
$y_{max} = 324{\cdot}18$

$y_0 = 235{\cdot}323$

$v_{med} = 118{\cdot}27$

$v_0 = 113{\cdot}8$

(Pearson, Contributions. II. l. c., 386—387, л. 10, ф. 7).



Дѣйствительный рядъ — (см. стр. 192), преобразованный по нормальной кривой ~~~~.

v	f	y
	—	~~~
4	—	0·45
5	1	1·02
6	3	2·06
7	2	3·71
8	7	6·00
9	11	8·69
10	10	11·16
11	14	12·96
12	11	13·33
13	16	12·33
14	6	10·20
15	8	7·56
16	5	4·96
17	2	2·78
18	2	1·56
19	1	0·73
20	1	0·31

$$y = 13{\cdot}34\, e^{-x^2/17{\cdot}8918}$$

8. ВЫРАЖЕНІЕ КРИТЕРІЯ ВЪ МОМЕНТАХЪ РЯДА.

Итакъ, различныя допущенія относительно постоянныхъ b_0, b_1, b_2 въ функціи

$$\frac{x+a}{b_0+b_1 x+b_2 x^2}$$

приводятъ къ кривымъ разнаго типа. Найти типъ кривой, наиболѣе точно соотвѣтствующій данному эмпирическому ряду, значитъ найти наиболѣе подходящія допущенія относительно вида указанной функціи. Но такъ какъ эти допущенія выражаются въ значеніи, какое получаетъ критерій k, то задача сводится къ тому, чтобы связать значеніе критерія k съ данными эмпирическаго ряда. Это возможно сдѣлать при помощи моментовъ, а именно, если величину критерія выразить въ моментахъ ряда. Для этой цѣли воспользуемся, какъ и раньше, извѣстной уже системой уравненій, построенныхъ при помощи моментовъ, и опредѣлимъ значеніе постоянныхъ a, b_0, b_1, b_2. Взявъ четыре уравненія:

$$a+0.b_0+b_1+2b_2.0=0$$
$$a.0+b_0+2b_1.0+3b_2\mu_2=-\mu_2$$
$$a\mu_2+2b_0.0+3b_1\mu_2+4b_2\mu_3=-\mu_3$$
$$a\mu_3+3b_0\mu_2+4b_1\mu_3+5b_2\mu_4=-\mu_4$$

получимъ:

$$a = -b_1$$
$$b_0 = -\mu_2 - 3\mu_2 b_2$$
$$b_1 = -\mu_3/2\mu_2 - \mu_3/2\mu_2 \cdot 4b_2$$
$$b_2 = \frac{-2\mu_2\mu_4 + 3\mu_3^2 + 6\mu_2^3}{10\mu_2\mu_4 - 12\mu_3^2 - 18\mu_2^3} .$$

Или

$$a = \frac{\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{10\mu_2\mu_4 - 12\mu_3^2 - 18\mu_2^3}$$
$$b_0 = \frac{-\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)}{10\mu_2\mu_4 - 12\mu_3^2 - 18\mu_2^3}$$
$$b_1 = \frac{-\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{10\mu_2\mu_4 - 12\mu_3^2 - 18\mu_2^3} .$$

Введя обозначенія

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} , \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} ,$$

получимъ:

$$a = \frac{\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$
$$b_0 = \frac{-\mu_2(4\beta_2 - 3\beta_1)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$
$$b_1 = \frac{-\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$
$$b_2 = \frac{-(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)} .$$

Откуда критерій k получитъ выраженіе

$$k = \frac{b_1^2}{4b_0 b_2} = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(4\beta_2 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)} ,$$

при исходной точкѣ, взятой въ серединѣ распредѣленія.

Такимъ образомъ нахожденіе типа кривой, соотвѣтствующаго данному эмпирическому матеріалу, сводится къ слѣдующимъ операціямъ:

1) необходимо вычислить для даннаго эмпирическаго ряда четыре первыхъ момента отъ средней ариѳметической точки абсциссы;

2) вычислить величины β_1 и β_2;

3) вычислить значеніе критерія k;

и 4) по значенію критерія опредѣлить соотвѣтствующій типъ кривой, а именно:

при $k < 0$ — типъ I

„ $k = 0$ — „ II или нормальная кривая

„ $k > 0$ и < 1 „ IV

„ $k = 1$ — „ V (по Elderton'y)

„ $k > 1$ и $< \infty$ „ VI (по Elderton'y)

„ $k = \infty$ — „ III

При $k = 0$ получаются два случая; они различаются въ томъ, что нормальная кривая получается при $b_1 = b_2 = 0$, тогда какъ кривая типа II основана на допущеніи $b_1 = 0$. Критерій k отвѣчаетъ послѣднему условію при

$$\beta_1 (\beta_2 + 3)^2 = 0;$$

это можетъ происходить если $\beta_1 = 0$, при любомъ значеніи β_2, кромѣ $\beta_2 = 3$; въ этомъ случаѣ въ 0 обращается также выраженіе $2\beta_2 - 3\beta_1 - 6$, а слѣдовательно и b_2, и такимъ образомъ получается случай нормальной кривой. Такимъ образомъ, кромѣ основного критерія, требуется добавочный для различенія случаевъ II и нормальной кривой: типъ II характеризуется слѣдующимъ образомъ

$$k = 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 \text{ неравно } 3$$

и типъ нормальной кривой:

$$k = 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 3.$$

Кромѣ того, дополнительнымъ критеріемъ для типа III является условіе:

$$2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 = 0$$

вытекающее изъ допущенія, что $k = \infty$ при $b_2 = 0$.

Вообще для пяти типовъ Pearson'a общій критерій k можетъ быть разбитъ на болѣе частные критеріи: β_1, β_2 и

$$F = 2\beta_2 - 3\beta_1 - 6,$$

и въ такомъ случаѣ эти типы будутъ характеризоваться слѣдующимъ образомъ:

F отрицательное;	$\beta_1 > 0$;	β_2	типъ I.
F „ ;	$\beta_1 = 0$;	$\beta_2 < 3$	II.
$F = 0$;	$\beta_1 > 0$;	$\beta_2 > 3$	III.
F положительное;	$\beta_1 > 0$;	$\beta_2 > 3$	IV.
$F = 0$;	$\beta_1 = 0$;	$\beta_2 = 3$	V.

Изъ трехъ указанныхъ критеріевъ значеніе F опредѣляетъ протяженіе абсциссы кривой: отрицательныя F даютъ абсциссу, ограниченнную съ обѣихъ сторонъ; $F = 0$ — ограниченную съ одной стороны для типа III и неограниченную въ обѣ стороны для типа V (нормальной кривой) и F положительное — неограниченную въ обоихъ направленіяхъ; критерій β_1 опредѣляетъ симметрію: $\beta_1 = 0$ даетъ симметрическія кривыя, $\beta_1 > 0$ — асимметрическія.

При примѣненіи критеріевъ на практикѣ возникаетъ сомнѣніе, къ какому типу отнести изслѣдуемый случай, когда критеріи очень близко подходятъ къ теоретической величинѣ, имѣющей одно опредѣленное значеніе:

$$F = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 3,$$

но не совпадаютъ съ ней. Въ этихъ случаяхъ представляется слишкомъ затруднительнымъ точно опредѣлять теоретическіе предѣлы допустимыхъ уклоненій; удобнѣе исходить прямо изъ практически достаточно точнаго соотвѣтствія типа кривой эмпирическому матеріалу. Вспомогательное значеніе могутъ имѣть здѣсь слѣдующія указанія. При очень малой величинѣ F, можно принять типъ, отвѣчающій $F=0$, если $F.\mu_2^3$ даетъ результатъ въ предѣлахъ ± 1; при $\beta_2 > 2{\cdot}94175$ съ удовлетворительнымъ результатомъ можно примѣнять нормальную кривую вмѣсто типа II. При $k > 4$ удовлетворительный результатъ даетъ типъ III [1]).

---

[1]) Duncker, Methode d. Variationsstatistik, стр. 20, 24; W. Palin Elderton, op. c., стр. 50.

9. ТИПЫ I, II, III.

Примѣненіе формулъ кривыхъ требуетъ вычисленія встрѣчающихся постоянныхъ [1]).

Типъ I.

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{\alpha_1}\right)^{\nu\alpha_1} \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)^{\nu\alpha_2} .$$

Требуется найти: α_1, α_2, $\nu\alpha_1$, $\nu\alpha_2$, y_0.

Обозначимъ:

$$s = \frac{6(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{-2\beta_2 + 3\beta_1 + 6} ,$$

разстояніе между ординатой среднеариѳметической точки и y_0 или a

$$a = \frac{\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

или иначе:

$$a = \frac{\mu_3}{2\mu_2} \frac{s+2}{s-2} ;$$

протяженіе абсциссы кривой или b

$$= \frac{\sqrt{\mu_2}}{2} \sqrt{\beta_1 (s+2)^2 + 16(s+1)} .$$

Абсцисса b точкой выхода ординаты y_0 дѣлится на двѣ части: α_1 и α_2

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(b - as)$$

---

[1]) Кромѣ указанныхъ пособій см. C. B. Davenport, Statistical Methods, New York, 1904.

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(b + as)$$

$$\alpha_1 \nu = \frac{\alpha_1}{b}(s-2) = m_1$$

$$\text{или} \quad \nu = \frac{s-2}{b}$$

$$\alpha_2 \nu = \frac{\alpha_2}{b}(s-2) = m_2$$

$$y_0 = \frac{N}{b} \cdot \frac{(m_1+m_2+1)\sqrt{m_1+m_2}}{\sqrt{2\pi m_1 m_2}} e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m_1+m_2} - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)}$$

Указанная здѣсь величина y_0 является приблизительной (во всякомъ случаѣ годится для случаевъ, гдѣ $s > 2$, Duncker, op. cit. стр. 23).

Точное значеніе y_0 выражается:

$$y_0 = \frac{N}{b} \frac{m_1^{m_1} \cdot m_2^{m_2}}{(m_1+m_2)^{m_1+m_2}} \frac{\Gamma(m_1+m_2+2)}{\Gamma(m_1+1)\ \Gamma(m_2+1)}$$

Въ этомъ выраженіи знакъ Γ обозначаетъ собою т. н. гамма – функцію, имѣющую слѣдующее значеніе

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, dx.$$

Вычисленіе гамма – функціи можетъ быть основано на томъ ея свойствѣ, что

$$\Gamma(p) = (p-1)\ \Gamma(p-1):$$

поэтому а) для цѣлаго и положительнаго p мы имѣемъ:

$$\Gamma(p) = 1.2.3 \ldots (p-1)$$

напримѣръ:

$$\Gamma(4) = 1.2.3$$

б) для цѣлаго съ дробью (на основаніи $\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$):

$$\begin{aligned}\Gamma(4{\cdot}25) &= 3{\cdot}25\ \Gamma(3{\cdot}25)\\ &= 3{\cdot}25.\ 2{\cdot}25\ \Gamma(2{\cdot}25)\\ &= 3{\cdot}25.\ 2{\cdot}25.\ 1{\cdot}25\ \Gamma(1{\cdot}25).\end{aligned}$$

Для опредѣленія же значенія Г-функцій чиселъ отъ 1 до 2 дается таблица логариѳмовъ значеній этихъ функцій. Все вычисленіе при помощи логариѳмовъ располагается въ слѣдующемъ порядкѣ:

$\log \Gamma(1{\cdot}25)$	=	9·957321	
log 1·25	=	0·096910	
log 2·25	=	0·352183	
log 3·25	=	0·511883	
$\Sigma \log = \log N$			log 8·28575

в) когда p слишкомъ велико этотъ способъ представляется обременительнымъ. Въ такомъ случаѣ приблизительное вычисленіе можетъ быть построено по формулѣ:

$$\Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi p}\, p^p\, e^{-p}\, e^{-\frac{1}{12p}}$$

откуда:

$$\log \Gamma(p+1) = \log \sqrt{2\pi} + \left(p+\tfrac{1}{2}\right) \log p - \left(p+\tfrac{1}{12p}\right) \log e.$$

Указанная формула можетъ быть примѣняема начиная съ $p=8$ и больше (W. Palin Elderton, стр. 153).

Примѣръ вычисленія кривой I типа [1]).

Эмпирическій рядъ: варіанты — v,

частоты — f:

---

[1]) Duncker, Methode d. Variationstatistik, стр. 9, 71, 72: число Müller'овыхъ желѣзъ у 2000 свиней.

v	f	x	fx	fx^2	fx^3	fx^4
0	15	−5	75	375	1 875	9 375
1	209	−4	836	3 344	13 376	53 504
2	365	−3	1 095	3 285	9 855	29 565
3	482	−2	964	1 928	3 856	7 712
4	414	−1	414	414	414	414
5	277	0				
6	134	1	134	134	134	134
7	72	2	144	288	576	1 152
8	22	3	66	198	594	1 782
9	8	4	32	128	512	2 048
10	2	5	10	50	250	1 250
	2000		−3 384	10 144	−29 376	106 936
Σ:			+ 386		+ 2 066	
			−2 998		−27 310	

$$\nu_1 = \frac{-2\,998}{2\,000} = -\ 1{\cdot}499$$

$$\nu_2 = \frac{10\,144}{2\,000} = \quad 5{\cdot}072$$

$$\nu_3 = \frac{-27\,310}{2\,000} = -\,13{\cdot}655$$

$$\nu_4 = \frac{106\,936}{2\,000} = \quad 53{\cdot}468.$$

$$\mu_2 = 5{\cdot}072 - 1{\cdot}499^2 \left(+\frac{1}{6}\right)^{*)}$$

$$\mu_3 = -13{\cdot}655 + 3.1{\cdot}499.5{\cdot}072 - 2.1{\cdot}499^3$$

$$\mu_4 = 53{\cdot}468 - 4.1{\cdot}499.13{\cdot}655 + 6.1{\cdot}499^2.5{\cdot}072 - \\ - 3.1{\cdot}5^4 \left(+\mu_2 - \frac{1}{10}\right)^{*)}$$

*) $+\frac{1}{6}$ для μ_2 и $+\mu_2 - \frac{1}{10}$ для μ_4 представляютъ поправку, которую Duncker вводитъ въ виду того,

что моменты опредѣляются при помощи ординатъ вмѣсто трапецій.

$$\left.\begin{array}{l|l} \mu_2 = 2{\cdot}992 & \beta_1 = 0{\cdot}2182\ (>0) \\ \mu_3 = 2{\cdot}419 & \beta_2 = 3{\cdot}0969 \\ \mu_4 = 27{\cdot}719 & F = -0{\cdot}4608 \end{array}\right\} \text{типъ I.}$$

$$s = \frac{6\,(3{\cdot}0969 - 0{\cdot}2182 - 1)}{+3.0{\cdot}2182 - 2.3{\cdot}0969 + 6} = 24{\cdot}4621$$

$$a = \frac{\sqrt{2{\cdot}825}\ ^{*)}\ \sqrt{0{\cdot}2182}\ (3{\cdot}0969 + 3)}{2\,(5.3{\cdot}0969 - 6.0{\cdot}2182 - 9)} = -0{\cdot}4625$$

*) 2·825 представляетъ $\mu_2 - \frac{1}{6}$, т. е. безъ поправки, или $\delta^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} = \mu_2$, когда послѣднее исчислено по ординатамъ.

$$b = \frac{\sqrt{2{\cdot}825}}{2}\sqrt{0{\cdot}2182\,(24{\cdot}4621+2)^2 + 16\,(24{\cdot}4621+1)} = \\ = 19{\cdot}8912$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\,(19{\cdot}8912 - 0{\cdot}4625\,.\,24{\cdot}4621) = 4{\cdot}2889$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\,(19{\cdot}8912 + 11{\cdot}3133) = 15{\cdot}6023$$

$$m_1 = \alpha_1 \nu = \frac{4{\cdot}2889}{19{\cdot}8912}\,(24{\cdot}4621 - 2) = 4{\cdot}8434$$

$$m_2 = \alpha_2 \nu = \frac{15{\cdot}6023}{19{\cdot}8912}\,.\,22{\cdot}4621 = 17{\cdot}6189$$

$$y_0 = \frac{2000}{19{\cdot}8912} \cdot \frac{(4{\cdot}8434 + 17{\cdot}6189 + 1)\sqrt{4{\cdot}8434 + 17{\cdot}6189}}{\sqrt{2\,.\,3{\cdot}1416\,.\,4{\cdot}8434\,.\,17{\cdot}6189}} \cdot \\ .\ 2{\cdot}7183^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{22.4623} - \frac{1}{4{\cdot}8434} - \frac{1}{17{\cdot}6189}\right)}$$

$$y_0 = 473{\cdot}9$$

$$y_x = 473{\cdot}9\left(1 + \frac{x}{4{\cdot}2889}\right)^{4{\cdot}8434}\left(1 - \frac{x}{15{\cdot}6023}\right)^{17{\cdot}6189.}$$

Теоретическій рядъ y:

v	f	y
0	15	27·8
1	209	181·5
2	365	385·5
3	482	473·9
4	414	411·7
5	277	275·6
6	134	147.8
7	72	64.6
8	22	23·1
9	8	6·7
10	2	1·5
11	0	0·3
	2 000	2 000

Типъ II.

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{m\alpha}$$

Типъ II получается изъ типа I при $\alpha_1 = \alpha_2$. Такъ какъ $\beta_1 = 0$ (кривая симметрична), то $a = 0$ (максимальная ордината совпадаетъ съ ординатой средней ариеметической точки). Далѣе

$$s = \frac{3(\beta_2 - 1)}{3 - \beta_2}$$

$$b = 2\sqrt{\mu_2}\sqrt{s+1}$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{2\mu_2\beta_2}{3-\beta_2}$$

$$m\alpha = m = \frac{s-2}{2} = \frac{5\beta_2 - 9}{2(3-\beta_2)}$$

$$y_0 = \frac{N}{\sqrt{\mu_2}\sqrt{2\pi}} \frac{s-1}{\sqrt{(s+1)(s-2)}} e^{-\frac{1}{4(s-2)}}$$

и точное значеніе

$$y_0 = \frac{N}{\frac{1}{2}b} \frac{\Gamma(m+1.5)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)}$$ (*) Davenport, o. c., 32).

Типъ III.

$$y = y_0 e^{-\gamma x}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\gamma a}.$$

Кривая асимметрична, начинается отъ нуля, достигаетъ максимума, опускается и другою вѣтвью уходитъ въ безконечность. Постоянныя этой формулы опредѣлены раньше (стр. 243—244):

$$\gamma = \frac{2\mu_3}{\mu_2}$$

$$\alpha = \frac{2\mu_3^2}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{2\mu_3}$$

$$\gamma\alpha = \frac{4\mu_3^2}{\mu_2} - 1$$

$$y_0 = \frac{N}{a}\,\frac{p^{p+1}}{e^p\,\Gamma(p+1)} \quad \text{при} \quad p = \gamma\alpha;$$

разстояніе средины распредѣленія отъ максимальной ординаты или a равняется:

$$a = \frac{\mu_3}{2\mu_2}$$

10. ТИПЪ IV.

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-m} e^{-\nu \tan^{-1} \frac{x}{a}}$$

или, принимая, что

$$\tan \theta = \frac{x}{a}, \quad x = a \tan \theta$$

и

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x}{a},$$

получаемъ формулу болѣе удобную для вычисленія:

$$y = y_0 (\cos \theta)^{2m} e^{-\nu \theta}.$$

Кривая представляется асимметричной съ неограниченной въ обѣ стороны абсциссой. Особенностью ея является то, что исходная ордината (y_0) начинается не въ точкѣ наиболѣе частой варіанты и не въ точкѣ средней ариѳметической, а на разстояніи ma отъ средней ариѳметической точки, причемъ a разстояніе между максимальной ординатой и ординатой средней ариѳметической точки — равняется

$$a = \frac{\mu_3}{\mu_2} \cdot \frac{s-2}{s+2}$$

и

$$m = \frac{1}{2}(s+2)$$

или:

$$ma = \frac{(s-2)}{4} \sqrt{\beta_1} \sqrt{\mu_2}.$$

Далѣе:

$$s = \frac{6(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}$$

(въ знаменателѣ обратные знаки сравнительно съ типомъ I).

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu_2}}{4}\sqrt{16(s-1)-\beta_1(s-2)^2}$$

$$\nu = \frac{s(s-2)\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{16(s-1)-\beta_1(s-2)^2}}$$

причемъ ν имѣетъ знакъ обратный знаку μ_3.

$$y_0 = \frac{N}{\alpha}\sqrt{\frac{s}{2\pi}}\,\frac{e^{\frac{(\cos\varphi)^2}{3s}-\frac{1}{12s}-\nu\varphi}}{(\cos\varphi)^{s+1}}$$

гдѣ

$$\tan\varphi = \frac{\nu}{s}.$$

Въ выраженіяхъ 0ν, $\varphi\nu$ величина угла въ градусахъ переводится на отношеніе дуги къ радіусу $= 1$, т. е.

$$\theta = \frac{\theta^0\pi}{180}.$$

При маломъ ν ($\nu < 2$) формула y_0 должна быть замѣнена болѣе сложнымъ выраженіемъ, способъ вычисленіе котораго даетъ Pearson (l. c. стр. 380).

Примѣромъ кривой IV типа могутъ служить данныя измѣренія роста дѣвочекъ 8 лѣтъ въ штатахъ С. Луи — приведено у Pearson'a стр. 386—387.

Ростъ въ см.	Число	Ростъ въ см.	Число
141 и 142	1	119 и 120	342
139 „ 140	0	117 „ 118	321
137 „ 138	1	115 „ 116	297
135 „ 136	5	113 „ 114	222
133 „ 134	10	111 „ 112	137
131 „ 132	21	109 „ 110	84
129 „ 130	28	107 „ 108	42
127 „ 128	79	105 „ 106	27
125 „ 126	138	103 „ 104	8
123 „ 124	183	101 „ 102	2
121 „ 122	243	99 „ 100	1

Всего 2192 случая.

Принимая 2 сант. за единицу разстоянія по оси абсциссъ, получимъ слѣдующія значенія моментовъ:

Средній ростъ (по ν_1) 118·27 см.

$\mu_2 = 7{\cdot}70739$
$\mu_3 = -2{\cdot}38064$
$\mu_4 = 192{\cdot}17419$

$\beta_1 = 0{\cdot}0123784$
$\beta_2 = 3{\cdot}235045$

$F = 2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 > 0$, типъ IV.

Значенія постоянныхъ представятся слѣдующимъ образомъ:

$a = 0{\cdot}135606$
$s = 30{\cdot}8023$
$\nu = 4{\cdot}56967$
$\alpha = 14{\cdot}9917$
$m = 16{\cdot}4011$

Откуда

$$y = y_0 \cos\theta^{32{\cdot}8023}\, e^{-4{\cdot}56967\,\theta}$$

и

$$\tan\theta = \frac{x}{14{\cdot}9917}.$$

Наиболѣе хлопотливымъ является опредѣленіе y_0:

$$y_0 = \frac{N}{\alpha}\sqrt{\frac{s}{2\pi}}\,\frac{e^{\frac{(\cos\varphi)^2}{3s} - \frac{1}{12s} - \nu\varphi}}{(\cos\varphi)^{s+1}}$$

гдѣ

$$\tan\varphi = \frac{\nu}{s}.$$

Обозначивъ показателя при e черезъ z и логариѳмируя выраженіе, получимъ:

$$\log y = \log N - \log\alpha + \frac{1}{2}\log s + \log\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \\ + z\log e - (s+1)\log\cos\varphi.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log} N &= \log \quad 2192 = 3{\cdot}34084\\
\log \alpha &= \lg \ 14{\cdot}9917 = 1{\cdot}17585\\
\log s &= \log 30{\cdot}8023 = 1{\cdot}48858\\
{}^1/_2 \log s &= \quad \ldots\ldots = 0{\cdot}74429\\
\log \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} &= \quad \ldots\ldots = \bar{1}{\cdot}60091\\
\log e &= \log 2{\cdot}71828 = 0{\cdot}43429\\
\log \nu &= \log 4{\cdot}56967 = 0{\cdot}65987\\
\tan \varphi &= \tfrac{4{\cdot}56967}{30{\cdot}8023}\\
\log \tan \varphi &= \log 4{\cdot}56967 - \log 30{\cdot}8023 =\\
&= 0{\cdot}65987 - 1{\cdot}48858 = \bar{1}{\cdot}17129.
\end{aligned}$$

По $\operatorname{lag} \tan \varphi = \bar{1}{\cdot}17129$ находимъ по таблицамъ логариѳмовъ

$$\begin{aligned}
\varphi &= 8^0 26{\cdot}3' \quad \text{и}\\
\log \cos \varphi &= \bar{1}{\cdot}99527\\
\log (\cos \varphi)^2 &= 2 \log \cos \varphi = \bar{1}{\cdot}99054\\
\log (3.s) &= 1{\cdot}96570\\
\log \tfrac{(\cos \varphi)^2}{3s} &= \bar{2}{\cdot}02484\\
(\cos \varphi)^2 \div 3s &= 0{\cdot}0105885\\
\tfrac{1}{12s} &= 0{\cdot}00270544\\
\varphi = 8^0 26{\cdot}3' &= \tfrac{506{\cdot}3^0}{60}\\
\operatorname{arc} \varphi &= \tfrac{506{\cdot}3\,\pi}{60.180}\,.\\
\log \varphi &= \log \ 506{\cdot}3 + \log \pi - \log \ 60 - \log \ 180\\
&= \bar{1}{\cdot}16814\\
\log (\varphi\nu) &= \bar{1}{\cdot}82801\\
\varphi\nu &= 0{\cdot}6729855\\
z &= \tfrac{\cos^2\varphi}{3s} - \tfrac{1}{12s} - \nu\varphi = -0{\cdot}6651\\
\log e^{-0{\cdot}6651} &= -0{\cdot}6651 \log e = -0{\cdot}6651 \times 0{\cdot}43429\\
\log \ (0{\cdot}6651 \ .0{\cdot}43429) &= \bar{1}{\cdot}46067 = \log 0{\cdot}28885\\
-0{\cdot}6651 \log e &= -0{\cdot}28885 = \bar{1}{\cdot}71114
\end{aligned}$$

$(s+1)\ \log\cos\varphi = 31{\cdot}8023\ .\bar{1}{\cdot}99527 =$
$31{\cdot}8023\cdot -0{\cdot}00473 = -0{\cdot}15042 = \bar{1}{\cdot}84958$

Рекапитулируя, получимъ:

$\log N$	$=$	$3{\cdot}34084$
$\operatorname{colog} a$	$=$	$\bar{2}{\cdot}82414$
$^1/_2 \log s$	$=$	$0{\cdot}74429$
$\log \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$=$	$\bar{1}{\cdot}60091$
$z \log e$	$=$	$\bar{1}{\cdot}71114$
$\operatorname{colog}(\cos\varphi)^{s+2}$	$=$	$0{\cdot}15042$
$\log y_0$	$=$	$2{\cdot}37174$
y_0	$=$	$235{\cdot}363$ (у Pearson'a: $235{\cdot}323$).

Зная величину исходной ординаты, остальныя получаемъ по формулѣ

$$y = 235{\cdot}363\ \cos\theta^{32{\cdot}8023}\, e^{-4{\cdot}56967\,\theta}$$

безъ особыхъ затрудненій. Зная, что

$$x = \alpha \tan\theta$$

мы можемъ либо придавать опредѣленныя значенія x и вычислять $\tan\theta$, либо принимая послѣдовательно $\theta = 1^0,\ 2^0 \ldots$ или $\theta = 10^0,\ 20^0, \ldots$ находитъ соотвѣтствующія значенія x. Ходъ вычисленій виденъ изъ слѣдующихъ примѣровъ.

При $x = 0$ (исходная ордината), $\alpha \tan\theta = 0$, т. е. $\tan\theta = 0$, слѣдовательно $\cos\theta = 1$ и $\theta = 0$ и въ формулѣ кривой

$$y = y_0 = 235{\cdot}363$$

Дальнѣйшія вычисленія могутъ быть расположены въ слѣдующемъ порядкѣ:

ϑ	0	1^0	..	..
x	0	.	.	.
$-\vartheta\nu \log e$		.	.	.
$(s+2) \log \cos \vartheta$		.	.	.
$\log y_0$	2·37174	.	.	.
$\log y_x =$	Σ	.	.	.

При $\vartheta = 1^0$, $x = 14{\cdot}99 \tan 1^0$

$$\log x = \log 14{\cdot}99 + \log \tan 1^0 =$$
$$= 1{\cdot}17580 + \bar{2}{\cdot}24192 = \bar{1}{\cdot}41772$$

$$| \; x = 0{\cdot}26.$$

Такъ какъ за 1 x-озъ принято 2 сантм., то разстояніе $x = 0{\cdot}26$ составляетъ 52 сантм.

$$\text{arc } 0 = \frac{1^0 . \pi}{180}, \quad \log \vartheta = \bar{2}{\cdot}24188;$$
$$\log \nu = \log 4.57 = 0{\cdot}65992,$$
$$\log \vartheta\nu = \bar{2}{\cdot}90180; \; \vartheta\nu = 0{\cdot}07976.$$
$$\log e^{-\nu\vartheta} = -0{\cdot}07976 . 0{\cdot}43429$$
$$\log 0{\cdot}43429 = \bar{1}{\cdot}63778$$
$$\log 0{\cdot}07976 = \bar{2}{\cdot}90180$$
$$\bar{2}{\cdot}53958 = \log 0{\cdot}03464$$
$$-\nu\vartheta \log e = -0{\cdot}03464 = \bar{1}{\cdot}96536$$

$$| \; -0{\cdot}07976 \log e = \bar{1}{\cdot}96536$$

$$\log \cos 1^0 = \bar{1}{\cdot}99993$$
$$s + 2 = 32{\cdot}8$$
$$\log \cos \vartheta^{s+2} = 32{\cdot}8 . \bar{1}99993 = -0{\cdot}00007 . 32{\cdot}8 =$$
$$= -0{\cdot}002296 = \bar{1}{\cdot}99770$$

$$| \; 32{\cdot}8 \log \cos \vartheta = \bar{1}{\cdot}99770.$$

Сложеніемъ найденныхъ логариѳмовъ получаемъ:

$$\begin{array}{rl} -\theta\nu \lg e \;.\;.\;.\;. & \bar{1}\,96536 \\ (s+2)\log\cos\theta\;. & \bar{1}{\cdot}99770 \\ \log y^0 \;.\;.\;.\;.\;. & 2{\cdot}37174 \\ \hline \log y = & 2{\cdot}33480 \\ y = & 216{\cdot}2 \end{array}$$

Такъ какъ средній ростъ равенъ 118·27 сантим., исходная ордината находится на разстояніи $am = 0{\cdot}1356.16{\cdot}4 = 2{\cdot}22$ и единица x-овъ равна 2 сантиметрамъ, то исходная ордината соотвѣтствуетъ росту $118{\cdot}27 - 2.2{\cdot}22 = 113{\cdot}83$ (варіанты вправо убываютъ, см. чертежъ на стр 255). Въ положительную сторону (вправо) отъ исходной точки на разстояніи $x = 0{\cdot}26 = 0{\cdot}52$ сантим., лежитъ точка, отвѣчающая росту $113{\cdot}83 - 0{\cdot}52 = 113{\cdot}31$; этому росту соотвѣтствуетъ найденная ордината 216·2 случая. Продолжая вычисленія далѣе, мы можемъ найти рядъ послѣдовательныхъ ординатъ и по нимъ построить кривую, а равнымъ образомъ опредѣлить число случаевъ, отвѣчающихъ требуемому промежутку.

Придавая θ значенія, возрастающія на равные промежутки, мы получаемъ неравно отстоящія значенія x. Вычисленіе по значеніямъ x представляется въ слѣдующемъ видѣ. Положимъ

$$x = -2{\cdot}0884,$$

каковое условіе даетъ максимальную ординату, такъ какъ разстояніе ея влѣво отъ исходной ординаты равняется

$$am = 0{\cdot}135606.16{\cdot}4011 = 2{\cdot}0884.$$

Въ такомъ случаѣ

$$\tan\theta = -\frac{2{\cdot}0884}{14{\cdot}9917};$$

отрицательное значеніе тангенса показываетъ, что уголъ взятъ въ послѣдней четверти круга, тангенсъ его по абсолютной величинѣ равенъ тангенсу той-же величины угла въ первой четверти; при отрицательномъ θ произведеніе $\theta\nu$ на $\log e$ слѣдуетъ брать съ обратнымъ знакомъ. Поэтому оставляя въ сторонѣ знакъ минусъ, получимъ

$$\log \tan \theta = \bar{1}\cdot 143982$$

$$\theta = 7^\circ 55' \tfrac{782}{925}$$

$$\log \cos \theta = \bar{1}\cdot 995839$$

$$32\cdot 8023 \log \cos \theta = 32\cdot 8023.\bar{1}\cdot 995839 =$$

$$= 32\cdot 8023.-0\cdot 004161$$

$$\log 32\cdot 8023 \ldots 1\cdot 515904$$

$$\log 0\cdot 004161 \ldots \bar{3}\cdot 619198$$

$$\bar{1}\cdot 135102 =$$

$$= \log 0\cdot 136490$$

$$32\cdot 8023 \log \cos \theta = -0\cdot 136490 = \bar{1}\cdot 863510$$

$$\theta = 7^\circ 55' \tfrac{782}{925} = \frac{(55.925+782+7.925.60)\,\pi}{925\,.\,60\,.\,180} =$$

$$= \frac{44\cdot 0157\,\pi}{999}$$

$$\log \theta = \bar{1}\cdot 141192$$

$$\log \nu = 0\cdot 659885$$

$$\log \theta\nu = \bar{1}\cdot 801077$$

$$\log (\log e) = \bar{1}\cdot 637784$$

$$\log \theta\nu = \bar{1}\cdot 801077$$

$$\bar{1}\cdot 438861 = \log 0\cdot 274701$$

Принимая во вниманіе отрицательный знакъ θ, вмѣсто $-\theta\nu \log e$ возьмемъ

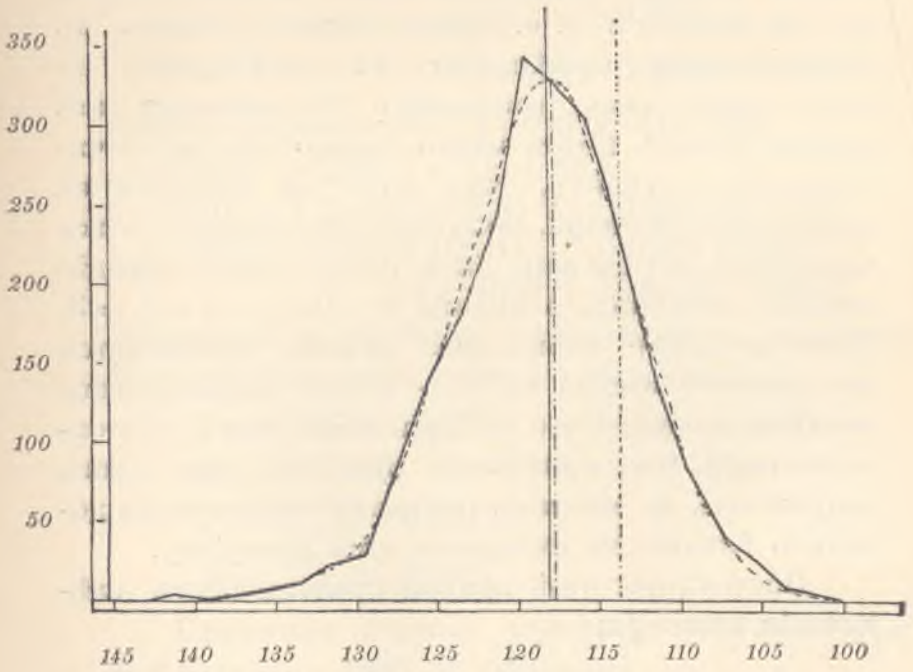
$$\theta\nu \log e = 0\cdot 274701$$

Суммируя, получимъ:

$$
\begin{array}{ll}
(s+2)\log\cos\theta \ldots\ldots & \bar{1}{\cdot}863510 \\
\theta\sqrt{}\log e \ldots\ldots\ldots & 0{\cdot}274701 \\
\log\ 235{\cdot}363 \ldots\ldots & 2{\cdot}371738 \\
\hline
\log y \ldots\ldots\ldots\ldots : & 2{\cdot}509949
\end{array}
$$

$$y = 323{\cdot}556.$$

(у Pearson'a $y = 324{\cdot}18$). Эмпирическія данныя и теоретическая кривая воспроизведены на прилагаемомъ чертежѣ (Pearson, l. c., листъ 10, фиг. 7):



11. ТИПЪ V.

Нормальная кривая (Типъ VII по Elderton'y):

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{c}}$$

Кривая характеризуется симметріей — ординаты варіантъ наиболѣе частой, серединной и средней ариеметической совпадаютъ — и безконечностью вѣтвей, ассимптотически приближающихся къ оси абсциссъ (т. е. вѣтви кривой уходятъ въ безконечность, приближаясь къ оси абсциссъ на какъ угодно малое разстояніе). Теоретически эта кривая можетъ имѣть мѣсто только въ исключительныхъ случаяхъ, такъ какъ ея критеріи не допускаютъ значеній, заключенныхъ въ извѣстныхъ предѣлахъ, но должны быть равны одной опредѣленной величинѣ, а именно $F = 0$, $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 3$. Тѣмъ не менѣе нормальная кривая примѣняется на практикѣ весьма часто — можно сказать почти исключительно — что объясняется тѣмъ обстоятельствомъ, что, при своей простотѣ, она даетъ результаты, во многихъ случаяхъ практически довольно близкіе къ эмпирическому матеріалу.

Постоянныя этой кривой представляютъ слѣдующія значенія:

$$c = 2\mu_2 \ (= 2\sigma^2)$$

$$y_0 = \frac{N}{\sqrt{2\pi\mu_2}}.$$

Примѣромъ вычисленія кривой можетъ служить рядъ, приводимый у Duncker'a (о. с. стр. 70—

71, 72): число иглъ на хвостовомъ плавникѣ у Acerina cernua).

v	x	f	fx	fx²	fx³	fx⁴
11	−3	1	3	9	27	81
12	−2	2	4	8	16	32
13	−1	189	189	189	189	189
14	0	1234				
15	1	454	454	454	454	454
16	2	20	40	80	160	320
		1900	298	740	382	1076

$$N = 1900 \quad \nu_1 = \frac{298}{1900} = 0{\cdot}1568$$

$$\nu_2 = \frac{740}{1900} = 0{\cdot}3895$$

$$\nu_3 = \frac{382}{1900} = 0{\cdot}2011$$

$$\nu_4 = \frac{1076}{1900} = 0{\cdot}5663$$

Средняя варіанта $M = 14 + 0{\cdot}1568 = 14{\cdot}1568.$

$\mu_2 = 0{\cdot}3895 - 0{\cdot}1568^2 \ (+{}^1/_6) = 0{\cdot}5316$

$\mu_3 = 0{\cdot}2011 - 3\,.0{\cdot}1568\,.0{\cdot}3895 + 2\,.0{\cdot}1568^3 = 0{\cdot}0257$

$\mu_4 = 0{\cdot}5663 - 4\,.0{\cdot}1568\,.0{\cdot}2011 + 6\,.0{\cdot}1568^2\,.0{\cdot}3895$
$\quad - 3\,.0{\cdot}1568^4 \ (+0{\cdot}4316) = 0{\cdot}9275.$

[слагаемыя въ скобкахъ представляютъ поправку на вычисленіе моментовъ по ординатамъ].

$$\delta = \sqrt{0{\cdot}3895 - 0{\cdot}1568^2} = \sqrt{0{\cdot}3649} = 0{\cdot}6040$$

$$F = 2\,.3{\cdot}2821 - 3\,.0{\cdot}0044 - 6 = 0{\cdot}5510$$

$$\beta_1 = \frac{0{\cdot}0257^2}{0{\cdot}5316^3} = 0{\cdot}0044$$

$$\beta_2 = \frac{0{\cdot}9275}{0{\cdot}5316^2} = 3{\cdot}2821$$

Принимая данные критеріи приблизительно отвѣчающими типу V, получимъ

$$y_0 = \frac{1900}{0{\cdot}6040\ \sqrt{2\pi}} = 1254{\cdot}9$$

$$y = 1254{\cdot}9\, e^{\frac{x^2}{2\,.0{\cdot}3648}}$$

Дѣйствительный рядъ y_ε
теоретическій . . . y_x

	y_ε	y_x
11	1	0·0
12	2	2·1
13	189	200·4
14	1234	1212·4
15	454	473·3
16	20	11·9
	1900	1900·1

Для примѣра, приведеннаго на стр. 192, величины моментовъ (стр. 201—202) составляютъ:

$$\nu_0 = 1 \qquad \nu_2 = 8{\cdot}9$$
$$\nu_1 = 0 \qquad \nu_3 = 6{\cdot}2$$
$$\nu_4 = 230{\cdot}6.$$

Откуда

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{6{\cdot}2^2}{8{\cdot}9^3} = \frac{38{\cdot}4}{705} = 0{\cdot}05$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{230.6}{8{\cdot}9^2} = \frac{230{\cdot}6}{79{\cdot}2} = 2{\cdot}9$$

и $$k = \frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(2\beta_2-3\beta_1-6)(4\beta_2-3\beta_1)} = \frac{0{\cdot}05\,.\,5{\cdot}9^2}{4\,.\,-0{\cdot}3\,.\,11{\cdot}5} = -0{\cdot}1.$$

При k отрицательномъ кривая относится къ типу I; но, принимая во вниманіе, что k близко къ 0, β_1 — тоже, а β_2=почти 3, мы можемъ принять, что кривая въ данномъ случаѣ приближается къ типу VII, что значительно упрощаетъ вычисленія.

Для типа VII максимальная ордината будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ ординатой средины распредѣленія, т. е. будетъ отвѣчать среднему значенію основанія v. Ея величина опредѣляется:

$$y_0 = \frac{N}{\sqrt{2\pi\mu_2}} = \frac{100}{\sqrt{2.3{\cdot}14.8{\cdot}9}} = \frac{100}{\sqrt{55{\cdot}89}} = \frac{100}{7{\cdot}48} = 13{\cdot}4.$$

Эта ордината отвѣчаетъ среднему ариѳметическому значенію основанія, равному 11·79. Если взять за исходную точку ординату y_0, то разстояніе отъ

нея (x) двухъ ближайшихъ ординатъ, отвѣчающихъ значеніямъ основанія 11 и 12 будетъ соотвѣтственно $= -0{\cdot}79$ и $+0{\cdot}21$; затѣмъ разстоянія слѣдующихъ ординатъ въ обѣ стороны выразятся;

x_{11}	$= -0{\cdot}79$	и x_{12}	$= +0{\cdot}21$
x_{10}	$= -1{\cdot}79$	x_{13}	$= 1{\cdot}21$
x_{9}	$= -2{\cdot}79$	x_{14}	$= 2{\cdot}21$
x_{8}	$= -3{\cdot}79$	x_{15}	$= 3{\cdot}21$
x_{7}	$= -4{\cdot}79$	x_{16}	$= 4{\cdot}21$
x_{6}	$= -5{\cdot}79$	x_{17}	$= 5{\cdot}21$
x_{5}	$= -6{\cdot}79$	x_{18}	$= 6{\cdot}21$
		x_{19}	$= 7{\cdot}21$
		x_{20}	$= 8{\cdot}21$

Формула кривой типа V выражается:

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\mu_2}}$$

или

$$\log y = \log y_0 - \frac{x^2}{2\mu_2} \log e$$

Соотвѣтствующія вычисленія даютъ слѣдующій результатъ:

	x=	x^2	$\div\{2\mu=17{\cdot}89\}$	$\times\{\log e=0{\cdot}43430\}$	вычесть изъ	log. 13·36 = 1·12581	Num. =y	Эмпирическій рядъ y-овъ.
x_3	8·79	77·26	4·32	1·87 618		$\bar{9}$·24 963	0·18	0
x_4	7·79	60·68	3·39	1·47 298		$\bar{9}$·65 353	0·45	0
x_5	6·79	46·10	2·57	1·11 615		0·00 966	1·02	1
x_6	5·79	33·52	1·87	0·81 214		0·31 367	2·06	3
x_7	4·79	22·94	1·28	0 55 590		0·56 991	3·71	2
x_8	3·79	14·36	0·80	9·34 744		0·77 837	6·00	7
x_9	2·79	7·78	0·43	0·18 675		0·93 906	8·69	11
x_{10}	1·79	3·20	0·18	0·07 817		1·04 764	11·16	10
x_{11}	0·79	0·62	0·03	0·01 302		1·11 279	12·96	14
x_{12}	0·21	0·04	0·002	0·00 087		1·12 494	13·33	11
x_{13}	1·21	1·46	0·08	0·03 474		1·09 107	12·33	16
x_{14}	2·21	4·88	0·27	0·11 726		1·00 855	10·20	6
x_{15}	3·11	10·30	0·57	0·24 755		0·87 826	7·56	8
x_{16}	4·21	17·72	0·99	0·42 996		0 69 585	4·96	5
x_{17}	5·21	27·14	1·57	0 68 185		0·44 396	2·78	2
x_{18}	6·21	38·56	2·15	0·93 374		0·19 207	1·56	2
x_{19}	7·21	51·98	2·90	1·25 947		$\bar{9}$·86 634	0·73	1
x_{20}	8·21	67·40	3·77	1·63 731		$\bar{9}$·48 850	0·31	1
							Σ 99·99	100

См. чертежъ стр. 256.

12. МѢРА СОВПАДЕНІЯ.

Вычисленныя на основаніи соотвѣтствующей формулы теоретическія значенія частотъ не совпадаютъ въ той или иной мѣрѣ съ эмпирическими данными дѣйствительнаго ряда. Отсюда возникаетъ задача, во 1-хъ, найти подходящее выраженіе для мѣры несовпаденія теоретическаго ряда съ дѣйствительнымъ, и, во 2-хъ, опредѣлить, какое расхожденіе рядовъ можетъ быть признано допустимымъ. До сихъ поръ обыкновенно довольствуются просто общимъ впечатлѣніемъ отъ нагляднаго сопоставленія рядовъ, и если большихъ уклоненій не замѣчается, то говорятъ о достаточномъ совпаденіи («die beiden Reihen stimmen offenbar ganz gut überein» «es werden oft grössere Abweichungen im einzelnen vorkommem, der Totaleindruck wird jedoch im wesentlichen ungeändert bleiben» «die Uebereinstimmung ist befriedigend» и т. п.). Такой пріемъ можно считать господствующимъ въ литературѣ (см. напр. H. Westergaard, die Grundzüge der Theorie der Statistik; Lexis, Abhandlungen и мн. др.). Однако представленіе о «большомъ» или «маломъ» уклоненіи является субъективнымъ и зависитъ отъ степени требовательности изслѣдователя [1]). Поэтому прежде всего личное впечатлѣніе должно быть замѣнено объек-

---

[1]) Напр.: Bortkewitsch, Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, Jahrb. f. Nat. Oek. u. Stat. III F. 8 B., стр. 672: „Prof. Westergaard scheint aber keine zu strenge Anspruche an die Ergebnisse zu stellen, wenn er zu den Zahlenreihen in Kol. 2 und 3 sagt: Die wirklichen und berechneten Zahlen stimmen recht gut überein".

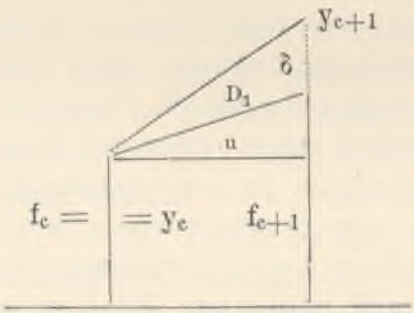
тивнымъ количественнымъ выраженіемъ степени совпаденія рядовъ; причемъ это количественное выраженіе должно быть приведено къ такой формѣ, которая, по возможности, оставляла бы какъ можно менѣе простора для субъективныхъ разногласій. Для образованія объективной мѣры совпаденія или расхожденія рядовъ можно исходить изъ соотношенія различныхъ признаковъ ряда. Такъ, мы можемъ взять соотношенія ординатъ эмпирическаго и вычисленнаго ряда, а именно: разность между каждой данной частотой и соотвѣтствующей ей теоретической ординатой выразимъ въ процентахъ къ среднеариѳметическому изъ обѣихъ ординатъ (или къ одной изъ нихъ) и взявъ среднеариѳметическую всѣхъ полученныхъ результатовъ пріймемъ ее за мѣру совпаденія или расхожденія. Аналогично можно поступить и по отношенію къ площадямъ фигуръ; причемъ такъ какъ вычисленіе отрѣзковъ площадей кривой, расходящихся съ площадью эмпирическаго многоугольника, представляетъ затрудненія, то несовпадающія части площадей можно опредѣлить посредствомъ планиметра и полученный результатъ выразить въ процентахъ къ совпадающей площади. Уже и этотъ способъ представляетъ то существенное преимущество, что даетъ нѣкоторый количественный результатъ. Недостатокъ его однако состоитъ въ эмпирическомъ характерѣ выбранной мѣры, отсутствіи теоретическаго ея обоснованія. Способъ сравненія площадей представляетъ, сверхъ того, и другой недостатокъ, на который указываетъ Duncker: ограниченный прямыми линіями многоугольникъ по необходимости долженъ расходиться съ площадью кривой, хотя бы ординаты, опредѣляющія обѣ фигуры,

совпадали, и это расхожденіе будетъ тѣмъ больше, чѣмъ изъ меньшаго числа угловъ состоитъ многоугольникъ [1]). Поэтому Duncker предлагаетъ болѣе точный способъ опредѣленія мѣры совпаденія и расхожденія площадей.

Если эмпирическую частоту обозначимъ черезъ f_c и соотвѣтствующую теоретическую ординату черезъ y_c, то при сравненіи двухъ смежныхъ эмпирическихъ ординатъ съ двумя соотвѣтствующими имъ теоретическими могутъ получиться слѣдующіе случаи образованія несоотвѣтствующихъ площадей.

1. Пусть $f_c = y_c$

$f_{c+1} >$ или $< y_{c+1}$:



въ такомъ случаѣ между линіей, соединяющей вершины ординатъ эмпирическаго ряда, и линіей, сое-

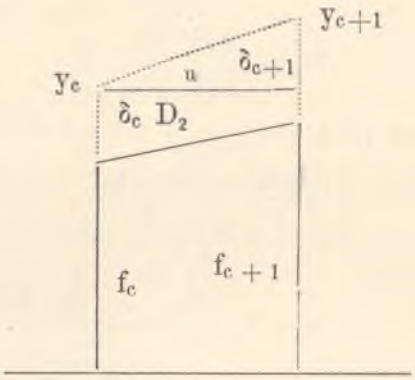
---

[1]) Что же касается указанія Duncker'a на недостатокъ способа опредѣленія расхожденія по ординатамъ, то съ нимъ нельзя согласиться. D. находитъ, что при такомъ пріемѣ случайныя уклоненія эмпирическаго матеріала наблюденія трактуются также, какъ ложный выборъ типа кривой. Но если бы даже типъ былъ выбранъ наиболѣе удачно, извѣстная мѣра расхожденія свидѣтельствуетъ, что эмпирическій рядъ не можетъ быть замѣненъ теоретическимъ. Duncker die Methode der Variationsstatistik, 1899 стр. 30—31.

диняющей теоретическія ординаты образуется треугольникъ D_1 съ основаніемъ $\delta_{c+1} = y_{c+1} - f_{c+1}$ и высотой $= u$.

2. При $f_c \gtrless y_c$

$f_{c+1} \gtrless y_{c+1}$

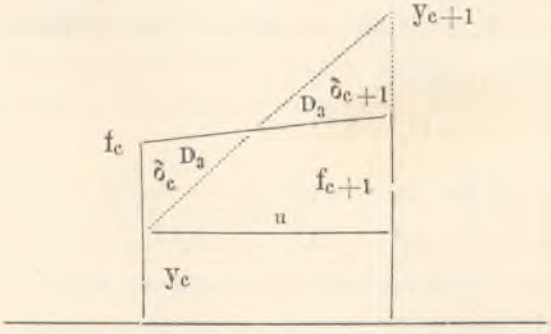


получится трапеція D_2, высота которой u и параллельныя стороны $\delta_c = y_c - f_c$ и $\delta_{c+1} = y_{c+1} - f_{c+1}$.

3. Наконецъ, при

$f_n \gtrless y_c$

$f_{c+1} \lessgtr y_{c+1}$



получится два треугольника D_3 съ основаніями $\delta_c = f_c - y_c$ и $\delta_{c+1} = f_{c+1} - y_{c+1}$ и суммою высотъ u.

Площади этихъ фигуръ будутъ соотвѣтственно равны:

$$D_1 = \frac{u\,\delta_{c+1}}{2}$$

$$D_2 = \frac{u(\delta_c + \delta_{c+1})}{2}$$

$$D_3 = \frac{u(\delta_c^2 + \delta_{c+1}^2)}{2(\delta_c + \delta_{c+1})};$$

D_3 получается изъ

$$\frac{\delta_c\, h_1}{2} + \frac{\delta_{c+1}\, h_2}{2}$$

при

$$h_1 + h_2 = u\,,\quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{\delta_c}{\delta_{c+1}}\,.$$

При опредѣленіи площадей всѣ δ берутся въ своей абсолютной величинѣ, т. е. со знакомъ $+$. Сумма всѣхъ площадей типа D_1, типа D_2 и типа D_3 дастъ сумму всѣхъ расходящихся площадей обѣихъ сравниваемыхъ фигуръ. Для опредѣленія этой суммы обозначимъ разности ординатъ въ фигурахъ типа D_1 черезъ $д_1$, $д_2$... въ фигурахъ типа D_2 черезъ δ_1 δ_2... и въ фигурахъ типа D_3 черезъ d_1, d_2... Вынося за скобки общій множитель $\frac{u}{2}$, получимъ:

$$\Sigma D_1 + \Sigma D_2 + \Sigma D_3 =$$

$$= \frac{u}{2}\Big[д_1 + д_2 + \ldots + {}_c\delta_1 + {}_c\delta_2 + \ldots + {}_{c+1}\delta_1 + {}_{c+1}\delta_2 + \ldots$$

$$+ \frac{{}_cd_1^2 + {}_{c+1}d_1^2}{{}_cd_1 + {}_{c+1}d_1} + \frac{{}_cd_2^2 + {}_{c+1}d_2^2}{{}_cd_2 + {}_{c+1}d_2} + \ldots\Big].$$

Выраженіе типа

$$\frac{{}_cd^2 + {}_{c+1}d^2}{{}_cd + {}_{c+1}d}$$

можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\frac{{}_cd^2+{}_{c+1}d^2+2\,{}_cd.{}_{c+1}d}{{}_cd+{}_{c+1}d}-\frac{2\,{}_cd.{}_{c+1}d}{{}_cd+{}_{c+1}d} =$$

$$= \frac{({}_cd+{}_{c+1}d)^2}{{}_cd+{}_{c+1}d}-\frac{2\,{}_cd.{}_{c+1}d}{{}_cd+{}_{c+1}d} =$$

$$= {}_cd+{}_{c+1}d-\frac{2\,{}_cd.{}_{c+1}d}{{}_cd+{}_{c+1}d}\,.$$

Поэтому

$$\Sigma D_1+\Sigma D_2+\Sigma D_3 =$$

$$= \tfrac{n}{2}\Big[д_1+д_2+\ldots+{}_c\delta_1+{}_c\delta_2+\ldots+{}_{c+1}\delta_1+{}_{c+1}\delta_2+\ldots$$

$$+{}_cd_1+{}_cd_2+\ldots+{}_{c+1}d_1+{}_{c+1}d_2+\ldots$$

$$-2\Sigma\frac{{}_cd\,.\,{}_{c+1}d}{{}_cd+{}_{c+1}d}\Big].$$

Очевидно, что выраженіе

$$д_1+д_2+\ldots.\,{}_c\delta_1+{}_c\delta_2+\ldots.+{}_{c+1}\delta_1+{}_{c+1}\delta_2+\ldots.$$

$$+{}_cd_1+{}_cd_2+\ldots.+{}_{c+1}d_1+{}_{c+1}d_2+\ldots.$$

представляетъ собою сумму всѣхъ послѣдовательныхъ разницъ, взятыхъ въ ихъ абсолютной величинѣ, для каждой пары отвѣчающихъ другъ другу ординатъ. При этомъ каждая разность служитъ основаніемъ для двухъ смежныхъ фигуръ и потому повторяется дважды. Такимъ образомъ все выраженіе составитъ двойную сумму всѣхъ разностей или, обозначая послѣднія просто знакомъ d, — $2\,\Sigma\,(d)$ и

$$\Sigma D_1+\Sigma D_2+\Sigma D_3 = n\Big[\Sigma\,(d)-\Sigma\frac{d_c\,.\,d_{c+1}}{d_c+d_{c+1}}\Big].$$

Послѣдній членъ выраженія, какъ видно по ходу изложенія, обозначаетъ разности, соотвѣтствующія третьему случаю ($f_c \gtrless y_c$, $f_{c+1} \lesseqgtr y_{c+1}$). Если образовать послѣдовательный рядъ всѣхъ разностей

каждой пары соотвѣтствующихъ другъ другу ординатъ, то разности, отвѣчающія третьему случаю легко находятся по тому признаку, что, будучи смежными, онѣ имѣютъ обратные знаки. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$f_c > y_c; \text{ то } f_{c+1} < y_{c+1} \text{ и обратно;}$$

а слѣдовательно, всегда

если $f_c - y_c = + d_c$, то

$f_{c+1} - y_{c+1} = -d_{c+1}$

и если $f_c - y_c = -d$, то

$f_{c+1} - y_{c+1} = d$.

Отсюда мы выводимъ слѣдующее правило для нахожденія мѣры несовпадающихъ площадей по ординатамъ:

1. Изъ каждой эмпирической частоты надо вычесть теоретическое ея значеніе и взять сумму абсолютныхъ значеній всѣхъ полученныхъ разностей;

2. Каждую пару смежныхъ разностей, имѣющихъ противоположные знаки, слѣдуетъ помножить другъ на друга и произведеніе раздѣлить на сумму этихъ двухъ множителей, абсолютныя значенія всѣхъ полученныхъ результатовъ сложить и

3. послѣднюю сумму вычесть изъ первой.

Что же касается множителя u, то онъ представляетъ разстояніе между ординатами и потому принимается = 1. Полученную мѣру несовпаденія площадей слѣдуетъ отнести ко всей площади; причемъ такъ какъ факторами несовпаденія являются какъ площадь эмпирической фигуры распредѣленія, такъ и теоретической, слѣдуетъ отнести насчетъ каждаго фактора половину разницы, т. е.

мѣру несовпаденія раздѣлить на удвоенное число всѣхъ случаевъ и тогда получимъ

$$\Delta = \frac{\Sigma D}{2N}$$

гдѣ Δ выражаетъ часть площади, въ которой оба ряда не совпадаютъ, и $N - \Delta$ общую, совпадающую часть площади. Для большей наглядности обѣ величины можно выразить въ процентномъ отношеніи къ N.

Изложенное поясняется на нижеслѣдующемъ примѣрѣ [1]).

Эмпирическій рядъ . . f
теоретическій рядъ . . y
разности ординатъ . . . d
разности третьяго типа d_c, d_{c+1}

f	y	d	$\frac{d_c \cdot d_{c+1}}{d_c + d_{c+1}}$	
1	0·0	+ 1·0	$\frac{1 \cdot 0{\cdot}1}{1+0{\cdot}1}$ =	0·09
2	2·1	− 0·1		
189	200·4	−11·4	$\frac{11{\cdot}4 \cdot 21{\cdot}6}{11{\cdot}4+21{\cdot}6}$ =	7·46
1234	1212·4	+21·6		
	. . . . .		$\frac{21{\cdot}6 \cdot 19{\cdot}3}{21{\cdot}6+19{\cdot}3}$ =	10·19
454	473·3	−19·3		
			$\frac{19{\cdot}3 \cdot 8{\cdot}1}{19{\cdot}3+8{\cdot}1}$ =	5·71
20	11·9	+ 8·1		
Σ 1900	1900·1	61·5		23·45

$$\Delta = \frac{61{\cdot}5 - 23{\cdot}45}{2 \cdot 1900} = \frac{61{\cdot}5 - 23{\cdot}45}{2 \cdot 1900}\ 100\% = 1{\cdot}00\%.$$

Приведенный способъ даетъ количественное выраженіе для мѣры расхожденія двухъ сравниваемыхъ рядовъ; но онъ не содержитъ въ себѣ критерія для опредѣленія, какая степень расхо-

[1]) Duncker (l. c. стр. 72).

жденія допустима. Разумѣется, 1% представляетъ, вообще говоря, небольшое уклоненіе, но таковымъ мы его признаемъ по субъективному впечатлѣнію; во всякомъ случаѣ относительно 5% могутъ уже возникнуть разногласія. Для практическихъ цѣлей бо́льшей точности обыкновенно и не требуется; можно просто условно принять какой-либо крайній предѣлъ допустимаго расхожденія. Такъ, напримѣръ, Duncker принимаетъ, что достаточной степенью совпаденія дѣйствительнаго и теоретическаго рядовъ является, если

$$\Delta < \frac{100}{\sqrt{N}} \%.$$

Тѣмъ не менѣе желательно имѣть столь опредѣленное выраженіе мѣры совпаденія или несовпаденія, чтобы оцѣнка этой мѣры устраняла возможность субъективныхъ разногласій. Такую мѣру даетъ Pearson [1]). Логическій ходъ его разсужденій состоитъ въ слѣдующемъ.

Въ результатѣ измѣренія какой-либо одной величины, скажемъ f_a, мы можемъ получить рядъ уклоняющихся значеній y_1^a, y_2^a, y_3^a..... Если уклоненія построены по типу случайныхъ уклоненій нормальной кривой, то легко опредѣлить вѣроятность, что уклоненіе не выйдетъ за предѣлы какой-либо заданной величины c; для этого нужно сложить всѣ случаи теоретическаго ряда, не выходящіе за предѣлы уклоненія c въ обѣ стороны

---

[1]) K. Pearson, On the Criterion that a given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is such that in can be reasonably supposed to have arisen from Random Sampling. Philos. Mag. Vol. L, 5 Series, 1900, стр. 157 сл.; W. Palin Elderton o. c., стр. 139 сл.

отъ средней и раздѣлить на всѣ возможные случаи, или

$$P = \frac{\sum_{x=0}^{x=+t} y_0 e^{-x^2/2\beta^2} + \sum_{x=0}^{x=-t} y_0 e^{-x^2/2\beta^2}}{\sum_{x=\infty}^{x=-\infty} y_0 e^{-x^2/2\beta^2}}$$

Обратная вѣроятность будетъ указывать вѣроятность уклоненій большихъ, чѣмъ t.

Если вмѣсто одной величины f_a мы возьмемъ двѣ f_a и f_b, и для каждой соотвѣтственный рядъ теоретическихъ значеній y_a и y_b, построенный по закону случайныхъ уклоненій, то опредѣленіе вѣроятности, что уклоненія не выйдутъ за предѣлы t, выразится интегралomъ того же типа, но съ двумя перемѣнными. Наконецъ, допуская цѣлую систему n величинъ f и столько же системъ теоретическихъ ихъ значеній, мы получимъ сложный интегралъ съ n перемѣнными для выраженія вѣроятности, что система y не даетъ уклоненій, большихъ, чѣмъ t, или даетъ уклоненія t и меньшія; и обратную вѣроятность, что система даетъ уклоненія t и большія чѣмъ t. Упрощеніе этого сложнаго интеграла приводитъ его къ виду

$$P = \frac{\int_{\chi}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \chi^{n-1} d\chi}{\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \chi^{n-1} d\chi}$$

гдѣ χ представляетъ сложную фунацію, состоящую изъ n перемѣнныхъ.

Указанная вѣроятность представляетъ рѣшеніе интересующаго насъ вопроса. Въ самомъ дѣлѣ,

намъ данъ рядъ величинъ f и нѣкоторая система теоретическихъ ихъ значеній, въ видѣ соотвѣтствующихъ y; система y уклоняется отъ системы f на опредѣленную величину T. Спрашивается: какова вѣроятность, что среди всѣхъ возможныхъ значеній y, если эти значенія построены по закону случайныхъ уклоненій, нѣкоторая система y даетъ уклоненіе не больше T? Зная эту вѣроятность, мы имѣемъ опредѣленное число шансовъ противъ другого опредѣленнаго числа противоположныхъ шансовъ утверждать, что уклоненіе теоретическаго ряда значеній y отъ эмпирическаго на мѣру T является результатомъ закона случайныхъ уклоненій. Остается связать функцію χ съ мѣрой уклоненія T. По Pearson'y эта связь выражается слѣдующимъ образомъ.

Пусть будетъ $n+1$ группъ какихъ либо величинъ и пусть эмпирическія частоты каждой группы выражаются въ видѣ

$$m_1', \; m_2', \; m_3' \ldots m'_{n+1};$$

теоретическое же значеніе этихъ частотъ, извѣстное a priori, составляетъ

$$m_1, \; m_2. \; m_3 \ldots . \; m_{n+1}.$$

Въ такомъ случаѣ

$s(m) = s(m') = N$ всему числу случаевъ даннаго распредѣленія.

Далѣе, если $e = m' - m$ представляетъ собою уклоненіе каждой данной эмпирической величины отъ ея теоретическаго значенія, то получается система уклоненій

$$e_1 + e_2 + \ldots . \; e_{n+1} = 0.$$

Въ такомъ случаѣ

$$\chi^2 = s\frac{e^2}{m}$$

$$\chi = \sqrt{s\frac{e^2}{m}}$$

и

$$P = e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\left(1+\frac{\chi^2}{2}+\frac{\chi^4}{2.4}+\frac{\chi^6}{2.4.6}+\cdots+\frac{\chi^{n-2}}{2.4.6\ldots(n-2)}\right)$$

причемъ число группъ $n+1$ должно быть нечетное. Если же оно четное, то его слѣдуетъ сдѣлать нечетнымъ, прибавивъ группу съ частотой 0 [1]).

Отсюда вытекаютъ слѣдующія практическія правила примѣненія указаннаго пріема:

1) Изъ каждаго члена f эмпирическаго ряда слѣдуетъ вычесть соотвѣтствующее ему значеніе y теоретическаго ряда; полученное уклоненіе d возвести въ квадратъ и раздѣлить на теоретическое значеніе y; всѣ результаты сложить; полученный результатъ дастъ χ^2 и

$$\chi = \sqrt{\Sigma\frac{d^2}{y}}$$

2. Если число группъ четное прибавить группу съ значеніемъ 0 и вычислить P по указанной формулѣ.

Результатъ представляетъ вѣроятность, что данная система уклоненій теоретическаго ряда отъ эмпирическаго представляетъ не болѣе, какъ результатъ дѣйствія закона случайныхъ уклоненій.

Указанный порядокъ вычисленій явствуетъ изъ слѣдующаго примѣра. При метаніи 12 костей поверхность съ 5 или 6 точками была получена 0, 1, 2 ... 12 разъ въ f числѣ опытовъ; теорети-

[1]) Вмѣсто того, чтобы прибѣгать къ болѣе сложной формулѣ Pearson'a для четнаго $n+1$; см. Davenport, Statistical Methods, 1904, стр. 24.

ческая величина a priori должна равняться y; d представляетъ разность f—y.

v	f	y	d	d^2	$\frac{d^2}{m}$
0	185	203	18	324	1·59 606
1	1 149	1 217	68	4 624	3·79 951
2	3 265	3 345	80	6 400	1·91 330
3	5 475	5 576	101	10 201	1·82 945
4	6 114	6 273	159	25 281	4·03 013
5	5 194	5 018	176	30 976	6·17 298
6	3 067	2 927	140	19 600	6·69 628
7	1 331	1 254	77	5 929	4·72 807
8	403	392	11	121	0·30 903
9	105	87	18	324	3·72 414
10	14	13	1	1	0·07 346
11	4	1	3	9	9·00 000
12	0	0	0	0	00 000
					Σ 48·87 241

$$\chi^2 = 48{\cdot}87\,241$$
$$\chi = 6{\cdot}623\,625$$
$$P = 0{\cdot}000\,016.$$

Результатъ выражаетъ, что при случайномъ распредѣленіи подобное данному уклоненіе (или большое) допускаютъ только 16 случаевъ изъ 1 000 000, или на 62 499 случаевъ всевозможныхъ уклоненій, если они обязаны своимъ происхожденіемъ случаю, только 1 разъ мы могли бы получить уклоненіе, не меньшее, чѣмъ данное; во всѣхъ же остальныхъ случаяхъ уклоненіе должно было бы быть меньшее. Такимъ образомъ наше субъективное впечатлѣніе о случайности или неслучайности уклоненія одного ряда отъ другого получаетъ опредѣленное численное выраженіе, не допускающее разумнаго сомнѣнія въ томъ, что эмпирическій рядъ не подходитъ подъ теоретическую формулу.

ПРИЛОЖЕНІЯ.

I. Таблица значеній

$$F_\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt.$$

γ	F_γ	γ	F_γ	γ	F_γ	γ	F_γ	γ	F_γ
0·00	0·0000	0·40	0·4284	0·80	0·7421	1·20	9103	2·30	9989
01	0113	41	4380	81	7480	21	9130	40	9993
02	0226	42	4475	82	7538	22	9155	50	9996
03	0338	43	4569	83	7595	23	9181	60	9998
04	0451	44	4662	84	7651	24	9205	70	9999
05	0564	45	4755	85	7707	25	9229	80	9999
06	0676	46	4847	86	7761	26	9252	90	99996
07	0789	47	4937	87	7814	27	9275	3·00	99998
08	0901	48	5027	88	7867	28	9297		
09	1013	49	5117	89	7918	29	9319		
0·10	1125	0·50	5205	0·90	7969	1·30	9340		
11	1236	51	5292	91	8019	31	9361		
12	1348	52	5379	92	8068	32	9381		
13	1459	53	5465	93	8116	33	9400		
14	1569	54	5549	94	8163	34	9419		
15	1680	55	5633	95	8209	35	9438		
16	1790	56	5716	96	8254	36	9456		
17	1900	57	5798	97	8299	37	9473		
18	2009	58	5879	98	8342	38	9490		
19	2118	59	5959	90	8385	39	9507		
0·20	2227	0·60	6039	1·00	8427	1·40	9523		
21	2335	61	6117	01	8468	41	9539		
22	2443	62	6194	02	8508	42	9554		
23	2550	63	6270	03	8548	43	9569		
24	2657	64	6346	04	8586	44	9583		
25	2763	65	6420	05	8624	45	9597		
26	2869	66	6494	06	8661	46	9611		
27	2974	67	6566	07	8698	47	9624		
28	3079	68	6638	08	8733	48	9637		
29	3183	69	6708	09	8768	49	9649		
0·30	3286	0·70	6778	1·10	8802	1·50	9661		
31	3389	71	6847	11	8835	60	9763		
32	3491	72	6914	12	8868	70	9838		
33	3593	73	6981	13	8900	80	9891		
34	3694	74	7047	14	8931	90	9928		
35	3794	75	7112	15	8961	2·00	9953		
36	3893	76	7175	16	8991	10	9970		
37	3992	77	7238	17	9020	20	9981		
38	4090	78	7300	18	9048				
39	4187	79	7361	19	9076				
0·40	4284	0·80	7421	1·20	9103				

II. Таблица логариѳмовъ функціи Γ(p).

P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·00	...	9750	9500	9251	9003	8755	8509	8263	8017	7773
1·01	1·99 7529	7285	7043	6801	6560	6320	6080	5841	5602	5365
1·02	5128	4892	4656	4421	4187	3953	3721	3489	3257	3026
1·03	2796	2567	2338	2110	1883	1656	1430	1205	0981	0757
1·04	0533	0311	0089	9868	9647	9427	9208	8989	8772	8554
1·05	1 98 8338	8122	7907	7692	7478	7265	7053	6841	6629	6419
1·06	6209	6000	5791	5583	5376	5169	4963	4758	4553	4349
1·07	4145	3943	3741	3539	3338	3138	2939	2740	2541	2344
1·08	2147	1951	1755	1560	1365	1172	0978	0786	0594	0403
1·09	0212	0022	9833	9644	9456	9269	9082	8896	8710	8525
1·10	1·97 8341	8157	7974	7791	7610	7428	7248	7068	6888	6709
1·11	6531	6354	6177	6000	5825	5650	5475	5301	5128	4955
1·12	4783	4612	4441	4271	4101	3932	3764	3596	3429	3262
1·13	3096	2931	2766	2602	2438	2275	2113	1951	1790	1629
1·14	1469	1309	1150	0992	0835	0677	0521	0365	0210	0055
1·15	1·96 9901	9747	9594	9442	9290	9139	8988	8838	8688	8539
1·16	8390	8243	8096	7949	7803	7658	7513	7369	7225	7082
1·17	6939	6797	6655	6514	6374	6234	6095	5957	5818	5681
1·18	5544	5408	5272	5137	5002	4868	4734	4601	4469	4337
1·19	4205	4075	3944	3815	3686	3557	3429	3302	3175	3048
1·20	2922	2797	2672	2548	2425	2302	2179	2057	1936	1815
1·21	1695	1575	1456	1337	1219	1101	0984	0867	0751	0636
1·22	0521	0407	0293	0180	0067	9955	9843	9732	9621	9511
1·23	1·95 9401	9292	9184	9076	8968	8861	8755	8649	8544	8439
1·24	8335	8231	8128	8025	7923	7821	7720	7620	7520	7420
1·25	7321	7223	7125	7027	6930	6834	6738	6642	6547	6453
1·26	6359	6267	6173	6081	5989	5898	5807	5716	5627	5537
1·27	5449	5360	5273	5185	5099	5013	4927	4842	4757	4673
1·28	4589	4506	4423	4341	4259	4 78	4097	4017	3938	3858
1·29	3780	3702	3624	3547	3470	3394	3318	3243	3168	3094
1·30	3020	2947	2874	2802	2730	2659	2588	2518	2448	2379
1·31	2310	2242	2174	2106	2040	1973	1907	1842	1777	1712
1·32	1648	1585	1522	1459	1397	1336	1275	1214	1154	1094
1·33	1035	0977	0918	0861	0803	0747	0690	0634	0579	0524
1·34	0470	0416	0362	0309	0257	0205	0153	0102	0051	0001
1·35	1·94 9951	9902	9853	9805	9757	9710	9663	9617	9571	9525
1·36	9480	9435	9391	9348	9304	9262	9219	9178	9136	9095
1·37	9054	9015	8975	8936	8898	8859	8822	8785	8748	8711
1·38	8676	8640	8605	8571	8537	8503	8470	8437	8405	8374
1·39	8342	8311	828·	8250	8221	8192	8163	813·	8107	8080
1·40	8053	8026	8000	7975	7950	7925	7901	7877	7854	7831
1·41	7808	7786	7765	7744	7723	7703	7683	7664	7645	7626
1·42	7608	7590	7573	7556	7540	7524	7509	7494	7479	7465
1·43	7451	7438	7425	7413	7401	7389	7378	7368	7358	7348
1·44	7338	7329	7321	7312	7305	7298	7291	7284	7278	7273
1·45	7268	7263	7259	7255	7251	7248	7246	7244	7242	7241
1·46	7240	7239	7239	7240	7241	7242	7243	7245	7248	7251
1·47	7254	7258	7262	7266	7271	7277	7282	7289	7295	7302
1·48	7310	7317	7326	7334	7343	7353	7363	7373	7384	7395
1·49	7407	7419	7431	7444	7457	7471	7485	7499	7514	7529

P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·50	$\bar{1}$·94 7545	7561	7577	7594	7612	7629	7647	7666	7685	7704
1·51	7724	7744	7764	7785	7806	7828	7850	7873	7896	7919
1·52	7943	7967	7991	8016	8041	8067	8093	8120	8146	8174
1·53	8201	8229	8258	8287	8316	8346	8376	8406	8437	8468
1·54	8500	8532	8564	8597	8630	8664	8698	8732	8767	8802
1·55	8837	8873	8910	8946	8983	9021	9059	9097	9135	9174
1·56	9214	9254	9294	9334	9375	9417	9458	9500	9543	9586
1·57	9629	9672	9716	9761	9806	9851	9896	9942	9989	$\bar{0}$035
1·58	$\bar{1}$·95 0082	0130	0177	0225	0274	0323	0372	0422	0472	0522
1·59	0573	0624	0676	0728	0780	0833	0886	0939	0993	1047
1·60	1102	1157	1212	1268	1324	1380	1437	1494	1552	1610
1·61	1668	1727	1786	1845	1905	1965	2025	2086	2147	2209
1·62	2271	2333	2396	2459	2522	2586	2650	2715	2780	2845
1·63	2911	2977	3043	3110	3177	3244	3312	3380	3449	3517
1·64	3587	3656	3726	3797	3867	3938	4010	4081	4154	4226
1·65	4299	4372	4446	4519	4594	4668	4743	4819	4894	4970
1·66	5047	5124	5201	5278	5356	5434	5513	5592	5671	5740
1·67	5830	5911	5991	6072	6154	6235	6317	6400	6482	6566
1·68	6649	6733	6817	6901	6986	7072	7157	7243	7322	7416
1·69	7503	7590	7678	7766	7854	7943	8032	8122	8211	8301
1·70	8391	8482	8573	8664	8756	8848	8941	9034	9127	9220
1·71	9314	9409	9502	9598	9693	9788	9884	9980	$\bar{0}$077	$\bar{0}$174
1·72	$\bar{1}$·96 0271	0369	0467	0565	0664	0763	0862	0961	1061	1162
1·73	1262	1363	1464	1566	1668	1770	1873	1976	2079	2183
1·74	2287	2391	2496	2601	2706	2812	2918	3024	3131	3238
1·75	3345	3453	3561	3669	3778	3887	3996	4105	4215	4326
1·76	4436	4547	4659	4770	4882	4994	5107	5220	5333	5447
1·77	5561	5675	5789	5904	6019	6135	6251	6367	6484	6600
1·78	6718	6835	6953	7071	7189	7308	7427	7547	7666	7787
1·79	7907	8028	8149	8270	8392	8514	8636	8759	8882	9005
1·80	9129	9253	9377	9501	9626	9751	9877	$\bar{0}$003	$\bar{0}$129	$\bar{0}$255
1·81	$\bar{1}$·97 0383	0509	0637	0765	0893	1021	1150	1279	1408	1538
1·82	1668	1798	1929	2060	2191	2322	2454	2586	2719	2852
1·83	2985	3118	3252	3386	3520	3655	3790	3925	4061	4197
1·84	4333	4470	4606	4744	4881	5019	5157	5295	5434	5573
1·85	5712	5852	5992	6132	6273	6414	6555	6697	6838	6980
1·86	7123	7266	7408	7552	7696	7840	7984	8128	8273	8419
1·87	8564	8710	8856	9002	9149	9296	9443	9591	9739	9887
1·88	$\bar{1}$·98 0036	0184	0333	0483	0633	0783	0933	1084	1234	1386
1·89	1537	1689	1841	1994	2147	2299	2453	2607	2761	2915
1·90	3069	3224	3379	3535	3690	3846	4003	4159	4316	4474
1·91	4631	4789	4947	5105	5264	5423	5582	5742	5902	6062
1·92	6223	6383	6544	6706	6867	7029	7192	7354	7517	7680
1·93	7844	8007	8171	8336	8500	8665	8830	8996	9161	9327
1·94	9494	9660	9827	9995	$\bar{0}$162	$\bar{0}$330	$\bar{0}$498	$\bar{0}$666	$\bar{0}$835	$\bar{1}$004
1·95	$\bar{1}$·99 1173	1343	1512	1683	1853	2024	2195	2366	2537	2709
1·96	2881	3054	3227	3399	3573	3746	3920	4094	4269	4443
1·97	4618	4794	4969	5145	5321	5498	5674	5851	6029	6206
1·98	6384	6562	6740	6919	7098	7277	7457	7637	7817	7997
1·99	8178	8359	8540	8722	8903	9085	9268	9450	9633	9816

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.

1. ЛОГИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНІЕ СВОДНЫХЪ ПРИЗНАКОВЪ.

Всякое изученіе начинается съ установленія признаковъ изучаемаго объекта. При этомъ можетъ оказаться, что всѣ экземпляры объектовъ даннаго рода обладаютъ опредѣленнымъ признакомъ въ тожественномъ видѣ; такъ, всякій кусокъ золота даетъ тожественный атомный вѣсъ и обладаетъ тожественнымъ свойствомъ вступать въ опредѣленныя химическія соединенія. Въ такомъ случаѣ данный признакъ въ этомъ тожественномъ видѣ и характеризуетъ объекты извѣстнаго рода; онъ прямо приписывается родовому понятію объектовъ: атомный вѣсъ золота равняется 197. Въ другихъ случаяхъ характеризующій объекты признакъ различается у отдѣльныхъ экземпляровъ объектовъ либо нѣкоторыми качественными, либо количественными особенностями. Такъ, всякое дерево характеризуется тѣмъ, что обладаетъ стволомъ; но качественное строеніе ствола у различныхъ деревьевъ бываетъ различно, равнымъ образомъ и количественные размѣры. И въ этомъ случаѣ мы можемъ поступать такъ же, какъ раньше, т. е. приписать признакъ всѣмъ экземплярамъ даннаго рода объектовъ, отнести его къ родовому объекту; при этомъ, разумѣется, приходится оставлять безъ вниманія качественныя и количественныя различія даннаго признака у отдѣльныхъ экземпляровъ.

Часто однако бываетъ, что въ этихъ именно качественныхъ или количественныхъ различіяхъ признака лежитъ главный интересъ изслѣдованія,

и признакъ, лишенный указанныхъ различій, теряетъ смыслъ и значеніе. Такъ, каждый человѣкъ обладаетъ ростомъ, но весь интересъ этого признака состоитъ именно въ томъ, что ростъ отдѣльныхъ индивидовъ бываетъ различенъ. При этихъ условіяхъ приписываніе родовому понятію объектовъ признака, поскольку онъ тожественно проявляется въ каждомъ отдѣльномъ экземплярѣ даннаго рода, не достигаетъ цѣли. Задача изслѣдованія состоитъ именно въ томъ, чтобы принять во вниманіе индивидуально различныя проявленія признака въ отдѣльныхъ экземплярахъ. Цѣль эта достигается образованіемъ сводныхъ признаковъ: среднихъ и относительныхъ величинъ.

Индивидуальныя различія извѣстнаго признака у отдѣльныхъ экземпляровъ даннаго рода бываютъ либо (а) количественныя, либо (б) качественныя. Количественныя, въ свою очередь, распадаются на различія (α) мѣрою, вѣсомъ, напримѣръ, длина стержня маиса, вѣсъ зерна; либо (β) числомъ, напримѣръ, число зеренъ на стержнѣ. Въ томъ и въ другомъ случаѣ мы получаемъ сводный признакъ путемъ вывода средней изъ индивидуально различныхъ конкретныхъ проявленій признака. Въ случаѣ (б) качественныхъ различій признака, напримѣръ, мужской и женскій полъ животнаго, мы получаемъ сводный признакъ путемъ вывода относительнаго числа.

Относительныя числа по своему логическому значенію бываютъ двоякаго рода. Одни расчленяютъ данную массу объектовъ на отдѣльныя части и опредѣляютъ мѣру каждой части по отношенію къ другимъ частямъ или цѣлому; таковы, напримѣръ, относительныя числа мужчинъ или женщинъ

въ населеніи. Такого рода относительныя аналогичны среднимъ, или точнѣе говоря, исполняютъ то же назначеніе: даютъ нѣкоторую общую, свободную отъ индивидуальныхъ особенностей, мѣру извѣстной части цѣлаго, подобно тому, какъ средняя даетъ среднюю величину, напримѣръ, какого-либо органа. Съ тою, разумѣется, разницею, что средняя исполняетъ это назначеніе, давая мѣру органа или части цѣлаго въ какихъ-либо абсолютныхъ единицахъ мѣры, вѣса, числа; тогда какъ относительныя числа принимаютъ за единицу измѣренія величину всей массы объектовъ (или какой-либо одной ея части). Такого рода относительныя назовемъ относительными статическими; статическими—потому, что онѣ характеризуютъ массу, какъ цѣлое, расчленяемое въ данномъ *состояніи* на части опредѣленнаго размѣра [1]).

Другой типъ относительныхъ величинъ имѣетъ характеръ динамическій. Этого рода относительныя величины показываютъ сравнительную частоту *появленія* извѣстнаго событія среди всей массы случаевъ, гдѣ этого событія можно ожидать. Таково, напримѣръ, отношеніе числа мужчинъ, вступающихъ въ бракъ въ теченіе года, къ числу мужчинъ опредѣленнаго возраста, не состоящихъ въ бракѣ. Такого рода относительныя числа аналогичны вѣроятностямъ [2]). Мы какъ бы имѣемъ нѣкоторое число равновозможныхъ случаевъ, изъ которыхъ опредѣленное число случаевъ даетъ данное событіе.

---

[1]) W. Lexis, Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs— und Moralstatistik, 1903, стр. 84: „аналитическія" вѣроятности. Dr. Franz Zižek, Die Statistischen Mittelwerte, 1908, стр. 19: „Gliederungszahlen".

[2]) „Генетическія" вѣроятности (W. Lexis, ib.), „Beziehungszahlen" (Fr. Zižek, l. c., 25).

Поэтому мы говоримъ о вѣроятности вступленія въ бракъ, вѣроятности смерти и т. д. [1]).

Относительныя динамическаго типа кореннымъ образомъ отличаются отъ относительныхъ статическихъ. Отношеніе числа жениховъ въ возрастѣ 24—25 лѣтъ къ общему числу жениховъ всѣхъ возрастовъ въ теченіе годичнаго промежутка времени не имѣетъ значенія вѣроятности для жениха имѣть опредѣленный возрастъ: совокупность жениховъ не представляетъ собою суммы равновозможныхъ случаевъ, для каждаго изъ которыхъ возрастъ опредѣляется путемъ тиража на-угадъ. Относительное число представляетъ здѣсь лишь расчлененіе всей совокупности на отдѣльныя части и мѣру каждой части по отношенію къ цѣлому, принятому за единицу [2]). Не имѣя логическаго значенія вѣроятностей, относительныя статическаго типа обладаютъ однако внѣшней формой, сходной съ выраженіемъ вѣроятности—отношеніе числа случаевъ одного извѣстнаго вида къ общей массѣ всѣхъ случаевъ даннаго рода. Благодаря этому, онѣ формально допускаютъ примѣненіе къ нимъ пріемовъ вычисленій, свойственныхъ вѣроятностямъ.

Отъ относительныхъ чиселъ въ собственномъ

---

[1]) Несовершенный видъ динамическихъ относительныхъ чиселъ представляютъ такъ наз. общіе коэффиціенты, какъ общій коэффиціентъ рождаемости, брачности и т. п. Здѣсь число случаевъ наступленія событія относится къ общей массѣ случаевъ, въ которой часть заѣдомо не можетъ дать даннаго событія.

[2]) Еще яснѣе это для отношенія, напримѣръ, числа мужчинъ ко всему населенію. Не имѣя логическаго значенія вѣроятностей, такія относительныя числа являются (болѣе или менѣе) сложными производными вѣроятностей. Такъ, относительное число жениховъ опредѣленнаго возраста представляетъ производную функцію отъ вѣроятности вступленія въ бракъ для каждаго возраста и отношенія возрастныхъ группъ, которое, въ свою очередь, зависитъ отъ вѣроятности смерти и миграціи.

смыслѣ отличаются такого рода выраженія, которыя обозначаютъ отношеніе двухъ разнородныхъ величинъ, не состоящихъ въ логическомъ отношеніи рода и вида, части и цѣлаго; таково отношеніе числа жителей къ пространству территоріи или обратно. Такого рода отношенія не входятъ въ понятіе сводныхъ признаковъ [1]).

Сводные признаки являются прежде всего чисто условнымъ формальнымъ пріемомъ сведенія индивидуальнаго разнообразія конкретныхъ признаковъ къ единому простому выраженію. Во многихъ случаяхъ они ничего собою больше и не представляютъ. Тогда сводные признаки являются лишь условнымъ математическимъ пріемомъ выраженія; приписывая ихъ совокупности объектовъ въ формѣ единой, общей характеристики, мы допускаемъ условную математическую фикцію. Это— фиктивные сводные признаки [2]). Но въ другихъ случаяхъ сводные признаки обнаруживаютъ опредѣленную правильность, которая даетъ основаніе приписывать имъ извѣстное реальное значеніе.

Для среднихъ эта правильность состоитъ въ томъ, что частота отдѣльныхъ данныхъ величинъ, уклоняющихся отъ средней, является опредѣленной функціей величины уклоненія. Въ простѣйшемъ случаѣ эта функція выражается формулой нормальной кривой. Если число случаевъ, въ которыхъ встрѣчаются въ дѣйствительности различныя уклоняющіяся другъ отъ друга величины, распредѣлено правильно, въ зависимости отъ величины

---

[1]) „Koordinationsverhältnisse" (W. Lexis, ib.).

[2]) Однако эта фикція во многихъ случаяхъ бываетъ весьма характерна, такъ какъ является болѣе или менѣе сложной функціей реальныхъ сводныхъ признаковъ (показательныя числа).

уклоненія, по нормальной кривой, то слѣдуетъ предположить, что условія, вызывающія такое распредѣленіе, сходны съ тѣми апріорными допущеніями, изъ которыхъ выводится формула нормальной кривой. Допущенія же эти состоятъ въ томъ, что отдѣльныя величины ряда получаются изъ нѣкоторой постоянной величины, лежащей въ основѣ всего ряда, путемъ присоединенія къ ней всевозможныхъ сочетаній большого числа очень малыхъ погрѣшностей, независимыхъ другъ отъ друга и случайныхъ. При этихъ условіяхъ, если взять достаточно большое число такихъ уклоняющихся другъ отъ друга величинъ, то средняя изъ нихъ дастъ наиболѣе вѣроятное значеніе истинной величины, лежащей въ основѣ ряда. По аналогіи съ этимъ, мы должны допустить, что средняя для ряда дѣйствительныхъ величинъ, подчиняющихся въ своемъ распредѣленіи закону нормальной кривой, точно также дастъ приближенное выраженіе нѣкоторой дѣйствительно существующей величины, лежащей въ основѣ ряда и проявляющейся въ отдѣльныхъ его членахъ съ случайными уклоненіями. Эта основная величина представляетъ нѣкоторый постоянный моментъ, присущій каждому отдѣльному случаю; но конкретный исходъ случая зависитъ сверхъ того и отъ другихъ, измѣняющихся моментовъ; поэтому указанная постоянная величина ни въ одномъ конкретномъ случаѣ можетъ и не проявляться въ своемъ истинномъ значеніи. Наиболѣе вѣроятное ея значеніе мы выводимъ изъ всей совокупности случаевъ, и для этой совокупности она является однимъ изъ постоянныхъ моментовъ и имѣетъ характеръ реальнаго признака.

На томъ же основаніи покоится и реальное

значеніе относительныхъ величинъ статическаго типа, съ тою только разницею, что здѣсь средняя (или общеотносительная) выражаетъ постоянство не абсолютной мѣры какой-либо одной части всей совокупности, а постоянство отношенія, въ какомъ находится размѣръ одной части къ размѣру всей совокупности. Абсолютный размѣръ каждой части можетъ быть больше или меньше; точно также и абсолютный размѣръ всей совокупности; но относительная величина части по сравненію съ цѣлымъ остается постоянной, и наиболѣе вѣроятнымъ выраженіемъ этого постояннаго отношенія является общеотносительная величина.

Симметричное распредѣленіе измѣнчиваго признака по нормальной кривой представляетъ собою простѣйшій случай. Дѣйствительное распредѣленіе рѣдко, однако, бываетъ вполнѣ симметричнымъ; оно гораздо чаще обнаруживаетъ асимметрію; тѣмъ не менѣе и асимметричное распредѣленіе можетъ обнаруживать правильность, подходя подъ одинъ изъ типовъ кривыхъ Pearson'a. Въ то время, какъ для полученія симметричной кривой мы допускаемъ одинаковую вѣроятность случайныхъ погрѣшностей въ обѣ стороны, для полученія асимметричной кривой мы можемъ исходить изъ допущенія, что случайное уклоненіе падаетъ съ различной вѣроятностью въ положительную и отрицательную сторону. Тогда варіанты, расположенныя симметрично по отношенію къ истинной величинѣ (гипотетической), будутъ встрѣчаться съ различной несимметричной частотой. То же и по отношенію къ средней ариѳметической. Средняя ариѳметическая перестанетъ быть наиболѣе частой величиной, послѣдняя можетъ разойтись съ нею и оказаться съ

одной или другой стороны отъ средней ариѳметической. Средняя ариѳметическая теряетъ свое прежнее типическое значеніе; она не представляетъ уже наиболѣе вѣроятнаго выраженія истинной. Если уклоненія падаютъ съ различной вѣроятностью въ положительную и отрицательную сторону отъ нѣкоторой данной величины, то мы можемъ разбить ихъ мысленно на двѣ части; одна часть, по-прежнему, пусть исчерпываетъ симметричныя уклоненія; остатокъ дастъ уклоненія, цѣликомъ падающія только въ одну сторону; при распредѣленіи этого остатка на всѣ случаи, мы получимъ въ средней ариѳметической выраженіе истинной величины съ прибавленіемъ *средняго* размѣра добавочнаго комплекса уклоненій; въ этомъ отношеніи различная вѣроятность уклоненій дастъ результатъ, аналогичный систематической погрѣшности. Въ этомъ смыслѣ средняя ариѳметическая, хотя теряетъ свой типическій характеръ, сохраняетъ однако значеніе наиболѣе вѣроятнаго средняго результата дѣйствія постоянныхъ и случайныхъ причинъ.

Типическое значеніе переходитъ къ наиболѣе частой варіантѣ; она является наиболѣе вѣроятной среди всѣхъ величинъ ряда; въ обѣ стороны отъ нея скопляется наибольшее число варіантъ, и послѣднія распредѣлены, по крайней мѣрѣ, на нѣкоторомъ разстояніи отъ нея, болѣе или менѣе симметрично. Наиболѣе частая варіанта является какъ бы нормальнымъ типомъ. Она представляетъ собою выраженіе совокупнаго дѣйствія двухъ постоянныхъ моментовъ ряда: основной величины ряда и разницы въ вѣроятностяхъ уклоненій. Наиболѣе частая варіанта опредѣляется мѣ-

стомъ наибольшаго скопленія варіантъ опредѣленной величины, по этому признаку она можетъ быть найдена во многихъ случаяхъ эмпирически. При такомъ способѣ величина ея не выводится изъ данныхъ ряда путемъ вычисленій; но она имѣетъ сводный характеръ, такъ какъ самое положеніе ея опредѣляется въ зависимости отъ всей совокупности условій ряда. Но въ большинствѣ случаевъ точное положеніе наиболѣе частой величины эмпирически не можетъ быть установлено, и тогда она должна быть найдена путемъ вычисленій, иногда весьма сложныхъ. Въ такомъ случаѣ ея сводный характеръ обнаруживается.

Такимъ образомъ и въ рядахъ асимметрическихъ мы имѣемъ сводные признаки съ опредѣленнымъ реальнымъ значеніемъ. Съ тою только разницею, что здѣсь характеристика извѣстной совокупности объектовъ является болѣе сложной и требуетъ двоякаго рода среднихъ величинъ.

Что касается относительныхъ величинъ динамическаго типа, то реальное значеніе этого рода сводныхъ признаковъ основывается на ихъ аналогіи съ вѣроятностями. При достаточно большомъ числѣ испытаній отношеніе числа случаевъ появленія событія къ числу всѣхъ исходовъ является наиболѣе вѣроятнымъ выраженіемъ вѣроятности событія; поэтому это отношеніе, при неизмѣнной вѣроятности событія, должно оставаться болѣе или менѣе постояннымъ, уклоняясь для каждаго ряда испытаній не далѣе опредѣленныхъ, теоретически выводимыхъ границъ. Если относительная частота появленія какого-либо событія или признака въ дѣйствительной совокупности однородныхъ случаевъ остается приблизительно одинаковой, а укло-

ненія такихъ относительныхъ частотъ для сходныхъ совокупностей не выходятъ за теоретическіе предѣлы, то мы можемъ допустить, что въ основѣ дѣйствительнаго ряда явленій также лежитъ нѣкоторое постоянное соотношеніе, аналогичное вѣроятности, и эмпирическое общеотносительное число является наиболѣе вѣроятнымъ выраженіемъ значенія этой вѣроятности. Въ этомъ смыслѣ относительное число получаетъ значеніе реальной характеристики данной совокупности явленій.

Подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто для среднихъ, такъ и для относительныхъ величинъ, рядомъ съ простѣйшимъ апріорнымъ построеніемъ, выясняющимъ реальный смыслъ относительнаго числа, возможны и болѣе сложныя теоретическія построенія. Но и здѣсь эти построенія, усложняя конструкцію, не измѣняютъ аналогіи относительныхъ величинъ съ вѣроятностями и логическаго ихъ смысла. Въ простѣйшемъ случаѣ мы допускаемъ, что относительное число является эмпирическимъ выраженіемъ одной общей, простой и неразложимой вѣроятности, тожественно лежащей въ основѣ каждаго отдѣльнаго случая. Но мы можемъ допустить, что въ основѣ каждой группы явленій лежитъ своя особая вѣроятность, и что численное отношеніе группъ либо разъ на всегда дано въ видѣ постоянныхъ коэффиціентовъ, либо въ свою очередь является апостеріорнымъ опытнымъ выраженіемъ особой вѣроятности появленія каждой отдѣльной группы. Въ такомъ случаѣ общеотносительное число явится выраженіемъ составной вѣроятности; болѣе сложное строеніе его отразится лишь на предѣлахъ теоретически допустимыхъ для него уклоненій; предѣлы эти либо останутся

прежними, либо съузятся, либо расширятся; разсѣяніе будетъ нормальнымъ, поднормальнымъ или сверхнормальнымъ; но общеотносительное число сохранитъ, по-прежнему, свой логическій характеръ сводной характеристики нѣкоторой совокупности явленій, съ ея болѣе сложнымъ строеніемъ, чѣмъ прежде.

Резюмируя все изложенное, мы приходимъ къ слѣдующему выводу. Признаки, подлежащіе изученію, мы можемъ образовывать двумя различными пріемами. Или мы можемъ извлекать ихъ изъ объектовъ постолько, посколько они встрѣчаются въ каждомъ объектѣ въ тожественномъ видѣ. Или мы можемъ принимать въ расчетъ и индивидуальныя различія признаковъ въ отдѣльныхъ объектахъ—количественныя и качественныя—и образовывать сводные признаки. Тѣ и другіе признаки характеризуютъ всю совокупность объектовъ. Но въ первомъ случаѣ они непосредственно характеризуютъ и каждый отдѣльный объектъ совокупности, вслѣдствіе чего совокупность получаетъ характеръ родовой, типичной группы. Во второмъ случаѣ сводные признаки характеризуютъ непосредственно только всю совокупность, но не имѣютъ *непосредственнаго* значенія для отдѣльныхъ объектовъ совокупности. Поэтому, если оставить въ сторонѣ отношеніе родовыхъ и сводныхъ признаковъ къ отдѣльнымъ объектамъ и обратить вниманіе только на отношеніе ихъ ко всей совокупности, то и тѣ, и другіе признаки получатъ одинаковое значеніе: они характеризуютъ совокупность, присущи ей, для нея являются одинаково постоянными и неиз-

мѣнными до тѣхъ поръ, пока не измѣняются реальныя условія существованія группы.

То обстоятельство, что родовые признаки выражаются въ видѣ постоянной величины, тогда какъ сводные колеблются, не имѣетъ существеннаго значенія съ этой точки зрѣнія. Разница эта является результатомъ лишь того, что родовые признаки обыкновенно доступны непосредственному измѣренію и наблюденію въ своемъ конкретномъ видѣ, тогда какъ сводные получаются лишь путемъ вычисленія наиболѣе вѣроятнаго значенія такой величины, которая конкретно недоступна наблюденію. Разница сводится слѣдовательно къ техническимъ пріемамъ наблюденія и вычисленія. Поэтому, когда и родовой признакъ, напримѣръ атомный вѣсъ элемента, недоступенъ непосредственному безошибочному измѣренію въ одномъ единичномъ опытѣ, приходится опредѣлять лишь его наиболѣе вѣроятное значеніе. Въ такомъ случаѣ и родовой признакъ получаетъ лишь приближенное выраженіе.

Если такимъ образомъ, независимо отъ пріема полученія, и родовые, и сводные признаки одинаково характеризуютъ группу, къ нимъ должны быть одинаково примѣнимы способы индуктивнаго изслѣдованія. Будетъ ли явленію присущъ родовой или сводный признакъ, и въ томъ, и другомъ случаѣ мы одинаково можемъ прибѣгать въ дальнѣйшемъ изученіи къ пріемамъ единственнаго сходства, единственной разницы и т. д. Правда, особенности сводныхъ признаковъ не остаются здѣсь безъ вліянія: сводные признаки легче допускаютъ примѣненіе однихъ пріемовъ предпочтительно передъ другими, и получаемые результаты обыкновенно не обладаютъ характеромъ той безу-

словности и необходимости, какая свойственна точнымъ законамъ индукціи. Однако разница эта зависитъ не отъ того, что сводные признаки какъ-либо иначе относятся къ своей совокупности, чѣмъ родовые, и вслѣдствіе этого требуютъ особыхъ пріемовъ изученія, отличныхъ отъ общей индукціи; разница эта зависитъ отъ обстоятельствъ, которыя одинаково могутъ встрѣчаться и по отношенію къ родовымъ признакамъ, но при сводныхъ признакахъ они встрѣчаются чаще.

Пріемы индукціи Милля требуютъ исчерпывающаго разложенія явленія на элементарные признаки. Всякій разъ, когда признакъ не доведенъ до элементарной простоты, и въ явленіи имѣются ускользающіе отъ контроля остатки, выводъ причинной связи лишенъ характера безусловности и необходимости. Подобное исчерпывающее и конечное разложеніе доступно почти исключительно только въ экспериментѣ. Сводные признаки относятся всегда къ очень сложнымъ совокупностямъ, въ которыя рядомъ съ признаками, подмѣчаемыми и устанавливаемыми наблюденіемъ, проникаютъ признаки, ускользающіе отъ контроля; самое расчлененіе сводныхъ признаковъ на элементарныя, далѣе неразложимыя части бываетъ трудно и до сихъ поръ въ рѣдкихъ случаяхъ осуществимо. Весьма понятно, что при такихъ условіяхъ схематическое примѣненіе къ нимъ правилъ Миллевской индукціи даетъ въ результатѣ эмпирическія правильности, вмѣсто точныхъ и безусловныхъ законовъ.

Но не въ лучшемъ положеніи находятся и родовые типическіе признаки, когда они относятся къ сложнымъ явленіямъ, не допускающимъ въ то же

время эксперимента; и здѣсь пріемы индукціи примѣняются съ грубымъ эмпирическимъ приближеніемъ. Между сводными и родовыми признаками разница въ этомъ отношеніи количественная, но не качественная. Въ одномъ случаѣ мы получаемъ точную величину признака путемъ измѣренія одного единственнаго явленія, въ другомъ—наиболѣе вѣроятное значеніе этой величины путемъ вывода средней изъ многихъ измѣреній. Но получивъ точную величину въ первомъ случаѣ и наиболѣе вѣроятное значеніе ея во второмъ, мы въ дальнѣйшемъ примѣняемъ къ нимъ одни и тѣ же пріемы индуктивнаго изслѣдованія.

Въ обоихъ случаяхъ эти пріемы могутъ привести къ точнымъ законамъ, или эмпирическимъ правильностямъ. Тотъ или другой исходъ зависитъ не отъ родового или своднаго способа установленія признака, а отъ того, достаточно ли элементаренъ установленный признакъ, и обладаемъ ли мы исчерпывающимъ знаніемъ и контролемъ другихъ признаковъ и условій, сопровождающихъ данный признакъ. Въ естественныхъ наукахъ мы сплошь и рядомъ оперируемъ съ признаками, которые выведены сводными пріемами, какъ-то атомный вѣсъ, длина секуднаго маятника и т. п., и тѣмъ не менѣе получаемъ въ результатѣ точные законы. Въ другихъ же случаяхъ, оперируя съ родовыми признаками, мы не выходимъ за предѣлы эмпирическихъ соотношеній.

Такимъ образомъ съ того момента, какъ сводный признакъ выведенъ, полученъ и отнесенъ къ своей совокупности, онъ въ дальнѣйшемъ изученіи подчиняется общимъ законамъ индукціи. Нѣтъ особыхъ пріемовъ изученія ни индуктивныхъ, ни ана-

логичныхъ или параллельныхъ индукціи, которыя были бы спеціально приспособлены къ своднымъ признакамъ и могли бы составлять особый статистическій методъ индукціи. Статистическій методъ, какъ особый логическій пріемъ, относится лишь къ полученію сводныхъ признаковъ, слѣдовательно, только къ первой стадіи опытнаго изученія—наблюденію и установленію признаковъ. Въ дальнѣйшемъ есть только общая обычная индукція, одинаково примѣняемая, какъ къ родовымъ, такъ и къ своднымъ признакамъ.

Представленіе, будто статистическій методъ составляетъ особый логическій методъ вывода законовъ, параллельный и замѣняющій собою общую индукцію, вытекаетъ иной разъ изъ ложнаго взгляда на отношеніе сводныхъ признаковъ къ ихъ совокупностямъ. А именно, сводный признакъ, самъ по себѣ, разсматривается, какъ «законъ» для соотвѣтствующей совокупности. Такъ, называютъ «закономъ» коэффиціентъ смертности, относительное число преступленій и т. д. [1]).

Однако среднее число дѣтей, приходящихся на одинъ бракъ, средній возрастъ умершихъ, отношеніе числа мужчинъ и женщинъ, вѣроятность смерти также мало представляютъ собою «законы», какъ и средній ростъ или средній вѣсъ. Это не что иное, какъ признаки соотвѣтствующихъ совокупностей или группъ объектовъ. То обстоятельство, что указанныя среднія и относительныя числа обнаруживаютъ постоянство, точно также не составляетъ само по себѣ никакого закона. Это то же свой-

---

[1]) См. Г. фонъ Майръ, Статистика и Обществовѣдѣніе, 1899, т. I, стр. 150, то же и у многихъ другихъ.

ство, которое присуще родовымъ признакамъ—они тоже постоянны, но въ этомъ нѣтъ еще закона. Постоянство является лишь основаніемъ, почему мы приписываемъ своднымъ признакамъ реальное значеніе и въ этомъ отношеніи признаемъ за ними право характеризовать явленія, наряду съ признаками родовыми. Разумѣется, и атомный вѣсъ, и цвѣтъ, и теплоемкость—все это мы могли бы назвать законами соотвѣтствующихъ тѣлъ. Съ этой точки зрѣнія и средній ростъ или коэффиціентъ смертности также законъ. Въ такомъ случаѣ вопросъ сводился бы лишь къ терминологіи, и всѣ вообще признаки стали бы законами. Но посколько закономъ мы называемъ лишь *связь* признаковъ одного и того же объекта, то простая принадлежность своднаго признака своему логическому объекту не можетъ быть разсматриваема, какъ законъ. Законъ начинается только съ того момента, какъ мы ставимъ признакъ—родовой или сводный, безразлично—въ связь съ какими-либо другими признаками и условіями, или устанавливаемъ правильность послѣдовательнаго измѣненія признака во времени. Но здѣсь опять таки мы выходимъ за предѣлы простой характеристики явленій при помощи сводныхъ признаковъ и оперируемъ пріемами индукціи.

Цѣлью установленія связей является «объясненіе», средствомъ—пріемы индукціи, а результатомъ—открытіе разнаго рода эмпирическихъ зависимостей, при благопріятныхъ же условіяхъ—и установленіе точнаго закона. Такимъ образомъ, по отношенію къ своднымъ признакамъ мы можемъ устанавливать троякаго рода необходимыя связи, какъ это имѣетъ мѣсто и по отношенію къ родовымъ признакамъ. При этомъ моментомъ, съ ко-

торымъ связывается сводный признакъ, можетъ быть, въ свою очередь, сводный признакъ, или имъ можетъ быть признакъ родовой. Мы можемъ, во 1-хъ, устанавливать необходимую связь одного признака данной совокупности съ другимъ ея же признакомъ—это т. н. необходимая связь двухъ признаковъ одного и того же объекта. Напримѣръ, связь смертности и профессіи, средняго роста и преступности. Во 2-хъ, мы можемъ устанавливать т. н. причинныя связи, т. е. необходимую связь между признакомъ совокупности и какимъ-либо внѣ ея лежащимъ моментомъ, напримѣръ, связь между количествомъ кражъ и цѣною жизненныхъ припасовъ; наконецъ, въ 3-хъ, мы можемъ устанавливать необходимую послѣдовательность примѣненія признака во времени, или т. н. законъ явленія; напримѣръ, ростъ средней величины заработной платы.

Для этой цѣли мы дифференцируемъ общую массу объектовъ на части по какому-либо признаку; напримѣръ, массу индивидовъ—на потребляющихъ и не потребляющихъ алкоголь; и затѣмъ наблюдаемъ, какъ реагируетъ на эту дифференціацію другой признакъ, напримѣръ, смертность, связь котораго съ даннымъ мы ищемъ. Здѣсь мы, слѣдовательно, имѣемъ въ виду найти двѣ совокупности, которыя во всемъ, по возможности, были бы сходны, за исключеніемъ одного признака, по которому мы дифференцируемъ общую массу объектовъ. Но такъ какъ при этомъ въ обѣихъ дифференцированныхъ совокупностяхъ могутъ быть и другіе общіе признаки, то открывающаяся связь носитъ эмпирическій характеръ; чтобы придать ей бо́льшую безусловность, мы стараемся найти ее

въ другомъ, третьемъ или многихъ случаяхъ. Вмѣсто единственнаго различія, мы можемъ стремиться къ отысканію совокупностей, весьма различныхъ во всемъ и лишь сходныхъ въ одномъ какомъ-либо признакѣ. Но чаще всего мы прибѣгаемъ къ пріему сопутствующихъ измѣненій.

При примѣненіи этихъ обычныхъ правилъ индукціи къ своднымъ признакамъ, мы, правда, принуждены прибѣгать къ особымъ специфическимъ пріемамъ изслѣдованія устойчивости статистическихъ цыфръ и соотношенія (корреляціи) рядовъ. Но эти специфическіе пріемы имѣютъ цѣлью лишь установить: въ первомъ случаѣ—имѣемъ ли мы передъ собою въ двухъ случаяхъ одинъ и тотъ же сводный признакъ, или различные; а при корреляціи—выходятъ ли сопутствующія другъ другу измѣненія двухъ признаковъ за предѣлы случайности или остаются въ этихъ предѣлахъ? Необходимость примѣненія этихъ специфическихъ пріемовъ опять таки вызывается не какими-либо особенностями въ логическомъ способѣ установленія связи, а лишь тѣмъ обстоятельствомъ, что сводные признаки суть лишь вѣроятныя значенія нѣкоторыхъ неизвѣстныхъ величинъ; поэтому всякій разъ, когда мы имѣемъ дѣло съ новой величиной своднаго признака, мы должны установить, представляетъ-ли эта величина лишь новое приближенное значеніе неизмѣнившагося признака, или же мы имѣемъ передъ собой измѣненіе и самой истинной величины признака. Такимъ образомъ, и здѣсь специфическіе пріемы статистики сводятся къ установленію наличности или отсутствію измѣненія своднаго признака, къ установленію одного или

двухъ различныхъ сводныхъ признаковъ, и не имѣютъ отношенія къ логической схемѣ установленія связи.

Если такимъ образомъ индуктивное изслѣдованіе сводныхъ признаковъ, отнесенныхъ къ совокупностямъ, какъ единому объекту, не составляетъ въ логическомъ отношеніи какого-либо особаго «статистическаго» метода, то, съ другой стороны, и матеріальные результаты такого изслѣдованія не составляютъ никакой особой статистической науки. Какъ ни интересны и важны эти результаты, они однако не объединены ни единствомъ объекта, ни единствомъ цѣли. Смотря по своему объекту или цѣли изслѣдованія, они служатъ той или другой наукѣ или нуждамъ практики. Для того, чтобы использовать результаты изслѣдованія сводныхъ признаковъ надо быть экономистомъ, криминалистомъ, соціологомъ, біологомъ, ботаникомъ, зоологомъ, общественнымъ дѣятелемъ, техникомъ, врачемъ и т. д. Внѣ какой-либо спеціальности или практической задачи статистикъ остается простымъ коллекціонеромъ среднихъ и относительныхъ величинъ, безъ малѣйшей, къ тому же, надежды достигнуть когда-либо полноты своей коллекціи.

Такимъ образомъ, ни съ точки зрѣнія логическихъ пріемовъ изученія причинныхъ зависимостей, ни съ точки зрѣнія матеріальнаго содержанія т. н. статистика не представляетъ собою какой-либо особой теоретической или методологической дисциплины.

Иначе обстоитъ дѣло по отношенію къ процессу нахожденія сводныхъ признаковъ. Въ то время, какъ въ процессѣ характеристики явленія

своднымъ признакомъ мы относимъ единый признакъ къ совокупности, какъ единому логическому объекту, здѣсь мы имѣемъ отношеніе своднаго признака къ отдѣльнымъ индивидуальнымъ объектамъ совокупности. Здѣсь сводный признакъ является результатомъ цѣлаго ряда логическихъ операцій: наблюденія или измѣренія индивидуальныхъ случаевъ, констатированія опредѣленной эмпирической правильности ихъ взаимныхъ количественныхъ отношеній, принятія извѣстной гипотезы и допущеній, ряда дедукцій и вспомогательнаго аппарата вычисленій. Сводный признакъ, получающійся въ окончательномъ выводѣ, является выраженіемъ извѣстной закономѣрности, обнимающей собою индивидуальные случаи совокупности; для нихъ онъ дѣйствительно законъ, но не для совокупности, какъ логически единаго объекта. Въ этомъ отношеніи мы дѣйствительно можемъ говорить объ особомъ логическомъ методѣ. Но хотя конечная цѣль этого метода во многихъ случаяхъ крайне проста: установленіе признака—результатъ, который въ другихъ случаяхъ получается безъ всякихъ гипотезъ и вспомогательнаго аппарата вычисленій, путемъ простого наблюденія, счета или измѣренія; тѣмъ не менѣе самый методъ не представляетъ собою какого-либо простого логическаго пріема; въ немъ мы имѣемъ дѣло съ сложной комбинаціей наблюденія, гипотезъ, дедукцій и индукцій.

Сущность статистическаго метода состоитъ, какъ въ установленіи сводныхъ признаковъ, такъ и въ изслѣдованіи и провѣркѣ ихъ реальнаго, конститутивнаго и элементарнаго характера.

Подъ реальностью своднаго признака слѣдуетъ

понимать противоположность его простой математической фикціи. И фиктивный, и реальный сводный признакъ выводится путемъ одинаковыхъ ариѳметическихъ пріемовъ изъ признаковъ отдѣльныхъ объектовъ; но реальный признакъ посредствомъ извѣстной гипотезы – гипотезы случайныхъ уклоненій—можетъ быть логически связанъ съ признаками отдѣльныхъ объектовъ или ихъ группъ въ предѣлахъ данной совокупности; вслѣдствіе чего ариѳметическій пріемъ получаетъ логическое обоснованіе. Поскольку послѣднее представляется невозможнымъ, сводный признакъ остается простымъ результатомъ счетной операціи, удобной внѣшней формой изложенія, лишенной однако во многихъ случаяхъ внутренняго содержанія.

Подъ конститутивностью понимается то свойство признака, что онъ неизмѣнно и обязательно присущъ опредѣленнаго рода совокупностямъ, характеризуетъ всѣ совокупности даннаго рода, не исчезаетъ съ несущественнымъ измѣненіемъ совокупности; иначе говоря, является существенной и неслучайной характеристикой.

Элементарность признака состоитъ въ абсолютной простотѣ и дальнѣйшей неразложимости.

Конститутивность и элементарность сводныхъ признаковъ можетъ быть устанавливаема и общими пріемами индукціи, какъ это имѣетъ мѣсто по отношенію къ родовымъ признакамъ. Мы можемъ сравнивать отдѣльныя совокупности одного и того же рода, подобно тому какъ мы сравниваемъ отдѣльные индивидуальные объекты; если какой-либо признакъ остается неизмѣнно присущимъ совокупности, мы считаемъ его конститутивнымъ; онъ является неразрывно связаннымъ съ понятіемъ дан-

ной совокупности, составляетъ ея существенное свойство. Если при всѣхъ условіяхъ признакъ остается тожественнымъ—онъ элементаренъ. При такого рода изслѣдованіяхъ мы можемъ либо пользоваться такими совокупностями, которыя получены каждая самостоятельно, либо расчленять одну общую совокупность на ея составныя части.

Но изслѣдованіе свойствъ сводnаго признака можетъ быть достигнуто и путемъ сопоставленія его съ признаками индивидуальныхъ объектовъ совокупности. Такого рода изслѣдованіе входитъ въ область статистическаго метода.

Основнымъ пріемомъ такого изслѣдованія сводныхъ признаковъ является опредѣленіе функціональной зависимости между частотою отдѣльныхъ варіантъ и ихъ уклоненіями отъ нѣкоторой исходной варіанты. Простѣйшей формой такой зависимости является нормальная кривая. Когда рядъ наблюденій даетъ нормальную кривую, мы имѣемъ основаніе предположить, что передъ нами устойчивое состояніе признака. Средняя варіанта является наиболѣе частой, нормальной величиной; уклоненія отъ нея падаютъ симметрично, безразлично и случайно въ обѣ стороны; нѣтъ условій болѣе благопріятствующихъ уклоненіямъ въ одну сторону, предпочтительно передъ уклоненіями въ другую сторону. Хотя нормальная кривая не служитъ гарантіей элементарности сводnаго признака, но она во всякомъ случаѣ свидѣтельствуетъ о сравнительно бо́льшей простотѣ и устойчивости.

Однако эмпирическій матеріалъ только въ рѣдкихъ случаяхъ даетъ нормальную кривую. Эмпирическимъ рядамъ обычно присуща бо́льшая или меньшая асимметрія. Асимметричные ряды могутъ

подчиняться въ своемъ распредѣленіи формуламъ кривыхъ болѣе сложнаго типа. Если мы имѣемъ дѣло съ такого рода асимметричной кривой, то задача изслѣдованія состоитъ въ томъ, чтобы убѣдиться, составляетъ ли асимметрія свойство изучаемаго признака, или же является результатомъ неоднородности матеріала; иначе говоря, не представляется ли возможнымъ разбить сводный признакъ на болѣе элементарные признаки. Съ этой цѣлью необходимо попытаться расчленить общую кривую на отдѣльныя кривыя, ее составляющія. Это расчлененіе можетъ быть достигнуто путемъ математическаго анализа кривой [1]). Но пріемы математической переработки столь сложны даже для простѣйшаго случая, что гораздо легче достигнуть того же результата эмпирическимъ расчлененіемъ всей совокупности объектовъ на группы по тѣмъ или инымъ признакамъ.

Если при всѣхъ расчлененіяхъ мы получаемъ для каждой группы кривыя того же типа, какъ для всей массы, то асимметрія даннаго типа является свойствомъ самого признака. Если послѣ расчлененія для отдѣльныхъ группъ получаются кривыя различнаго строенія, то во всякомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ матеріаломъ неоднороднымъ. Получившіяся кривыя могутъ оказаться либо нормальными, либо, въ свою очередь, кривыми болѣе сложнаго строенія. Образцомъ подобнаго расчлененія общей кривой на частныя могутъ служить изслѣдованія Pearson'a, въ частности изслѣдованіе измѣреній череповъ, приводимыхъ Ammon'омъ для

[1]) K. Pearson, Contributions to the Mathematical Theory of Evolution, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A, vol. 185, Part I, 1894, стр. 71 и сл.

доказательства эволюціи германцевъ; асимметричная кривая измѣреній разлагается на двѣ части, изъ которыхъ одна совпадаетъ съ кривою современныхъ германцевъ. Примѣромъ расчлененія болѣе сложной кривой является расчлененіе кривой смертности [1]).

На основаніи нѣсколькихъ крайнихъ возрастовъ Pearson находитъ кривую для послѣднихъ возрастовъ; затѣмъ онъ вычитаетъ ее изъ всего матеріала, беретъ нѣсколько слѣдующихъ возрастовъ, съ которыми поступаетъ такъ же, и т. д. до остатка, который даетъ самъ по себѣ кривую. Въ результатѣ вся кривая расчленилась на пять частей. Старый возрастъ для англичанъ даетъ кривую III типа (у Lexis'a для этого возраста нормальная кривая). Эта кривая захватываетъ однимъ концомъ значительную часть средняго возраста, нѣкоторую часть юности и исчезаетъ въ дѣтскомъ возрастѣ. Средній возрастъ и юность даютъ (почти) нормальную кривую; дѣтскій и младенческій возрасты—асимметрическія кривыя, причемъ послѣдняя захватываетъ отчасти время до рожденія [2]).

Приведенный примѣръ кривой смертности характеризуется, сверхъ асимметріи, также и тѣмъ, что кривая представляетъ болѣе одной вершины; въ ней во всякомъ случаѣ ясно выражены два максимума на всемъ протяженіи. Но встрѣчаются кривыя и съ бо́льшимъ числомъ вершинъ, въ особенности въ ботаникѣ; возможно, что онѣ являются результатомъ смѣшенія разнородныхъ группъ и при расчлененіи могутъ дать кривыя болѣе пра-

---

[1]) Pearson, ib., II. Skew Variation in Homogeneous Material, A. Vol. 186, P. 1, 1895, стр. 406—410.

[2]) Pearson, The Chances of Death and other Studies in Evolution, 1897, vol. 1.

вильной и простой формы. Въ ботаническомъ же матеріалѣ встрѣчаются кривыя, вершина которыхъ выступаетъ надъ нормальной (Hyperbinomialcurven). При разложеніи на нормальную кривую онѣ даютъ остатокъ, состоящій изъ индивидовъ, не принимающихъ участія въ варіаціи [1]).

Окончательная асимметрія признака указываетъ на то, что при элементарномъ (насколько можно судить) характерѣ дѣйствующихъ моментовъ, мы имѣемъ неодинаковыя условія для развитія варіантъ въ обѣ стороны отъ опредѣляющихъ величинъ ряда. Либо имѣются условія, вызывающія и способствующія развитію варіантъ въ одномъ направленіи, либо причины, задерживающія, устраняющія возможность варіацій въ противоположномъ направленіи, либо устраняющія или уничтожающія экземпляры, варіирующіе въ этомъ направленіи.

Подобнаго рода состояніе можетъ быть устойчивымъ и нормальнымъ, какъ, напримѣръ, для кривой возраста вступленія въ бракъ: законъ отсѣкаетъ возможность варіацій ниже извѣстнаго начальнаго возраста, экономическія условія и обычай опредѣляютъ наиболѣе частый возрастъ, но затѣмъ ни что не препятствуетъ широкой возможности уклоненія варіантъ въ направленіи возрастающихъ возрастовъ. Съ другой стороны, асимметрія можетъ быть результатомъ эволюціи, наступившей подъ вліяніемъ измѣнившихся внѣшнихъ условій; такъ, напримѣръ, колебанія смертности около нормальнаго возраста могутъ быть симметричны; съ улуч-

---

[1]) Ludwig, Die pflanzlichen Variationscurven und die Gauss'sche Variationscurve. Botan. Centralbl., 98, стр. 294 и сл., 343 и сл.

шеніемъ условій, нѣкоторое количество смертныхъ случаевъ можетъ падать въ направленіи болѣе высокаго возраста, сравнительно съ прежнимъ, ариѳметическая средняя и наиболѣе частая величина могутъ разойтись, и рядъ получитъ асимметрическій видъ. При этомъ асимметрія можетъ быть окончательной или переходной: средняя въ своемъ движеніи по направленію къ наиболѣе частой варіантѣ можетъ остановиться на извѣстномъ отъ нея разстояніи, либо можетъ опять слиться съ нею. Въ послѣднемъ случаѣ эволюція завершится снова состояніемъ симметрическаго равновѣсія, но уже при средней новаго размѣра.

Но и симметрическая нормальная кривая не свидѣтельствуетъ необходимо объ однородности матеріала. Она тоже можетъ быть разложена въ извѣстныхъ случаяхъ на двѣ нормальныя кривыя, совпадающія своими осями [1]). Простой или составной характеръ нормальной кривой обнаруживается путемъ изслѣдованія разсѣянія: сверхнормальное и поднормальное разсѣяніе свидѣтельствуетъ о составномъ характерѣ совокупности и даетъ указаніе на характеръ состава; нормальное разсѣяніе можетъ быть результатомъ элементарнаго характера признака; но оно можетъ быть и результатомъ комбинаціи случайныхъ колебаній въ численномъ отношеніи группъ, обладающихъ сводными признаками разной величины.

Если формула кривой ряда даетъ полную картину закономѣрности, связывающей индивидуальные случаи, то отдѣльные характерные моменты этой закономѣрности находятъ выраженіе въ свод-

---

[1]) Pearson, Contributions etc. l. c. Vol. 185, стр. 90.

ныхъ признакахъ. Такъ, средняя ариѳметическая стремится свести къ минимуму вліяніе случайныхъ элементовъ при полной симметріи ряда или къ опредѣленной средней мѣрѣ въ рядахъ несимметричныхъ; въ послѣднемъ случаѣ наиболѣе частая величина стремится выразить наиболѣе вѣроятный, нормальный, типичный при данныхъ условіяхъ результатъ. Поэтому сводные признаки могутъ служить практически удобнымъ средствомъ для болѣе простой и легкой характеристики ряда индивидуальныхъ случаевъ, объединенныхъ въ совокупность. Чѣмъ проще типъ кривой, тѣмъ меньшимъ количествомъ отдѣльныхъ моментовъ она можетъ быть характеризована.

Первоначально статистика довольствовалась однимъ своднымъ признакомъ—средней ариѳметической или общеотносительнымъ числомъ. Такое положеніе отвѣчаетъ допущенію нормальной кривой. Но даже и при этомъ допущеніи одинъ указанный признакъ не даетъ понятія о степени скученности или разбросанности ряда. Для этой цѣли средняя или общеотносительная должна сопровождаться указаніемъ средней мѣры уклоненія. Для рядовъ асимметрическихъ требуется уже двѣ среднихъ величины—средняя ариѳметическая и наиболѣе частая варіанта; среднее квадратическое уклоненіе характеризуетъ разбросанность ряда; сверхъ того необходима характеристика степени асимметріи; для этой цѣли можетъ служить величина разстоянія между средней и наиболѣе частой варіантой, выраженная въ единицахъ среднеквадратическаго уклоненія. Для выясненія элементарности сводныхъ признаковъ необходимо опредѣленіе коэффиціента расхожденія въ рядахъ, соотвѣтствую-

щихъ нормальной кривой или опредѣленіе сводныхъ признаковъ для отдѣльныхъ составныхъ частей совокупности.

Хотя сводные признаки для многихъ практическихъ цѣлей не только вполнѣ достаточны, но и удобнѣе полныхъ формулъ ряда, но они уступаютъ послѣднимъ не только въ отношеніи полноты характеристики, но и ея точности.

Эмпирическій матеріалъ всегда страдаетъ бо́льшей или меньшей неполнотой наблюденія и неточностью отдѣльныхъ его результатовъ. Эти недостатки могутъ отражаться и на величинѣ отдѣльныхъ признаковъ, характеризующихъ рядъ, если мы будемъ вычислять или устанавливать ихъ на основаніи непосредственно данныхъ эмпирическихъ цыфръ. Такъ, сужденіе о крайнихъ предѣлахъ варіацій можетъ быть неточно, если крайнія варіанты случайно ускользнули отъ наблюденія; мѣсто наибольшаго скопленія варіантъ случайно можетъ быть раздѣлено варіантой сравнительно меньшей величины или находиться въ промежуткѣ между двумя данными варіантами. Формула кривой даетъ возможность исправить эмпирическіе недостатки отдѣльныхъ мѣстъ ряда на основаніи всѣхъ данныхъ ряда, путемъ замѣны эмпирическихъ частотъ наиболѣе вѣроятными теоретическими ихъ значеніями и путемъ вычисленія недостающихъ членовъ ряда. Такъ, крайній предѣлъ жизни могъ бы быть теоретически опредѣленъ на основаніи кривой смертности старшихъ возрастовъ [1]); нерѣдко наиболѣе частое значеніе варіанты теоретически не совпадаетъ съ эмпирическимъ ея положеніемъ, не го-

[1]) См. напримѣръ, Pearson, The Chances of Death, т. 1, стр. 29.

воря уже о случаяхъ, когда эмпирически его трудно установить [1]). Наконецъ, несоотвѣтствіе между теоретически вѣроятнымъ и дѣйствительнымъ значеніемъ отдѣльныхъ частотъ можетъ указывать не только на случайные недостатки наблюденія, но и на наличность опредѣленныхъ причинъ, дѣйствующихъ въ извѣстныхъ мѣстахъ ряда, и такимъ образомъ вести къ изслѣдованію этихъ причинъ. Такъ, напримѣръ, сравненіе теоретической кривой плодовитости опредѣленной группы населенія даетъ возможность установить, что какъ безплодіе, такъ и число дѣтей въ опредѣленныхъ случаяхъ зависитъ отъ искусственнаго нарушенія естественныхъ варіацій физіологической плодовитости [2]).

Благодаря указаннымъ обстоятельствамъ, сводные признаки, при всемъ ихъ практическомъ удобствѣ, все же не могутъ устранить необходимости и цѣлесообразности опредѣленія полныхъ формулъ кривой ряда. Поэтому задачу статистическаго метода составляютъ всѣ указанные пріемы: выводъ сводныхъ признаковъ, изслѣдованіе уклоненій, вычисленіе формулы кривой, опредѣленіе теоретическихъ значеній частотъ и провѣрка степени совпаденія ихъ съ эмпирическими данными. Выводъ сводныхъ признаковъ составляетъ лишь одинъ изъ моментовъ статистической методологіи. Для различныхъ научныхъ дисциплинъ и нуждъ практики это часто единственная цѣль, ради которой они обращаются къ статистикѣ, или, правильнѣе говоря, ради которой они должны усвоить себѣ пріемы статистической методологіи. Ибо, будучи только

---

[1]) См. напр. A. Bowley, Elements of statistics, 1907, стр. 119—122.

[2]) Pearson, ibid., стр. 77—78.

методологіей, статистика для правильности своихъ выводовъ должна обязательно исходить изъ знанія матеріальной природы предмета изслѣдованія. Въ этомъ отношеніи она находится въ такомъ же положеніи, какъ, напримѣръ, интегральное вычисленіе или микроскопическая техника; въ смыслѣ формальнаго метода, интегральное вычисленіе составляетъ спеціальную дисциплину; но какъ только оно прилагается къ рѣшенію матеріальной задачи, теоретической или практической, сверхъ знанія пріемовъ вычисленія требуется и знакомство съ предметомъ.

2. ТЕОРІЯ ВѢРОЯТНОСТИ И СВОБОДА ВОЛИ.

Сводные признаки представляютъ одинъ изъ моментовъ той закономѣрности, которой подчинены индивидуально измѣнчивые признаки собирательной совокупности. Эта закономѣрность выражается въ функціональной зависимости сравнительной частоты варіанты отъ величины послѣдней, сравнительно съ какой-либо исходной варіантой ряда. Такого рода правильность въ самомъ простомъ видѣ получается a priori въ томъ случаѣ, когда мы сочетаемъ всѣми возможными способами два момента (event. и больше), имѣющіе опредѣленную вѣроятность, (напримѣръ, положительное и отрицательное уклоненіе, бѣлый и черный шаръ) въ группы по n членовъ. Въ такомъ случаѣ каждая группа даетъ опредѣленную величину или отношеніе, иначе говоря—варіанту. Частота каждой варіанты будетъ функціей ея разстоянія отъ исходной варіанты.

Когда мы имѣемъ дѣло съ рядомъ признаковъ, выраженныхъ въ абсолютныхъ числахъ (длина, мѣра, вѣсъ, число), то каждый индивидуальный членъ ряда является результатомъ соединенія абсолютной основной величины съ сочетаніями случайныхъ уклоненій; положительныя и отрицательныя уклоненія въ каждомъ сочетаніи суммируются, даютъ общій результатъ, который присоединяется къ основной величинѣ ряда и образуетъ варіанту,

выраженную въ видѣ абсолютнаго числа. Для относительныхъ величинъ сочетанія двухъ моментовъ (event. бо́льшаго ихъ числа) даютъ отношеніе, которое само по себѣ составляетъ варіанту. Абсолютная основная величина здѣсь отсутствуетъ; въ основѣ ряда лежитъ также нѣкоторое отношеніе.

Правильность и въ томъ, и въ другомъ случаѣ зависитъ исключительно отъ той закономѣрности, какая существуетъ для всѣхъ возможныхъ сочетаній двухъ (или бо́льшаго числа) моментовъ. Сравнительная частота опредѣленнаго сочетанія двухъ взаимно исключающихъ другъ друга моментовъ (положительная и отрицательная ошибка, бѣлый и черный шаръ) представляетъ собою не что иное, какъ вѣроятность появленія каждаго событія въ данномъ числѣ испытаній опредѣленное число разъ. Иначе говоря, правильность въ распредѣленіи варіантъ есть та же правильность, съ которой мы имѣемъ дѣло при исчисленіи вѣроятностей. Если мы допускаемъ равную вѣроятность появленія каждаго изъ двухъ противоположныхъ событій, получается симметрическій рядъ частотъ для соотвѣтствующихъ варіантъ, симметрически расположенныхъ въ обѣ стороны отъ середины. Если принять неравную вѣроятность, мы получимъ несимметрическій рядъ. Въ послѣднемъ случаѣ зависимость между частотою варіанты и ея положеніемъ по отношенію къ исходной точкѣ окажется сложнѣе, но сущность дѣла останется та же; и здѣсь сравнительная частота каждой варіанты будетъ выражать собою то же, что вѣроятность появленія событія извѣстное число разъ въ группѣ изъ даннаго числа испытаній, при условіи лишь неравенства вѣроятности появленія и непоявленія событія.

Такимъ образомъ, правильность распредѣленія измѣнчивыхъ признаковъ, выражающаяся въ зависимости частотъ отъ величины варіантъ, сводится къ той правильности, какую теоретическія исчисленія устанавливаютъ для вѣроятности появленія событія въ рядѣ повторныхъ испытаній. Иначе говоря, правильность распредѣленія индивидуально измѣнчивыхъ признаковъ подчинена закономъ вѣроятности.

Измѣнчиво-индивидуальные признаки могутъ относиться къ физическимъ явленіямъ или дѣйствіямъ человѣка. Первыя подчинены закону причинности, вторыя характеризуются сознаніемъ свободы. Естественно поэтому возникаетъ вопросъ, какимъ образомъ законы вѣроятности могутъ быть примѣняемы одинаково къ столь разнороднымъ случаямъ: обусловливается ли эта возможность тѣмъ, что дѣйствія человѣка подчинены общему закону причинности, и сознаніе свободы является ложнымъ, фиктивнымъ, или же зависитъ отъ логическаго характера понятія вѣроятности, которое одинаково совмѣстимо, какъ съ причинной обусловленностью, такъ и съ свободой? Къ рѣшенію этого вопроса необходимо подойти съ двухъ сторонъ: со стороны выясненія понятія вѣроятности и со стороны изслѣдованія природы мотивацiи произвольныхъ дѣйствій.

Въ основѣ понятія вѣроятности лежатъ нѣкоторыя абстрактныя апріорныя допущенія, а именно понятія единственной возможности, несовмѣстимости, равновозможности и независимости [1]).

[1]) А. А. Марковъ, Исчисленіе вѣроятностей, 1900, стр. 2 и 18—22. J. v. Kries, Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1886.

Понятіе единственной возможности и несовмѣстимости опредѣляются сравнительно просто: другихъ событій, кромѣ указанныхъ, въ испытаніяхъ не бываетъ, и появленіе одного въ данномъ испытаніи исключаетъ возможность появленія остальныхъ. Гораздо труднѣе опредѣлить понятіе равновозможности и независимости.

Обыкновенно равновозможность двухъ событій опредѣляется, какъ отсутствіе основаній ожидать одного изъ нихъ предпочтительно передъ другимъ. Это выраженіе можетъ имѣть однако двоякій смыслъ. Прежде всего «отсутствіе основаній» можетъ относиться только къ состоянію нашего знанія и свидѣтельствовать объ отсутствіи въ немъ какихъ бы то ни было данныхъ для рѣшенія вопроса, какое именно событіе наступитъ. Очевидно, что такая полная неосвѣдомленность относительно исхода испытаній не даетъ основаній говорить о равновозможности, ибо въ утвержденіи равной возможности содержится уже опредѣленное положительное допущеніе, которое не вытекаетъ изъ простого отсутствія основаній утверждать что бы то ни было.

Поэтому подъ отсутствіемъ основаній къ предпочтительному ожиданію одного событія передъ другимъ слѣдуетъ понимать во всякомъ случаѣ нѣчто иное, чѣмъ простое незнаніе. Не касаясь пока вопроса о томъ, что именно можно понимать подъ равновозможностью въ эмпирическомъ опытѣ, остановимся на построеніи этого понятія въ мысленномъ опытѣ.

Равновозможность двухъ событій означаетъ равную возможность ихъ наступленія. Но реальной возможности не существуетъ, такъ какъ каждое

событіе причинно обусловлено, и, слѣдовательно, въ данномъ испытаніи оно просто наступитъ или просто не наступитъ. Каузальная детерминація каждаго испытанія устраняетъ примѣнимость къ нему категоріи реальной возможности. Говоря однако о возможности событія, мы противополагаемъ каузальной детерминированности даннаго испытанія нѣчто противоположное, обратное; но такъ какъ все каузально детерминировано, то обратнымъ можетъ быть лишь другое испытаніе съ противоположнымъ исходомъ. Такимъ образомъ, въ мысленномъ опытѣ равновозможность сводится къ слѣдующему: если въ данномъ испытаніи мыслится осуществившимся событіе А, мысленный опытъ дополняется представленіемъ о другомъ испытаніи, въ которомъ осуществляется обратное событіе В. Ради экономіи мысли, мысленный опытъ ограничивается только необходимымъ числомъ испытаній, въ данномъ случаѣ—двумя.

Но если мы допустимъ большее число испытаній, то получимъ другое понятіе—понятіе независимости событій. Можно представить, что событіе А наступаетъ въ двухъ (и бо́льшемъ числѣ) послѣдовательныхъ испытаніяхъ. Въ такомъ случаѣ для сохраненія равновозможности обоихъ событій мы должны возстановить въ мысленномъ опытѣ и всѣ остальныя мыслимыя сочетанія двухъ событій, т. е. группу АА мысленно дополнить группами АВ, ВА и ВВ. Но при наличности всѣхъ мыслимыхъ сочетаній двухъ событій повторное появленіе одного и того же событія представляетъ собою лишь фактическое совпаденіе, или «случай», равновозможный со всякимъ другимъ мыслимымъ совпаденіемъ исходовъ двухъ испытаній. Появленіе дан-

наго событія въ одномъ испытаніи не предрѣшаетъ исхода другого испытанія; или событія независимы другъ отъ друга. Такимъ образомъ изъ понятія равновозможности, при допущеніи повторнаго появленія событія, вытекаетъ понятіе случайности и независимости событій. Подобно равновозможности, и это понятіе prima facie представляется какъ бы имѣющимъ исключительно отрицательное содержаніе; случайность—это отсутствіе необходимой связи въ совпаденіи двухъ исходовъ, независимость—отсутствіе вліянія исхода даннаго испытанія на исходъ другого испытанія. Но какъ тамъ, такъ и здѣсь это отрицательное содержаніе въ абстрактномъ построеніи восполняется положительнымъ знаніемъ: всякое данное сочетаніе исходовъ мыслится лишь какъ одинъ изъ случаевъ всѣхъ вообще мыслимыхъ сочетаній. Такимъ образомъ понятіе равновозможности, случайности и независимости заключаютъ въ себѣ на самомъ дѣлѣ понятіе закономѣрности; разсматривая любое сочетаніе исходовъ, какъ одинъ изъ случаевъ всѣхъ мыслимыхъ исходовъ, мы разсматриваемъ его, какъ одинъ изъ членовъ закономѣрной системы.

При помощи понятій равновозможности и независимости событій мы можемъ представить какой угодно исходъ ряда испытаній, можемъ, напримѣръ, представить, что событіе A произошло n разъ подъ рядъ. Но для того, чтобы событіе оставалось равновозможнымъ съ другимъ событіемъ, и совпаденіе исходовъ случайнымъ, т. е. событія сохранили характеръ независимости, мы должны мысленно дополнить данную группу n исходовъ остальными комплементарными мыслимыми группами всѣхъ возможныхъ сочетаній двухъ событій

въ n испытаніяхъ. Если мы этого не сдѣлаемъ и ограничимся въ нашемъ мысленномъ опытѣ только одной данной группой испытаній съ даннымъ сочетаніемъ исходовъ, исключая всякое мысленное дополненіе даннаго сочетанія остальными комплементарными сочетаніями, то этимъ мы лишаемъ данное сочетаніе исходовъ характера равновозможности и независимости. Представить себѣ равновозможность, не прибѣгая къ мысленному представленію соотвѣтственнаго числа испытаній, невозможно; равнымъ образомъ нельзя представить случайности какого-либо совпаденія исходовъ, не восполняя мысленно даннаго исхода соотвѣтствующимъ числомъ комплементарныхъ исходовъ. Но такимъ образомъ понятіе равновозможности и независимости, или понятіе разновозможности случайныхъ событій заключаетъ въ себѣ въ скрытомъ видѣ понятія о совокупности испытаній и о закономѣрности повторныхъ исходовъ испытаній. Иначе говоря, понятіе равновозможности случайныхъ событій подъ видомъ опредѣленія содержитъ въ себѣ представленіе о закономѣрности появленія событія въ опредѣленной совокупности испытаній.

Разумѣется, это представленіе не имѣетъ никакого отношенія къ дѣйствительному опыту и къ дѣйствительному наступленію какого-либо событія въ массѣ реальныхъ испытаній. Все построеніе остается въ области апріорной абстракціи. Но въ этой области понятіе совокупности и закономѣрности содержится implicite въ опредѣленіи вѣроятности. Поэтому послѣдующій выводъ теоремъ исчисленія вѣроятности при повторныхъ испытаніяхъ представляетъ собою не доказательство какихъ-либо новыхъ положеній, а лишь раскрытіе содер-

жанія опредѣленія вѣроятности. По той же причинѣ невозможно дать точнаго и яснаго опредѣленія равновозможности и независимости событій, не предвосхищая сущности послѣдующаго содержанія теоріи.

Такимъ образомъ, понятіе вѣроятности черезъ указаніе на единственную возможность, несовмѣстимость, равновозможность и независимость событій въ своемъ опредѣленіи implicite заключаетъ идею закономѣрности случайныхъ событій въ ихъ совокупности. Этимъ опредѣляется логическое значеніе понятія вѣроятности. Вѣроятность событія, выражаемая правильною дробью, не имѣетъ никакого отношенія къ одному испытанію, хотя по внѣшней формѣ рѣчь идетъ какъ будто именно о возможномъ исходѣ одного испытанія; въ дѣйствительности же, по логическому содержанію, понятіе вѣроятности относится къ извѣстной совокупности испытаній. Для этой совокупности вѣроятность выражаетъ знаніе части причинъ, составляющихъ каждое отдѣльное испытаніе, а именно знаніе тѣхъ причинъ, въ ихъ взаимномъ численномъ соотношеніи, которыя остаются неизмѣнными и постоянными въ каждомъ испытаніи. Такое частичное знаніе не даетъ никакой возможности предсказать исходъ одного испытанія, зависящій не только отъ наличности постоянныхъ причинъ, но и отъ своеобразной для отдѣльныхъ испытаній комбинаціи причинъ комплементарныхъ, измѣнчивыхъ. Для одного испытанія вѣроятность выражаетъ знаніе неполное и недостаточное. Но гипотетическое предположеніе относительно дѣйствія дополнительнаго комплекса причинъ—дѣйствія, приводящаго къ равновозможности и независимости исходовъ—равно-

сильно допущенію, что въ массѣ испытаній комплексъ дополнительныхъ условій дастъ возможность проявиться причинамъ постояннымъ въ ихъ численномъ отношеніи. Благодаря этому, знаніе такого численнаго отшенія, выраженное въ формѣ вѣроятности, будучи недостаточнымъ и неполнымъ для одного испытанія, является достаточнымъ для нѣкоторой совокупности испытаній. Вѣроятность является, такимъ образомъ, выраженіемъ неполнаго, но достаточнаго знанія для нѣкоторой совокупности случаевъ.

Переходя къ дѣйствительному опыту, мы должны допустить, что если законы вѣроятности находятъ примѣненіе по отношенію къ эмпирическимъ явленіямъ, послѣднія должны въ той или иной степени удовлетворять условіямъ теоріи; они такъ же должны быть несовмѣстимы, единственно возможны, равновозможны и независимы. Разница заключается лишь въ томъ, что въ мысленномъ опытѣ эти условія постулируются; тогда какъ въ эмпирическомъ опытѣ они должны эмпирически существовать, и мы должны знать ихъ существованіи. Такимъ образомъ мы должны знать, что существуетъ рядъ моментовъ, изъ которыхъ каждый даетъ въ испытаніи опредѣленное событіе, и что въ испытаніяхъ никакія другія событія, кромѣ данныхъ, не наступаютъ; далѣе мы должны знать, что переходъ одного момента въ соотвѣтствующее событіе исключаетъ возможность того же для другихъ моментовъ. И дѣйствительно, если мы обратимся къ типичнымъ примѣрамъ практическаго примѣненія теоріи вѣроятности (тиражъ шаровъ, рулетка и т. п.), то увидимъ, что знаніе наличности указанныхъ свойствъ событій является необ-

ходимымъ условіемъ для примѣненія къ нимъ положеній теоріи вѣроятности. Иначе обстоитъ дѣло съ установленіемъ признаковъ равновозможности и независимости. Въ условіяхъ эмпирическаго опыта мы никогда не обладаемъ знаніемъ такого рода, которое давало бы намъ основаніе наперед расчитывать или ожидать появленія событій въ тѣхъ именно сочетаніяхъ, какія отвѣчаютъ условіямъ равновозможности и независимости. Мы знаемъ, что каждый моментъ при наличности нѣкотораго сочетанія дополнительнаго комплекса условій переходитъ въ соотвѣтствующее событіе; но мы не можемъ прослѣдить этихъ сочетаній ни въ каждомъ конкретномъ испытаніи, ни въ рядѣ испытаній, и потому не знаемъ, въ какой послѣдовательности и порядкѣ отдѣльные моменты будутъ переходить въ соотвѣтствующія имъ событія.

Если мы абсолютно ничего не знаемъ о дѣйствіи дополнительнаго комплекса условій, то этимъ устраняется всякая возможность приложенія расчетовъ, основанныхъ на понятіи вѣроятности. Но между полнымъ знаніемъ, которое давало бы возможность предвидѣть точно исходъ испытанія или ряда испытаній, и полнымъ незнаніемъ, которое устраняло бы возможность всякихъ предположеній, существуетъ промежуточная ступень знанія, практически часто достижимая. При тщательномъ изслѣдованіи дополнительныхъ условій испытанія мы можемъ прійти къ заключенію, что между сочетаніями этихъ условій въ каждомъ испытаніи и свойствами моментовъ, изъ которыхъ каждый даетъ соотвѣтствующее событіе, нѣтъ никакой причинной связи; что дополнительный комплексъ условій, въ своихъ конкретныхъ сочетані-

яхъ, не зависитъ отъ ряда постоянныхъ моментовъ. Правда, такой отрицательный результатъ изслѣдованія не составляетъ самъ по себѣ положительнаго знанія о томъ, что событія будутъ наступать какимъ-либо опредѣленнымъ образомъ; но мы имѣемъ основаніе предполагать, что если дополнительный комплексъ условій безразличенъ по отношенію къ ряду основныхъ моментовъ, то каждый изъ послѣднихъ будетъ переходить въ соотвѣтствующее событіе на одинаковыхъ основаніяхъ съ другими. Отрицательное содержаніе знанія объ отсутствіи зависимости между условіями и моментами испытанія мы восполняемъ гипотетическимъ допущеніемъ ихъ равновозможности. Такая гипотеза получаетъ оправданіе, поскольку эмпирическіе результаты оказываются отвѣчающими теоретическимъ вычисленіямъ.

Такимъ образомъ объективное отсутствіе опредѣленной связи между отдѣльными условіями и моментами испытанія, поскольку оно доступно знанію, является основнымъ условіемъ примѣненія законовъ вѣроятности.

Когда въ дѣйствительномъ опытѣ мы имѣемъ дѣло съ физическими явленіями, независимые другъ отъ друга условія и моменты являются физическими силами или предметами, дѣйствующими по физическимъ законамъ и подчиненными закону причинности. Независимость ихъ состоитъ въ томъ, что наличность каждой силы не обусловлена наличностью остальныхъ силъ; сосуществованіе ихъ является простымъ фактомъ, а не закономѣрною связью; равнымъ образомъ, и дѣйствіе каждой силы не связано никакой причинной зависимостью съ дѣйствіемъ остальныхъ силъ. Но каждая сила сама

по себѣ причинно обусловлена въ своемъ существованіи и подчиняется физическому закону въ своемъ дѣйствіи. Такимъ образомъ, та независимость событій, которую требуетъ теорія вѣроятности, состоитъ лишь въ отсутствіи причинной связи между опредѣленной совокупностью данныхъ моментовъ, а не въ безпричинностя ихъ появленія или дѣйствія.

А такъ какъ такое отношеніе нисколько не противорѣчитъ законамъ физическихъ явленій, то понятіе вѣроятности вполнѣ примѣнимо къ нимъ.

Но если законы вѣроятности совмѣстимы съ дѣйствіемъ причинности, то, съ другой стороны, они вовсе не связаны съ этимъ условіемъ необходимо. Для понятія вѣроятности важно лишь отсутствіе необходимой связи между дѣйствующими силами, но для нея не важно то обстоятельство, дѣйствуетъ ли сила по закону причинности или какъ-либо иначе, лишь бы законъ ея дѣйствія не устанавливалъ взаимной зависимости дѣйствующихъ моментовъ. Поэтому понятно, что вѣроятность одинаково была бы совмѣстима и съ безпричиннымъ существованіемъ моментовъ, если бы таковое было возможно или нужно; точно также для нея безразлично, обусловлено ли дѣйствіе момента закономъ естественной необходимости или совершается по какому-либо иному порядку: то и другое безразлично, посколько безпричиннымъ появленіемъ или непричиннымъ дѣйствіемъ не нарушается взаимная независимость моментовъ испытанія.

Но если независимость моментовъ испытанія является единственнымъ условіемъ примѣненія законовъ вѣроятности, то весьма понятно, что это

обстоятельство намѣчаетъ одинъ изъ возможныхъ способовъ рѣшенія вопроса о статистической правильности произвольныхъ дѣйствій человѣка. Стоитъ только допустить, что воля играетъ роль момента, независимаго отъ прочихъ моментовъ испытанія, и тогда станетъ очевиднымъ, что численныя проявленія волевой дѣятельности могутъ подчиняться законамъ вѣроятности, обнаруживать постоянство и правильныя уклоненія въ среднихъ и относительныхъ числахъ.

Такъ именно обычно и рѣшается этотъ вопросъ [1]). Очевидно, что при этомъ рѣшеніи вопросъ о свободѣ или причинной обусловленности совершенно отпадаетъ и для объясненія правильности массовыхъ итоговъ человѣческихъ дѣйствій оказывается безразличнымъ [2]).

Въ одномъ только случаѣ подобное рѣшеніе, крайне, правда, заманчивое по свое кажущейся простотѣ, было бы вѣрно; а именно, если бы воля обладала абсолютной свободой, тѣмъ liberum arbitrium indifferentiae, которое склонны были приписывать ей схоластики. Только въ такомъ случаѣ воля могла

---

[1]) А. А. Чупровъ, Очерки по теоріи статистики, 1909, стр. 268—273 и примѣчаніе. Также П. А. Некрасовъ, Философія и Логика Науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности, 1902, стр. 68. „Въ стаціонарномъ массовомъ общественномъ процессѣ случайныя явленія, представляющія результаты нестѣсненной дѣятельности свободной воли, взаимно независимы, и поэтому должны изъ года въ годъ повторяться въ одинаковыхъ приблизительно итогахъ“. Авторъ считаетъ свободой воли независимость отъ прочихъ моментовъ испытанія, усматривая въ этомъ ея самоопредѣляемость (стр. 68—69). Необходимо замѣтить, что такое пониманіе несогласно съ обычнымъ, ибо обычно, говоря о свободѣ и самоопредѣленіи, понимаютъ независимость воли не только отъ условій даннаго опыта, но и отъ всякихъ вообще причинъ.

[2]) А. А. Чупровъ, о. с. стр. 272 прим. „у писателей, сохранившихъ болѣе тѣсный контактъ съ математической теоріей вѣроятностей, мы во всѣ времена встрѣчаемъ ясное пониманіе некомпетентности статистики въ томъ спорѣ, рѣшать который хотѣли ее призвать ея не въ мѣру пылкіе поклонники“.

бы остановиться на любомъ исходѣ, независимо отъ всѣхъ обстоятельствъ, сопровождающихъ ея выборъ, и только въ такомъ случаѣ ея рѣшенія были бы независимы. Для того, чтобы это было возможно, надо, чтобы исходъ ея рѣшенія, наступленіе того или другого событія въ испытаніи были для нея также безразличны, какъ, напримѣръ, цвѣтъ и номеръ дѣленія рулетки безразличны для шарика.

Въ дѣйствительности однако дѣло обстоитъ совершенно иначе. Для воли небезразличенъ исходъ испытанія, небезразличны тѣ рѣшенія, на которыхъ она можетъ остановиться. Къ однимъ результатамъ она стремится, отъ другихъ—отвращается. Въ этомъ отношеніи ее можно было бы сравнить развѣ съ такимъ шарикомъ рулетки, который имѣетъ притяженіе къ однимъ дѣленіямъ и отталкивается отъ другихъ. Уже это одно обстоятельство устраняетъ аналогію волевой дѣятельности съ условіями азартныхъ игръ. Далѣе, для воли небезразлична и вся обстановка, среди которой ей приходится принять рѣшеніе; она сообразуется съ условіями испытанія, принимаетъ ихъ во вниманіе. Однимъ словомъ, воля дѣйствуетъ по мотивамъ. Дѣйствуя такимъ образомъ, она не сохраняетъ независимости по отношенію ко всѣмъ остальнымъ моментамъ испытанія, вмѣшательство же ея въ ходъ испытанія нарушаетъ отчасти взаимную независимость и прочихъ моментовъ. Такимъ образомъ, воля, дѣйствующая по мотивамъ, никоимъ образомъ не представляетъ собою силы, независимой по отношенію къ прочимъ моментамъ испытанія, и участіе ея нарушаетъ случайность исхода.

Для того, чтобы понять истинную причину статистической правильности волевыхъ дѣйствій,

мы должны поставить волю на дѣйствительно принадлежащее ей мѣсто въ ряду условій испытанія. Въ дѣйствительности въ сознательно-произвольныхъ дѣйствіяхъ воля вовсе не является однимъ изъ моментовъ, опредѣляющихъ исходъ испытанія, наряду съ другими моментами; она является единственной силой, производящей то или другое событіе. Всѣ остальные моменты испытанія дѣйствуютъ не рядомъ съ волей и не помимо нея, а только черезъ нее. На нее они оказываютъ вліяніе, а не на событіе непосредственно. Всѣ условія испытанія создаютъ только внѣшнюю обстановку, которая отражается въ сознаніи и только черезъ волю переходитъ въ то или другое событіе.

Но если такъ, то съ этой точки зрѣнія пріобрѣтаетъ значеніе то именно обстоятельство, которое прежде представлялось безразличнымъ: а именно, дѣйствуетъ ли воля по законамъ причинъ, какъ всякая физическая сила, или же производитъ свое дѣйствіе изъ себя. Ибо въ зависимости отъ рѣшенія этого вопроса въ томъ или другомъ смыслѣ, получитъ различное рѣшеніе и вопросъ о томъ, какимъ образомъ подходятъ свободныя дѣйствія подъ закономѣрность теоріи вѣроятности.

Если мы пріймемъ, что въ дѣйствительности никакой свободы воли не существуетъ, что дѣйствіе человѣка цѣликомъ и такимъ же образомъ подчинены закону причинъ, какъ и всякое физическое явленіе, а сознаніе свободы, цѣлесообразности и выбора только субъективная фикція, не имѣющая вліянія на объективный исходъ событій, то съ точки зрѣнія примѣненія теоріи вѣроятности не будетъ никакой разницы между явленіями физическими и духовными: волю можно просто вы-

бросить, какъ элементъ ненужный, не оказывающій никакого вліянія на условія испытанія; съ одной стороны останутся физическіе моменты, взаимно независимые, съ другой—исходъ испытанія; воля и сознаніе—лишь безразличный проводникъ или субъективная фикція. Затрудненіе будетъ заключаться только въ томъ, что эта субъективная фикція не удовлетворяется такимъ рѣшеніемъ и требуетъ для себя роли, болѣе соотвѣтствующей нашему внутреннему опыту.

Если же мы допустимъ, что воля не безразличный призрачный проводникъ комплекса моментовъ, но поглощаетъ послѣдніе, перерабатываетъ ихъ въ мотивы, останавливается на извѣстномъ выборѣ и этимъ опредѣляетъ наступленіе даннаго дѣйствія, то прежняя схема испытанія разрушается. Независимые физическіе моменты, предшествующіе волѣ, теряютъ свою непосредственную связь съ исходомъ испытанія. Теперь они дѣйствуютъ не на появленіе событія, а на волю, на появленіе ея рѣшенія. Но въ сознаніи они слагаются въ общій результатъ не механически, какъ складывается, напримѣръ, для шарика рулетки сила паденія, толчки, треніе и т. д. въ общій результатъ движенія; съ другой стороны, возможныя рѣшенія, въ качествѣ исходовъ испытанія, не мелькаютъ передъ рѣшающимъ сознаніемъ въ видѣ безразличныхъ дѣленій рулетки. Если же сознаніе привноситъ въ рѣшеніе нѣчто отъ себя, то исходъ испытанія является результатомъ свойствъ воли, ея способа и законовъ дѣйствія.

Такимъ образомъ, то построеніе испытанія, какое служитъ для объясненія правильности физическихъ явленій, оказывается непригоднымъ для

объясненія статистической закономѣрности свободныхъ дѣйствій человѣка. Подчиненіе послѣднихъ законамъ вѣроятности должно быть объяснено изъ свойствъ поведенія самой воли, какъ законъ ея реакціи на внѣшнія вліянія, а не какъ механическій результатъ этихъ вліяній.

3. ОБЪЕКТИВНАЯ ПРИЧИННОСТЬ И СУБЪЕКТИВНАЯ СВОБОДА.

Духовный міръ человѣка, явленія его психической жизни представляютъ собою извѣстную систему; отдѣльныя составныя части ея, элементы психики, находятся въ опредѣленной связи и взаимодѣйствіи. Какъ всякая данная система, такъ и эта стремится къ самосохраненію. Внѣшнія дѣйствія—раздраженія—нарушаютъ ея равновѣсіе и требуютъ реакціи. Реакція можетъ быть направлена либо на перестройку элементовъ самой системы, либо на измѣненіе внѣшнихъ условій существованія, либо на то и на другое вмѣстѣ. Во всѣхъ случаяхъ реакція имѣетъ цѣлью вернуть устойчивое состояніе, [1]) приспособить внѣшнія условія существованія къ внутреннимъ или обратно. Въ развитой психикѣ теченіе реакціи извѣстно намъ изъ самонаблюденія, и въ разнообразныхъ своихъ формахъ позволяетъ обнаружить наличность процессовъ троякаго рода:

а) познавательныхъ, какъ-то: ощущеніе, представленіе, понятіе, идея;

б) чувственныхъ, выражающихся въ двухъ противоположныхъ состояніяхъ удовлетворенія или страданія [2]).

[1]) R. Avenarius, Kritik der reinen Erfahrung, 1888—90.

[2]) Адэкватныхъ терминовъ для обозначенія двухъ противоположныхъ чувственныхъ состояній въ ихъ основной элементарной формѣ въ наукѣ нѣтъ; обыденная рѣчь знаетъ лишь конкретныя проявленія чувствъ въ связи съ интеллектуальными элементами: радость, наслажденіе, удовольствіе и т. п. Подъ удовлетвореніемъ и страданіемъ я понимаю то общее элементарное состояніе, которое лежитъ въ основѣ всѣхъ конкретныхъ чувственныхъ проявленій.

и в) процессовъ волевыхъ, выражающихся въ желаніи, хотѣніи, стремленіи. Окончательный результатъ реакціи проявляется въ дѣйствіяхъ внутреннихъ и внѣшнихъ.

Не во всякой реакціи эти троякаго рода переживанія доходятъ до нашего сознанія и въ особенности часто они не доходятъ до сознанія въ ясной и отчетливой формѣ. Такъ, во 1-хъ, можетъ отсутствовать ясное сознаніе волевой реакціи; напримѣръ, мимоходомъ мы замѣчаемъ безразличный предметъ; никакой видимой реакціи онъ не вызываетъ; но весьма часто образъ предмета, если онъ мѣшаетъ нашимъ мыслямъ, удаляется изъ поля сознанія полубезсознательными усиліями воли. Во 2-хъ, можетъ отсутствовать чувственная окраска; въ дѣйствіяхъ часто повторяющихся, привычныхъ внѣшнее раздраженіе можетъ прямо переходить въ волевую реакцію. Наконецъ, въ 3-ихъ, можетъ не доходить до сознанія познавательный процессъ, какъ это бываетъ, напримѣръ, когда наше вниманіе цѣликомъ чѣмъ-либо занято, и въ такомъ состояніи мы безсознательно совершаемъ рядъ цѣлесообразныхъ дѣйствій, при другихъ условіяхъ протекающихъ сознательно.

Въ конкретномъ переживаніи всѣ эти психическіе процессы протекаютъ совмѣстно и нераздѣльно въ ихъ сложныхъ сочетаніяхъ, какъ единое явленіе или единое проявленіе души, подобно тому какъ, напримѣръ, единое явленіе составляетъ ощущеніе качества цвѣта и его интенсивности. Только путемъ психологическаго анализа мы разлагаемъ это единое переживаніе на качественно различныя части, а послѣднія, въ свою очередь, сводимъ къ возможно простымъ формамъ. Такими

простыми формами душевныхъ переживаній являются три основныхъ элемента: ощущеніе, чувство и воля. Будучи продуктами абстракціи, эти состоянія никогда не переживаются въ ихъ элементарной формѣ, но они образуютъ тотъ простѣйшій матеріалъ, изъ котораго составляются всѣ проявленія нашей душевной дѣятельности.

Составляютъ ли ощущеніе, чувство и воля конечные элементы психики или могутъ быть сведены къ еще болѣе простому виду—это вопросъ, являющійся спорнымъ. Одни считаютъ ихъ простѣйшими далѣе неразложимыми элементами, какъ бы психическими атомами, другіе, напротивъ, путемъ дальнѣйшаго анализа, стараются свести психику къ меньшему числу или болѣе простымъ элементамъ.

Такъ, одни считаютъ основнымъ элементомъ психическихъ переживаній—ощущеніе; чувственныя же и волевыя состоянія разсматриваютъ, какъ болѣе или менѣе сложныя сочетанія познавательныхъ процессовъ (интеллектуалистическая психологія, напр. Herbart [1]). Другіе держатся того же мнѣнія относительно воли (волюнтаризмъ, Paulsen [2]). Третьи считаютъ такимъ элементомъ чувство (Horwicz [3]), Th. Ziegler [4]). Существуютъ также попытки доказать, что и самыя ощущенія представляютъ собою сложное образованіе болѣе простыхъ психическихъ атомовъ.

Для нашей цѣли совершенно достаточно остановиться на результатахъ того анализа, который

---

[1]) Schriftin zur Psychologie, II, Psychologie als Wissenschaft, 1850.
[2]) Einleitung in die Philosophie, 1896.
[3]) Psychol. Analysen, I, II, 1872—1878.
[4]) Das Gefühl, 1893.

сводитъ психику къ тремъ основнымъ проявленіямъ: ощущенію, чувству и волѣ; онъ указываетъ на несомнѣнное и весьма существенное качественное различіе психическихъ процессовъ, о которомъ ясно свидѣтельствуетъ нашъ внутренній опытъ; въ этомъ опытѣ мы будемъ находить и различать указанныя три составныя части переживаній во всякомъ случаѣ даже тогда, если бы была доказана возможность теоретически свести ихъ къ болѣе простымъ элементамъ.

Далѣе, несомнѣнно, что ощущеніе, чувство и воля дифференцировались въ процессѣ эволюціи изъ нѣкотораго болѣе простого состоянія, въ которомъ всѣ эти три стороны психическаго явленія слиты въ одинъ примитивный, нераздѣльный актъ. Возможно, что и теперь въ психикѣ болѣе совершенной, рядомъ съ процессами дифференцировавшимися, могутъ дѣйствовать и такіе болѣе примитивные акты; но въ типично сознательномъ процессѣ доступны наблюденію и несомнѣнно имѣются на лицо дифференцировавшіеся элементы. Они именно и составляютъ характерную особенность сознательно-разумныхъ переживаній и произвольно-цѣлесообразныхъ дѣйствій, т. е. тѣхъ психическихъ актовъ, въ которыхъ съ особенною ясностью обнаруживается специфическое отличіе сознательной психики отъ явленій физическаго міра.

Типичное теченіе сознательно-произвольной реакціи обнаруживаетъ опредѣленную связь и послѣдовательность психическихъ элементовъ. Внѣшнее раздраженіе вызываетъ ощущеніе; ощущеніе сопровождается чувствомъ; чувство въ свою очередь непосредственно переходитъ въ воленіе. На-

чавшійся психическій процессъ можетъ либо сразу соединиться съ остальнымъ содержаніемъ психики, войти въ наше я, и тогда онъ получаетъ полное и безпрепятственное развитіе и заканчивается проявленіемъ воли въ соотвѣтствующемъ дѣйствіи. Или же онъ можетъ встрѣтить въ психикѣ процессы и состоянія, несовмѣстимыя съ нимъ вполнѣ или отчасти; въ такомъ случаѣ теченіе его встрѣчаетъ препятствіе; несовмѣстимыя состоянія сопоставляются въ полѣ сознанія другъ съ другомъ и съ тѣмъ объединеннымъ комплексомъ психическаго содержанія, который составляетъ наше я; затѣмъ одно изъ этихъ состояній или согласованная ихъ комбинація сливается съ преобладающимъ содержаніемъ психики, чувственные и волевые элементы образовавшагося процесса получаютъ полное развитіе, становятся нашимъ хотѣніемъ и волей и превращаются въ наши дѣйствія; чувственно-волевые элементы противоположныхъ и несогласныхъ процессовъ подавляются и не переходятъ въ дѣйствіе [1]).

Такимъ образомъ, произвольныя дѣйствія распадаются на двѣ категоріи: въ однихъ начавшійся психическій рядъ прямо переходитъ въ дѣйствіе, въ другихъ онъ проходитъ черезъ стадію волевого выбора [2]). Но и въ томъ, и въ другомъ случаѣ исходъ реакціи зависитъ отъ отношенія преобладающаго содержанія психики къ возникшему въ ней процессу. Это отношеніе опредѣляется чувственной окраской, которая сопровождаетъ данный

---

[1]) Анализъ волевого процесса см. у Al. Pfänder'a Phaenomologie des Wollens, 1900.

[2]) Подробнѣе см. мою работу: Ученіе объ экономическомъ явленіи 1903, стр. 172 и сл.

процессъ въ сознаніи; интенсивность и экстенсивность чувственной окраски опредѣляютъ степень соотвѣтствія даннаго процесса съ остальнымъ содержаніемъ психики, мѣру вліянія, какое оказываетъ процессъ на это содержаніе, силу, съ какой онъ привлекаетъ наше вниманіе; въ этой чувственной окраскѣ заложена уже implicite сила воленія, присущая данному процессу. Въ тотъ моментъ, когда чувственная реакція съ содержащимся въ ней зачаткомъ воленія окончательно опредѣляется, исходъ дѣйствія является рѣшеннымъ.

Въ каждомъ психическомъ рядѣ чувственный и волевой процессъ представляютъ двѣ стадіи одного и того же явленія, одну и ту же реакцію психики въ двухъ послѣдовательныхъ фазисахъ ея теченія: пассивномъ—въ формѣ чувства и активномъ—въ формѣ воленія; чувство является начальнымъ моментомъ воли, воля необходимымъ развитіемъ чувственнаго процесса.

Такимъ образомъ, чувство и воля представляютъ собою два момента, связанные другъ съ другомъ необходимою послѣдовательностью. Такого рода связь мы можемъ разсматривать, какъ каузальный процессъ чувственно-волевой реакціи.

Съ другой стороны, существуетъ необходимая и опредѣленная связь между ощущеніемъ и внѣшнимъ раздраженіемъ. Правда, связь эта истолковывается весьма различно, въ зависимости отъ взглядовъ на отношеніе познанія къ внѣшнему міру и процессовъ психическихъ къ физіологическимъ [1]). Оставляя однако въ сторонѣ гносеологи-

[1]) Вслѣдствіе невозможности привести слишкомъ обширную литературу по этому спорному вопросу сошлюсь только на E. Hartmann, Die Moderne Psychologie, 1901, гл. VII и R. Avenarius, Der Menschliche Weltbegriff, 1905, въ частности § 26 и прим. 58-ое.

ческую и метафизическую точку зрѣнія и оставаясь на почвѣ естественно-научнаго реализма, мы можемъ представить себѣ дѣло слѣдующимъ образомъ. Внѣшнее раздраженіе дѣйствуетъ на периферическій конецъ нерва и черезъ посредство нерва вызываетъ нѣкоторый процессъ въ центральной системѣ, которому отвѣчаетъ опредѣленное ощущеніе: колебаніе эфира раздражаютъ зрительный нервъ, вызываютъ измѣненіе въ центральной нервной системѣ, и я вижу красный цвѣтъ.

Здѣсь мы имѣемъ связь между двоякаго рода моментами: во-первыхъ, связь между внѣшнимъ раздраженіемъ и нервнымъ процессомъ въ центральной системѣ, и, во-вторыхъ, между этимъ процессомъ и ощущеніемъ. И въ томъ, и въ другомъ случаѣ связь представляетъ функціональный характеръ: съ измѣненіемъ перваго члена отношенія, измѣняется второй членъ. При этомъ однако функціональная зависимость въ первомъ случаѣ представляетъ собою частный случай причинной связи между физическими явленіями. Что же касается зависимости между физіологическимъ процессомъ нервной ткани и психическимъ процессомъ ощущенія, то здѣсь связь могла бы быть понимаема въ смыслѣ физическаго воздѣйствія только въ томъ случаѣ, если бы психическіе процессы мы разсматривали, какъ проявленія энергіи, хотя и специфической, но все же подчиненной законамъ, общимъ съ другими видами энергіи физическаго міра. Такая точка зрѣнія вообще возможна, но она далеко необщепринята, поэтому мы не можемъ принять ее и разсматривать связь между психическимъ и физіологическимъ процессами, какъ причинную зависимость въ смыслѣ физическомъ; зависимость эта остается

лишь логически-формальной. Но и въ этомъ смыслѣ она все же является отношеніемъ каузальнаго характера; мы можемъ подвести ее подъ болѣе широкое понятіе функціональной зависимости вообще, какъ частный случай, на ряду съ физической причинностью, выражающейся въ законѣ сохраненія энергіи.

Такимъ образомъ, въ сознательно-произвольныхъ дѣйствіяхъ принципу каузальности подчиняется, съ одной стороны, возникновеніе воли изъ чувства, съ другой стороны, появленіе ощущенія. Никакой свободы или произвола въ этой области нѣтъ. Остается лишь связь между познавательнымъ процессомъ и чувствомъ. Откуда же берется и какъ возникаетъ чувственная реакція психики на то или другое ощущеніе? Не здѣсь ли кроется источникъ возможной свободы—свободы оцѣнки, положительнаго или отрицательнаго отношенія къ внѣшнимъ вліяніямъ и внутреннимъ образамъ, которое, будучи разъ дано, вызываетъ уже съ каузальной необходимостью послѣдующія дѣйствія?

Характеръ и происхожденіе связи между познавательнымъ процессомъ и присоединяющейся къ ней чувственной реакціей станутъ ясными, если мы обратимъ вниманіе на значеніе этой реакціи для жизни и дѣятельности организма.

Прежде всего чувство, являясь первымъ моментомъ чувственно-волевой реакціи, опредѣляетъ собою все ея направленіе. Поэтому двумъ проявленіямъ чувства — удовольствію и страданію— должны отвѣчать два противоположныхъ направленія дѣйствій. Одни дѣйствія направлены на вліянія, сопровождающіяся для организма чувствомъ удовольствія—здѣсь организмъ стремится поста-

вить себя въ условія, благопріятствующія воздѣйствію на него такого рода вліяній; другія дѣйствія направлены на вліянія, вызывающія страданія— ихъ организмъ стремится избѣгнуть.

Очевидно, что положительныя и отрицательныя чувственныя состоянія должны поэтому находиться въ правильномъ и опредѣленномъ соотношеніи съ тѣмъ, что полезно и вредно для организма. Чувство имѣетъ прямое или косвенное отношеніе къ самосохраненію или сохраненію вида; оно преслѣдуетъ цѣли питанія, защиты, размноженія, поддерживанія жизни потомства, совмѣстнаго существованія. Чувственныя состоянія представляютъ собою пассивную реакцію на полезныя и вредныя для организма вліянія и воздѣйствія [1]). А такъ какъ за этой пассивной реакціей неизбѣжно слѣдуетъ активная, волевая, то энергія организма, проявляющаяся въ дѣйствіяхъ, расходуется въ общемъ объективно полезно для жизненныхъ цѣлей организма.

Эта объективная цѣлесообразность проявляется не только въ общемъ направленіи дѣятельности, но и въ тѣхъ спеціальныхъ законахъ, которыми обусловливается распредѣленіе энергіи между отдѣльными жизненными цѣлями, и опредѣляется порядокъ и мѣра удовлетворенія различныхъ потребностей. Законы распредѣленія энергіи находятъ свое выраженіе въ формальныхъ законахъ цѣнности.

По отношенію къ формальнымъ законамъ цѣн-

---

[1]) Подробное развитіе и обоснованіе см. *H. Schneider*, Freud und Leid des Menschengeschlechts, 1883; *H. Spencer*, въ его Основахъ Психологіи и Основахъ Соціологіи. *A. Lehmann*, Hauptgesetze des menschlichen Gefühlslebens 1892.

ности психологическое изслѣдованіе находится въ особенно благопріятныхъ условіяхъ. Цѣнность представляетъ собою чувство, проецированное на предметъ; душевное состояніе, благодаря проекціи, получаетъ характеръ какъ бы внѣшняго явленія, признака предмета; оно объективируется и въ такомъ видѣ легче поддается изученію, сравнительно съ другими психическими состояніями.

Для цѣнностей мы можемъ установить слѣдующіе формальные законы.

1) Законъ пониженія цѣнностей: цѣнность единицы предметовъ понижается съ увеличеніемъ ихъ количества [1]). Этотъ законъ проявляетъ свое дѣйствіе въ троякой формѣ: во 1-хъ, единица предметовъ представляетъ бо́льшую цѣнность, когда дѣйствуетъ на насъ въ меньшемъ запасѣ предметовъ, и меньшую, когда дѣйствуетъ въ бо́льшемъ запасѣ; во-2-хъ, единица предметовъ, являясь приращеніемъ къ запасу предметовъ, представляетъ цѣнность меньшую, сравнительно съ цѣнностью предшествующаго подобнаго же приращенія; и, въ 3-хъ, единица предметовъ, дѣйствуя въ послѣдовательные моменты времени, въ каждомъ послѣдующемъ дѣйствіи представляетъ меньшую цѣнность.

2) Законъ суммированія цѣнностей. При дѣйствіи предыдущаго закона, цѣнность всего количества предметовъ можетъ опредѣляться двоякимъ образомъ: во 1-хъ, путемъ суммированія убывающихъ цѣнностей каждой послѣдовательной единицы запаса, и, во-2-хъ, путемъ умноженія предѣльной цѣнности на число единицъ запаса. Пер-

---

[1]) Относительно формулировки и содержанія этого закона см. мою работу „Ученіе объ экономическомъ явленіи", 1903.

вый способъ имѣетъ мѣсто въ тѣхъ случияхъ, когда непрерывное воздѣйствіе послѣдовательныхъ единицъ предмета сливается въ одинъ актъ потребленія; или когда мы имѣемъ дѣло съ ограниченнымъ запасомъ предметовъ, который долженъ служить для нѣсколькихъ актовъ потребленія и не пополняется. Второй способъ имѣетъ мѣсто въ случаяхъ непрерывнаго или періодическаго пополненія запаса предметовъ, по мѣрѣ ихъ расходованія или потребленія [1]). При оцѣнкѣ путемъ суммированія, цѣнность всего количества возрастаетъ съ увеличеніемъ количества, хотя и медленнѣе послѣдняго, до максимума при предѣльной цѣнности равной нулю, на которомъ и останавливается; при оцѣнкѣ путемъ умноженія, цѣнность всего количества сперва возрастаетъ, достигаетъ максимума, а затѣмъ убываетъ и превращается въ нуль, когда предѣльная цѣнность становится равной нулю.

3) Законъ двусторонняго происхожденія цѣностей. Одинъ и тотъ же объектъ можетъ вызывать различныя чувственныя состоянія: дѣйствіе предмета можетъ вызывать удовлетвореніе, отсутствіе его—страданіе, причемъ оба состоянія могутъ и не совпадать по своему значенію; можетъ однако быть и такъ, что дѣйствіе объекта не сопровождается никакимъ чувствомъ, тогда какъ отсутствіе вызываетъ страданіе; какъ и обратно—дѣйствіе доставляетъ удовлетвореніе, отсутствіе же безразлично. Вслѣдствіе этого мы различаемъ цѣнность пользованія и цѣнность утраты. Цѣнность предмета, какую мы приписываемъ ему въ дѣйствительности, можетъ опредѣляться либо цѣн-

---

[1]) Подробнѣе см. мою работу „Полезность и цѣна“ 1895.

ностью пользованія, либо цѣнностью утраты, либо совмѣстнымъ вліяніемъ обоихъ моментовъ.

4) Законъ возрастанія цѣнностей. Этотъ законъ имѣетъ содержаніе, обратное закону пониженія цѣнностей: съ каждымъ приращеніемъ объекта цѣнность его возрастаетъ быстрѣе его количества, такъ что всякое приращеніе даетъ возрастающую прибавку цѣнности [1]). По отношенію къ обыденнымъ цѣнностямъ и особенно къ цѣнностямъ экономическаго характера законъ этотъ дѣйствителенъ только для очень малыхъ начальныхъ приращеній и прекращается, какъ только количество предмета достигаетъ сколько-нибудь практически замѣтной и важной величины, послѣ чего цѣнность сейчасъ же подчиняется закону паденія. Въ нѣкоторыхъ собирательныхъ объектахъ, въ родѣ всякаго рода коллекцій, библіотекъ, музеевъ и т. п. дѣйствіе закона возрастанія цѣнности проявляется на сравнительно большомъ промежуткѣ. Цѣнность такого рода совокупностей возрастаетъ быстрѣе, чѣмъ количество составляющихъ ее экземпляровъ. Но и здѣсь возрастаніе цѣнности прекращается съ момента достиженія совокупностью извѣстной полноты состава. Лишь цѣнность весьма немногихъ объектовъ обладаетъ способностью возрастать безгранично, съ каждымъ новымъ приращеніемъ объекта; такова, напримѣръ цѣнность знанія.

5) Законъ гармоніи и дисгармоніи цѣнностей. Различные объекты, имѣющіе каждый свою цѣнность, будучи соединены вмѣстѣ, создаютъ въ общемъ цѣнность бо́льшую (гармонирующія цѣнно-

---

[1]) Этотъ законъ указанъ въ моей статьѣ: „Основные законы цѣнности и ихъ практическое значеніе“ 1904 (оттискъ №№ 21—24 Южн. Зап.).

сти) или меньшую (дисгармонирующія цѣнности), чѣмъ сумма ихъ отдѣльныхъ цѣнностей. Благодаря этому, соединеніе самихъ по себѣ мелкихъ и даже ничтожныхъ цѣнностей образуетъ комплексъ большой цѣнности, тогда какъ, обратно, сами по себѣ весьма значительныя цѣнности могутъ взаимно понижать другъ друга и даже низводить до нуля.

б) Законъ перемѣщенія цѣнностей. Цѣнность даннаго объекта можетъ распространяться на объекты, какимъ-либо образомъ связанные съ даннымъ, и создавать такимъ образомъ цѣнность для объектовъ, которые раньше сами по себѣ ею не обладали. Такимъ образомъ цѣнность прежде всего переходитъ на объекты, причинно связанные съ даннымъ: цѣнность цѣли сообщается средствамъ, цѣнность причины переносится на слѣдствія; но затѣмъ цѣнность одного объекта можетъ переходить на цѣнность объектовъ, лишь случайно связанныхъ съ нимъ. Такого рода переходъ возможенъ, какъ для положительныхъ, такъ и для отрицательныхъ цѣнностей, благодаря чему могутъ не только возникать новыя цѣнности, но и исчезать существующія.

Такъ какъ чувство опредѣляетъ направленіе воли, то формальные законы цѣнности являются формальными законами сознательныхъ дѣйствій. Нетрудно видѣть, что законы цѣнности обусловливаютъ объективную цѣлесообразность дѣйствій.

Прежде всего, законъ пониженія цѣнностей устраняетъ возможность израсходованія всей энергіи исключительно въ направленіи объектовъ одного какого-либо рода. Вслѣдствіе наступающаго пониженія цѣнности, затрата энергіи переносится на другіе объекты. Такимъ образомъ энергія ор-

ганизма распредѣляется между разными назначеніями, и для каждаго устанавливается предѣльная норма.

Количество энергіи, привлекаемой предметами извѣстнаго рода, зависитъ не только отъ начальной величины цѣнности и быстроты ея послѣдующаго паденія, но также и отъ способа опредѣленія цѣнности всего количества предметовъ. При опредѣленіи путемъ суммированія объекты закрѣпляютъ за собою все количество энергіи, какое вообще имъ доступно, и это является вполнѣ цѣлесообразнымъ, такъ какъ опредѣленіе цѣнности всего количества предметовъ путемъ суммированія цѣнности отдѣльныхъ единицъ имѣетъ мѣсто въ тѣхъ случаяхъ, когда запасъ предметовъ не пополняется вовсе или не пополняется въ теченіе нѣкотораго времени; въ такомъ случаѣ каждый предметъ долженъ быть на учетѣ и привлекать всю доступную ему долю вниманія. При опредѣленіи же цѣнности всего количества путемъ умноженія предѣльной цѣнности на число объектовъ,—какъ это имѣетъ мѣсто въ случаяхъ правильно возобновляющагося запаса—количество энергіи, направляемой на объекты, возрастаетъ лишь до предѣла, соотвѣтствующаго максимальному удовлетворенію, и затѣмъ падаетъ.

Если однако непрерывное воздѣйствіе объектовъ понижаетъ нашу чувствительность къ нимъ до точки безразличія, то все же количество энергіи, необходимое на поддержаніе или возстановленіе запаса объектовъ, обезпечивается за ними цѣнностью утраты. И лишь въ случаѣ невозможности утраты, организмъ совершенно освобождается отъ всѣхъ побужденій къ расходованію энергіи.

Законъ гармонирующихъ цѣнностей обезпечиваетъ значительное количество энергіи даже малозамѣтнымъ цѣнностямъ, но подъ непремѣннымъ условіемъ ихъ надлежащаго сочетанія. Такими сочетаніями, достигаемыми сравнительно небольшими затратами энергіи по мелочамъ, создается часто противовѣсъ интенсивнымъ страстямъ, требующимъ отъ организма сразу большихъ и изнурительныхъ затратъ. Законъ дисгармонирующихъ цѣнностей предотвращаетъ затрату энергіи на дѣйствія, результаты которыхъ взаимно другъ друга уничтожаютъ.

Законъ движенія цѣнностей обезпечиваетъ необходимую затрату энергіи для *средствъ*, ведущихъ къ желательной цѣли, и увеличиваетъ долю энергіи для цѣнностей, обладающихъ большой экстенсивностью.

Что касается возрастающихъ цѣнностей, то онѣ поглощаютъ всю энергію организма и направляютъ ее къ одной единственной цѣли. Такого рода явленіе служитъ часто исходной точкой для введенія въ будничный обиходъ новыхъ цѣнностей. гдѣ онѣ, впрочемъ, тотчасъ подпадаютъ подъ дѣйствіе закона пониженія цѣнности, болѣе соотвѣтствующаго среднимъ условіямъ существованія. Затрата всей энергіи въ одномъ направленіи не можетъ быть общимъ явленіемъ для всѣхъ организмовъ, и въ соотвѣтствіи съ этимъ мы встрѣчаемъ возрастающія цѣнности присущими сознанію единичныхъ индивидовъ въ исключительно рѣдкихъ случаяхъ. Къ тому же введеніе въ обиходъ новыхъ цѣнностей достигается и другимъ путемъ, безъ столь интенсивной затраты—путемъ

постепенной и медленной эволюціи цѣнностей и развитіемъ новыхъ формъ изъ существующихъ.

Такимъ образомъ, законы, которымъ подчиняется чувственно-волевой аппаратъ въ своемъ дѣйствіи, являются вообще объективно цѣлесообразными. Въ силу этихъ законовъ энергія организма распредѣляется между отдѣльными сознательными реакціями такимъ образомъ, что въ результатѣ получается возможно большее количество объективной пользы. Благодаря такому устройству аппарата, сознательныя дѣйствія приводятъ съ такою же естественною необходимостью къ біологически полезнымъ результатамъ, какъ и безсознательныя отправленія организма. Чувственно-волевой аппаратъ является такимъ же полезнымъ приспособленіемъ, какъ всякаго рода органы и отправленія организма. А потому и происхожденіе его должно быть отнесено на счетъ дѣйствія тѣхъ самыхъ силъ, которыми мы объясняемъ происхождецѣлесообразнаго устройства и дѣятельности органическихъ формъ.

Всѣ такія цѣлесообразныя формы и функціи, возникаютъ путемъ медленной и непрерывной эволюціи, подъ вліяніемъ естественныхъ причинъ, безъ участія какой-либо планомѣрно и цѣлесообразно дѣйствующей силы. Такими причинами являются варіаціи органическихъ формъ и отборъ ихъ. Каждая органическая форма воспроизводится или повторяется съ случайными уклоненіями въ обѣ стороны отъ своего типа; такъ какъ средства существованія ограничены, а среди внѣшнихъ условій многія гибельны для организмовъ, то органическимъ формамъ для сохраненія своего существованія приходится вести борьбу, какъ другъ съ

другомъ, такъ и съ внѣшней средой; при этомъ многія формы погибаютъ; остаются же предпочтительно тѣ, которыя обладаютъ варіаціями, лучше приспособленными къ условіямъ существованія и дающими имъ преимущество передъ другими формами. Такой отборъ наилучше приспособленныхъ формъ повторяется въ длинномъ рядѣ послѣдовательно смѣняющихъ другъ друга поколѣній, въ результатѣ чего полезныя варіаціи накопляются въ опредѣленномъ направленіи, и органическія формы становятся цѣлесообразными, какъ въ своемъ устройствѣ, такъ и въ своихъ функціяхъ.

Однимъ изъ полезныхъ приспособленій является психика вообще, а въ психикѣ—ея чувственно-волевая реакція. Путемъ продолжительной эволюціи въ психикѣ развивается свойство реагировать опредѣленнымъ образомъ на полезныя и вредныя вліянія. Ощущенія и другіе болѣе сложные познавательные процессы, отвѣчающіе полезнымъ вліяніямъ, вызываютъ чувство удовлетворенія; это чувство направляетъ волю къ дѣйствіямъ, при помощи которыхъ организмъ получаетъ возможность использовать полезное воздѣйствіе въ надлежащей мѣрѣ; ощущенія, отвѣчающія вреднымъ воздѣйствіямъ, сопровождаются обратной чувственно-волевой реакціей, и организмъ посредствомъ соотвѣтствующихъ сознательныхъ дѣйствій предупреждаетъ, устраняетъ опасность или защищаетъ себя отъ вредныхъ послѣдствій.

Посколько всякое вообще объективно-цѣлесообразное устройство и всѣ функціи мы объясняемъ причинно, постолько же мы можемъ объяснить причинно цѣлесообразное устройство и функціи психики; то обстоятельство, что съ извѣстнымъ

ощущеніемъ связывается то, а не иное чувственное состояніе, причинно обусловливается длиннымъ рядомъ причинъ, дѣйствовавшихъ въ процессѣ послѣдовательнаго развитія организма.

Такимъ образомъ, весь процессъ сознательной реакціи организма на внѣшнія вліянія представляетъ собою цѣпь моментовъ, причинно связанныхъ другъ съ другомъ. Внѣшнее раздраженіе функціонально связано съ познавательнымъ процессомъ, послѣдній причинно связанъ съ чувственной реакціей, чувственная реакція необходимо переходитъ въ воленіе, воля выражается въ дѣйствіяхъ. Каждый послѣдующій моментъ является необходимымъ слѣдствіемъ предшествующаго, предшествующій играетъ роль причины по отношенію къ послѣдующему. Нигдѣ въ этой цѣпи причинъ и слѣдствій нѣтъ мѣста для свободы или произвольнаго усмотрѣнія. Окончательный исходъ дѣйствія цѣлесообразенъ въ смыслѣ объективномъ, такъ же, какъ и всякое безсознательное отправленіе. Объективная цѣлесообразность является необходимымъ слѣдствіемъ дѣйствія естественныхъ причинъ, устраняющихъ все нецѣлесообразное, неприспособленное къ условіямъ своего существованія.

Объ этой полной и безусловной каузальной детерминаціи нашихъ сознательно-волевыхъ дѣйствій мы узнаемъ однако лишь путемъ познанія, научной теоріи. Въ собственномъ сознаніи мы не переживаемъ этой причинной обусловленности; напротивъ, мы сознаемъ себя свободными. По отношенію къ познанію мы не чувствуемъ себя свободными; мы не можемъ не видѣть предметы такими, какими они являются нашему сознанію по естественнымъ законамъ; но мы чувствуемъ себя

свободными въ нашемъ отношеніи къ внѣшнимъ вліяніямъ, представленіямъ, образамъ, идеямъ; чувственно-волевая реакція на все, что входитъ въ нашу психику, представляется намъ дѣломъ нашего собственнаго усмотрѣнія, нашего я. Здѣсь именно мы чувствуемъ себя свободными. Это сознаніе свободы не есть какая-либо фикція, нѣчто выдуманное или несуществующее. Сознаніе свободы представляетъ собою несомнѣнно существующій фактъ, то, что намъ непосредственно дано въ нашемъ внутреннемъ опытѣ. Откуда же берется это сознаніе свободы?

Наше сознаніе охватываетъ, въ качествѣ своего переживанія, только то, что дано въ немъ: оно переживаетъ происходящіе въ немъ познавательные процессы и чувственно-волевыя реакціи; но оно не можетъ переживать того, что происходило внѣ нашего сознанія, за тысячи лѣтъ до его возникновенія въ нашемъ я. Между тѣмъ причины, связывающія извѣстные познавательные процессы съ опредѣленными чувственно-волевыми реакціями, имѣли мѣсто внѣ нашего сознанія, въ филогенетическомъ процессѣ развитія психики. Наше личное сознаніе переживаетъ готовый результатъ этого развитія, но оно не можетъ переживать самого процесса. Оно переживаетъ фактъ связи чувства съ извѣстнымъ ощущеніемъ, но обрывается въ томъ мѣстѣ, гдѣ начинается цѣпь причинъ, связавшихъ въ нашей психикѣ эти два переживанія. Поэтому чувственно-волевая реакція должна представляться нашему сознанію безпричинной, исходящей отъ нашего я. Она такъ именно и представляется намъ въ непосредственно данномъ внутреннемъ опытѣ: реакція причинно не обусловли-

вается познавательнымъ процессомъ, она присоединяется къ нему безъ всякой причины, составляетъ свободное отношеніе содержанія нашей психики къ ощущенію. Лишь послѣдующимъ актомъ познанія мы возстановляемъ полную цѣпь причинныхъ соотношеній: мы открываетъ, что связь чувственно-волевой реакціи съ даннымъ познавательнымъ состояніемъ причинно обусловлена процессомъ эволюціи, лежащимъ за предѣлами нашей личной жизни.

Наше субъективное сознаніе свободы является такимъ образомъ результатомъ того обстоятельства, что личная психика обнимаетъ своимъ переживаніемъ только то, что въ ней непосредственно дано, и разрываетъ связь происходящаго въ ней съ предшествующей эволюціей организмовъ. Поэтому происходящее въ ней переживается ею, какъ нѣчто безпричинное, самопроизвольное, ею самою обусловленное: мы должны чувствовать себя свободными въ нашемъ отношеніи къ воздѣйствующимъ на насъ вліяніямъ.

Въ этомъ субъективномъ сознаніи полной свободы есть однако нѣкоторая доля объективной истины. Дѣйствительно, непосредственное вліяніе внѣшняго раздраженія и соотвѣтствующее ему ощущеніе, сами по себѣ, не заключаютъ въ себѣ элементовъ, которые съ необходимостью вызывали бы въ психикѣ реакцію въ томъ именно видѣ, какъ она происходитъ въ настоящее время. Когда ощущеніе попадаетъ въ психику, оно встрѣчаетъ тамъ запасъ готовыхъ связей и отношеній, являющихся психологическимъ коррелатомъ тѣхъ физіологическихъ отложеній, которыя накопились въ центральной нервной системѣ въ процессѣ филогенетиче-

скаго развитія. Только приводя въ дѣйствіе эти связи и отношенія, ощущеніе вызываетъ именно данную реакцію. Благодаря этому, всякая реакція только отчасти обусловлена непосредственнымъ дѣйствіемъ внѣшняго раздраженія, въ другой же части зависитъ отъ филогенетическихъ отложеній, или энграммъ, какъ удачно называетъ ихъ Semon [1]).

А такъ какъ количество такихъ энграммъ, отложившихся въ организмѣ съ его психикой въ теченіе длиннаго процесса развитія, должно значительно превышать тѣ вліянія, которыя дѣйствуютъ на насъ въ короткій промежутокъ индивидуальной жизни, то мы до извѣстной степени дѣйствительно независимы отъ причиннаго воздѣйствія непосредственныхъ вліяній.

Въ этомъ отношеніи организмъ рѣзко отличается отъ физическихъ тѣлъ. Въ то время, какъ послѣднія цѣликомъ подчинены непосредственно дѣйствующимъ на нихъ причинамъ, наши дѣйствія являются лишь совокупнымъ результатомъ внѣшнихъ причинъ и внутреннихъ, отложенныхъ въ насъ; причемъ то, что мы привносимъ въ этотъ совокупный результатъ, значительно больше того, что привносятъ непосредственно дѣйствующія причины.

Но все то, что тысячелѣтнимъ процессомъ развитія и безконечно разнообразными комбинаціями элементовъ заложено въ нашемъ организмѣ и нашей психикѣ, составляетъ наше я, которое мы сознаемъ, переживаемъ; оно, какъ всякая органическая система, стремится сохранить себя, отстоять, проявить въ дѣйствіи; поэтому наши дѣйствія

---

[1]) Richard Semon, Die Mneme, 2 Aufl., 1908.

являются обусловленными больше нашимъ я, чѣмъ внѣшними непосредственно дѣйствующими на насъ вліяніями. Противопоставляя наше я внѣшнему міру даннаго момента, мы въ достаточной мѣрѣ практически свободны, и эта относительная независимость отъ непосредственно дѣйствующихъ причинъ составляетъ объективный коррелатъ субъективнаго сознанія нашей свободы.

Но эта практическая свобода есть только свобода отъ причинъ, дѣйствующихъ непосредственно, въ данный моментъ времени; это однако не свобода отъ причинъ вообще. И въ той части нашихъ переживаній, которыя составляютъ наше я и обусловливаютъ сознаніе нашего свободнаго отношенія къ внѣшнимъ вліяніямъ, и здѣсь мы связаны причинно. Разница заключается лишь въ томъ, что здѣсь дѣйствуютъ причины, имѣвшія мѣсто внѣ нашей индивидуальной жизни, въ процессѣ филогенетическаго развитія, за предѣлами личнаго сознанія. Но именно ими вызваны тѣ связи и отношенія, которыми сейчасъ опредѣляется наша психическая дѣятельность.

Такимъ образомъ, наша психика во всѣхъ ея проявленіяхъ подчинена общему закону причинъ.

4. ОБЪЕКТИВНАЯ ЦѢЛЕСООБРАЗНОСТЬ.

Полученный нами выводъ, что сознательно-волевыя дѣйствія подчинены принципу каузальности, представляетъ несомнѣнную выгоду; онъ даетъ возможность изучать всѣ явленія міра по одному и тому же способу. Въ философіи и теоріи познанія мы можемъ дѣлать попытки устранить дуализмъ сознанія и бытія, души и тѣла; но въ области наукъ положительныхъ мы все же различаемъ явленія физическія, органическія и духовныя; вѣроятно мы будемъ различать ихъ и впредь. Нерѣдко намъ приходится изучать ихъ совмѣстно, въ ихъ зависимости и взаимодѣйствіи. Такой именно случай мы имѣемъ въ области соціальной жизни: здѣсь факторы физическіе, органическіе и психическіе взаимно переплетаются и производятъ одинъ общій результатъ. Поэтому примѣненіе единаго методологическаго принципа къ изученію дѣйствія всѣхъ силъ значительно облегчаетъ задачу познанія, упрощаетъ ее, сводитъ объясненіе къ единству, которое столь присуще нашему разуму. Объ это естественное стремленіе къ единству разбиваются, главнымъ образомъ, всѣ попытки послѣдняго времени ввести для объясненія явленій духовныхъ принципъ цѣли.

Однако принципъ каузальности во многихъ отношеніяхъ представляетъ и значительныя неудобства. Но неудобства эти лежатъ глубже, чѣмъ обыкновенно представляютъ себѣ сторонники

телеологіи въ области наукъ общественныхъ. Принципъ каузальности создаетъ нѣкоторыя затрудненія при объясненіи не только явленій духовныхъ, въ томъ числѣ и общественныхъ, но и всѣхъ явленій органической жизни жизни вообще. Впрочемъ, въ этомъ отношеніи слѣдуетъ различать двѣ идеи, заключающіяся въ понятіи каузальности.

Въ принципѣ каузальнаго объясненія природы заключается, во-первыхъ, идея постоянства законовъ: связь и порядокъ явленій, точно и безспорно установленные въ одномъ случаѣ, признаются безусловно обязательными для всѣхъ такихъ же случаевъ повсюду и во всякое время.

Идея эта имѣетъ характеръ логическаго постулата и не можетъ быть выведена ни индуктивно, ни аксіоматически. Она не можетъ быть обоснована индуктивно, ибо индуктивные выводы сами нуждаются въ допущеніи постоянства природы; она не можетъ быть основана и на теоріи вѣроятности, такъ какъ понятіе вѣроятности также исходитъ изъ представленія о томъ, что данныя прошлаго опыта имѣютъ логически обязательное значеніе для будущаго, т. е. всетаки изъ идеи постоянства. Равнымъ образомъ, идея постоянства не представляетъ и аксіомы, ибо вовсе не является ни логически, ни фактически обязательной. Съ аксіомами она имѣетъ лишь то общее, что не можетъ быть доказана.

Будучи такимъ образомъ логическимъ постулатомъ, идея постоянства становится логически обязательной въ силу своей цѣлесообразности; безъ этой идеи мы не имѣемъ возможности перейти отъ частнаго къ общему, отъ извѣстнаго къ неизвѣстному, отъ настоящаго къ будущему. Такое обо-

снованіе основного принципа познанія нисколько не лишаетъ его логической цѣнности, ибо вообще критеріемъ истины является исключительно ея цѣлесообразность. Правда, для частныхъ истинъ критеріемъ служитъ согласіе ихъ съ общей системой истинъ; но когда вопросъ идетъ объ общемъ критеріи истины, то очевидно, что онъ можетъ лежать только внѣ какой бы то ни было истины и заключается въ практической цѣлесообразности всей системы [1]). А такъ какъ принципъ постоянства лежитъ въ основѣ всего знанія, то критерій правильности этого принципа выступаетъ здѣсь сразу съ полной ясностью [2]).

Съ этой точки зрѣнія допущеніе постоянства мірового порядка одинаково необходимо и неизбѣжно, въ чемъ бы этотъ порядокъ ни заключался. Будетъ ли міръ объясняемъ по причинамъ или цѣлямъ, истинное знаніе должно и въ томъ, и другомъ случаѣ имѣть безусловное и всеобщее значеніе, поскольку знаніе вообще остается знаніемъ.

Принципъ постоянства, будучи произвольнымъ допущеніемъ, не можетъ быть въ силу этого ни доказанъ, ни опровергнутъ. Часто представляютъ себѣ дѣло такъ, что, независимо отъ своего источника происхожденія, принципъ постоянства пріобрѣтаетъ дополнительное обоснованіе, благодаря тому, что онъ находитъ себѣ постоянное подтвержденіе въ дѣйствительности.

---

[1]) W. James, Pragmatismus, 1908.

[2]) Критика постулативныхъ положеній у проф. Петражицкаго, Введеніе въ изученіе права и нравственности, 1905, основана на простомъ недоразумѣніи; ибо говоря о конкретныхъ причинахъ, онъ этимъ самымъ принимаетъ понятіе причины; но въ понятіи причины необходимо содержится допущеніе постоянства; послѣднее же допущеніе выходитъ за предѣлы конкретнаго опыта.

На самомъ дѣлѣ познаваемая дѣйствительность не можетъ служить подтвержденіемъ принципа постоянства вслѣдствіе того, что мы вообще не допускаемъ ничего противорѣчащаго этому принципу; по этому въ дѣйствительности и не можетъ встрѣтиться такого рода противорѣчій. Данныя опыта мы перерабатываемъ именно такимъ образомъ, чтобы они удовлетворяли принципу постоянства законовъ природы. Если химическое тѣло одного и того же состава даетъ различную реакцію, мы снабжаемъ его различнымъ расположеніемъ и отношеніемъ атомовъ. Мы приписываемъ тѣламъ специфическіе признаки и коэффиціенты съ такимъ именно расчетомъ, чтобы явленія отвѣчали принципу постоянства; при этомъ мы руководствуемся лишь тѣмъ соображеніемъ, чтобы число устанавливаемыхъ такимъ образомъ константъ и коэффиціентовъ было какъ можно меньше [1]). Весьма понятно, что при такомъ способѣ объясненія природы мы не можемъ встрѣтить въ ней противорѣчій принципу постоянства: одинаковыя причины всегда будутъ вызывать одинаковыя слѣдствія; но, равнымъ образомъ, понятно, что этотъ результатъ не служитъ логическимъ обоснованіемъ приведеннаго принципа, а лишь его слѣдствіемъ.

Въ одномъ только смыслѣ можно говорить, что принципъ постоянства подтверждается и находитъ себѣ оправданіе въ дѣйствительности; а именно, если система знаній, на немъ построенная, даетъ намъ возможность жить и дѣйствовать, расходовать нашу энергію, осуществлять и разви-

[1]) Доказательство этого положенія см. Philipp Frank, Mechanismus und Vitalismus, Annalen der Naturphilosophie, VII B., 4 H., 1908, стр. 393 сл.

вать наше бытіе, не натыкаясь на очевидныя и безполезныя препятствія. Но очевидно, что это практическій, а не теоретическій критерій правильности, и дѣло идетъ не о логическомъ обоснованіи, а о практической цѣлесообразности принципа.

Что касается второго положенія, заключающагося въ принципѣ каузальности, то оно сводится къ объясненію послѣдующаго предыдущимъ, слѣдствія—причиной. Устанавливая постоянную и безусловную связь между двумя моментами, мы принимаемъ, что предшествующій моментъ опредѣляетъ собою послѣдующій. Такъ какъ въ дѣйствительности между двумя моментами никакой физической связи нѣтъ, то подобный пріемъ является условнымъ способомъ объясненія дѣйствительности. Въ качествѣ такого условнаго способа, онъ допустимъ до тѣхъ поръ, пока не создаетъ затрудненій для пониманія явленій.

Въ области явленій механическихъ, физическихъ и химическихъ принципъ причиннаго объясненія вполнѣ успѣшно исполняетъ свое назначеніе; это именно обстоятельство и служитъ основаніемъ къ тому, чтобы распространять его и на явленія жизни, въ частности—духа. Явленіямъ органической и духовной жизни также даютъ причинное объясненіе т. е. каждое послѣдующее состояніе и здѣсь разсматриваютъ, какъ необходимо обусловленное состояніемъ предшествующимъ.

Однако здѣсь такой способъ объясненія встрѣчаетъ препятствіе въ особомъ характерѣ явленій. Специфическая особенность явленій жизни состоитъ въ томъ, что въ нихъ постоянно и наглядно выступаетъ связь, обратная причинной: послѣдую-

щее состояніе опредѣляетъ предшествующее, цѣль опредѣляетъ средства. Такъ, въ зародышѣ какъ бы заложено стремленіе стать организмомъ путемъ послѣдовательныхъ стадій развитія, направленныхъ именно къ этой цѣли; жизненныя отправленія приспособлены къ тому, чтобы служить цѣлямъ поддержанія существованія; органы приспособлены къ своимъ функціямъ, какъ средства къ цѣли.

Обычное механическое объясненіе жизненныхъ явленій отрицаетъ всякое активное значеніе этой цѣлесообразности всего органическаго; оно разсматриваетъ цѣлесообразность, какъ побочный продуктъ, не имѣвшійся въ виду, какъ нѣчто случайное, какъ случайный результатъ дѣйствія ряда причинъ. Съ этой точки зрѣнія явленія органическія подводятся подъ одну схему съ явленіями физическими. Причина *a* производитъ слѣдствіе *b*; послѣднее обладаетъ опредѣленными свойствами *c*: соединеніе H_2 и 0 даетъ воду; вода замерзаетъ, испаряется и т. д. Точно также извѣстныя причины (*a*) производятъ организмъ (*b*), послѣдній опредѣленнымъ образомъ функціонируетъ (*c*); реакціи организма на внѣшнія вліянія разсматриваются совершенно аналогично свойствамъ физическаго тѣла. Разница сводится къ большей сложности организма, но не къ наличности въ немъ какихъ-либо особыхъ силъ.

Однако такая схема принуждена игнорировать специфическую особенность органическихъ явленій, сравнительно съ физическими. Въ явленіи физическомъ свойство воды реагировать на пониженіе температуры переходомъ въ твердое состояніе не имѣетъ никакого значенія для предшествующаго факта соединенія водорода и кислорода въ

опредѣленной пропорціи; это соединеніе не имѣетъ цѣлью и не служитъ средствомъ дать тѣло, обладающее именно указаннымъ свойствомъ; свойство реагировать является лишь естественнымъ слѣдствіемъ даннаго химическаго соединенія.

Между тѣмъ въ явленіяхъ органическихъ функція, которая должна быть исполнена, опредѣляетъ собою ту именно комбинацію силъ и элементовъ, какая даетъ возможность осуществленія функціи; только та комбинація, которая ведетъ къ цѣли, и можетъ имѣть мѣсто; всѣ остальныя комбинаціи отпадаютъ. Такимъ образомъ, результатъ, который долженъ быть полученъ, или цѣль, опредѣляетъ средства, которыя должны имѣть мѣсто для достиженія этой цѣли.

Правда, дарвинизмъ и здѣсь сводитъ соотвѣтствіе средствъ съ цѣлью къ слѣпому дѣйствію однѣхъ только причинъ. Онъ допускаетъ, что рядомъ съ цѣлесообразной комбинаціей причинъ появляются во множествѣ и всякія другія комбинаціи; цѣлесообразная комбинація является одной изъ многихъ, одной изъ возможныхъ, непредвидѣнно, случайно, безцѣльно; при этомъ такъ какъ весьма мало вѣроятно, чтобы столь сложная и совершенная цѣлесообразность, какую представляетъ хотя бы простѣйшій организмъ съ его строеніемъ и отправленіями, могла получиться сразу, въ качествѣ одной изъ случайныхъ комбинацій, въ одномъ единственномъ рядѣ сочетаній, то предполагается, что такіе ряды случайныхъ сочетаній повторяются, и однажды появившаяся комбинація даже небольшой цѣлесообразности получаетъ возможность развиваться въ разныхъ, опять таки случайныхъ, направленіяхъ, а въ томъ числѣ и въ

направленіи возрастающей цѣлесообразности. Всѣ же комбинаціи, менѣе цѣлесообразныя, вытѣсняются. либо погибаютъ.

Однако въ послѣднее время все больше возникаютъ сомнѣнія въ томъ, чтобы появленіе, а тѣмъ болѣе накопленіе цѣлесообразности въ органическихъ формахъ можно было объяснить, какъ случайный результатъ всѣхъ возможныхъ сочетаній [1]). Все чаще высказываются предположенія, что комбинація механическихъ, физическихъ и химическихъ силъ въ проявленіяхъ органической жизни нуждается въ дополнительномъ регулирующемъ принципѣ, который могъ бы проще и легче объяснить цѣлесообразный подборъ и дѣйствіе этихъ силъ. Этотъ регулирующій принципъ долженъ быть приписанъ органической матеріи или основной ея единицѣ, въ качествѣ специфическаго свойства, нѣкоторой біологической константы, подобно тому, какъ для объясненія физическихъ явленій мы принимаемъ механическія, физическія и химическія константы.

Съ принятіемъ такой біологической константы мы однако сохранили бы лишь видимость каузальнаго объясненія органическихъ явленій и отвергли бы его по существу. Ибо біологическая константа представляетъ собою принципъ, обратный каузальному; это сила, направляющая средства къ цѣли, слѣдовательно, дѣйствующая цѣлесообразно. Такой именно характеръ имѣетъ, напримѣръ, энтелехія Driesch'a [2]); хотя авторъ и старается придать ей характеръ какъ бы причинно-дѣйствующаго фактора, на ряду съ другими причинными факто-

[1]) August Pauly, Darwinismus und Lamarckismus, 1905.

[2]) H. Driesch, Die organischen Regulationen, 1901.

рами, но сущность энтелехіи въ томъ именно и состоитъ, что она отрицаетъ причинность, ставитъ цѣль, какъ опредѣляющее начало; извѣстная органическая форма должна быть получена, извѣстная функція должна быть исполнена; для осуществленія этой цѣли необходимы извѣстныя средства; то обстоятельство, что самое исполненіе цѣли будетъ совершаться соотвѣтствующими средствами по законамъ механической причинности, не отнимаетъ у регулирующаго принципа его телеологическаго характера.

Телеологическій характеръ біологическихъ явленій съ особенной ясностью обнаруживается въ тѣхъ случаяхъ, когда нормальный ходъ жизненнаго процесса нарушенъ. Это имѣетъ мѣсто въ случаяхъ т. н. органическихъ регуляцій (Driesch), при нарушеніи нормальнаго отправленія дыханія, питанія, кровообращенія; организмъ стремится осуществить ту же функцію какимъ-либо другимъ путемъ, иногда удачно, иногда неудачно; то же замѣчается, въ особенности въ случаяхъ простой и сложной регенераціи [1]). Такъ, мы видимъ, напримѣръ, что половина эмбріона лягушки возстановляется въ цѣлый эмбріонъ изъ безформеннаго индифферентнаго матеріала клѣтокъ посредствомъ какого-то формирующаго вліянія; удаленный органъ возстановляется сразу въ своей окончательной формѣ, не проходя обычныхъ эмбріональныхъ формъ; регенераціи происходитъ изъ тканей, эмбріологическое происхожденіе которыхъ отлично отъ тканей, нормально производящихъ данный ор-

---

[1]) Eugenio Rignano, Das biologische Gedächtniss in der Energetik, Annalen der Naturphilosophie, 1909, VIII, 3, стр. 333.

ганъ; уже дифференцированныя ткани преобразуются для исполненія несвойственныхъ имъ функцій. Во всѣхъ этихъ случаяхъ съ особенною наглядностью выступаетъ дѣйствіе силъ, распоряжающихся наличными средствами организма для достиженія извѣстной цѣли.

Въ сущности то же, что при регенераціи, происходитъ и при развитіи организма изъ зародышевой клѣтки. И здѣсь заложенный въ зародышевомъ элементѣ проспективный планъ опредѣляетъ ходъ развитія. Пусть этотъ планъ является результатомъ прошлаго филогенетическаго развитія, филогенетической энграммой (Semon). Но все же въ такой энграммѣ содержится окончательный результатъ раньше, чѣмъ наступилъ первый моментъ его осуществленія. Конецъ процесса предопредѣленъ до его начала, и заключительная стадія составляетъ цѣль, ради которой весь процессъ развитія проходитъ именно данныя стадіи, а не другія.

Обычная механическая теорія обходитъ трудность объясненія подобныхъ процессовъ, какъ и всѣхъ вообще явленій жизни, либо тѣмъ, что ограничивается простымъ описаніемъ [1]), либо тѣмъ, что переноситъ специфическія особенности жизни съ цѣлаго организма на клѣтку, съ клѣтки—на ея ядро, съ ядра на біогены, біофоры и т. п., до тѣхъ поръ, пока не запретъ жизненное начало въ безконечно малый біологическій элементъ. Хотя такимъ образомъ всѣ послѣдующія органическія формы и явленія освобождаются отъ всего, что можетъ мѣшать ихъ механическому объясненію, но тѣмъ непонятнѣе и таинственнѣе становится

[1]) Напр. Haacke, Grundriss der Entwickelungsmechanik, 1897.

та сила, которая въ невидимомъ атомѣ даетъ направленіе всѣмъ жизненнымъ явленіямъ.

Объяснить такого рода явленія механически до сихъ поръ не удалось; то же можно сказать и относительно многихъ другихъ основныхъ процессовъ жизни; въ настоящее время мы не въ состояніи свести ихъ къ причинному дѣйствію извѣстныхъ намъ физическихъ, химическихъ и механическихъ силъ. Вопросъ заключается лишь въ томъ, возможно ли, если не сейчасъ, то вообще достигнуть механическаго пониманія жизни? Еще недавно никто не сомнѣвался въ этомъ, и теперь большинство продолжаетъ держаться того же взгляда. Однако въ послѣднее время стали появляться и противоположныя мнѣнія. Цѣлый рядъ ученыхъ категорически высказывается противъ самой возможности причиннаго объясненія жизненныхъ процессовъ [1]). При всемъ различіи исходныхъ точекъ зрѣнія и спеціальныхъ областей изслѣдованія, всѣ они сходятся однако въ томъ, что цѣлесообразность составляетъ слишкомъ специфическій и характерный признакъ біологическихъ явленій, и нѣтъ никакой возможности разсматривать столь существенную особенность, какъ простую случайность, безцѣльную игру природы. Для объясненія жизни необходимо допустить существованіе особаго регулирующаго или формирующаго начала,

---

[1]) H. Driesch, Die organischen Regulationen, 1901; Der Vitalismus, 1905; J. Reinke, Die Welt als Tat, 1899; Einl. in die theor. Biologie, 1901; K. C. Schneider, Vitalismus, 1903; R. H. Francé, Der heutige Stand der Darwinschen Fragen 1907; A. Wagner, Der neue Kurs in der Biologie, 1907: см. Plate, Selectionsprincip und Probleme der Artbildung, 1908, стр. 437 и сл.; Die verschiedenen Versuche zur Erklärung der organischen Zweckmässigkeit. Критическій очеркъ см. также O. Prochnow, Der Erklärungswert des Darwinismus und Neo-Lamarckismus, Berl. Entomol. Zeitschr., Beiheft, 1907.

въ видѣ ли энтелехіи, доминанты, біологической константы, жизненной силы или какого бы то ни было иного фактора телеологическаго характера.

Въ объясненіи такого рода мы должны различать двѣ стороны: во-первыхъ, матеріальное содержаніе и, во-вторыхъ, формально-логическую природу объясненія.

Что касается логической стороны, то здѣсь мы имѣемъ дѣло съ принципомъ телеологіи въ формальномъ смыслѣ: изъ двухъ необходимо связанныхъ другъ съ другомъ моментовъ, послѣдующій по времени является логически опредѣляющимъ. независимымъ; предшествующій—зависимымъ и опредѣляемымъ. Въ этомъ смыслѣ телеологическое объясненіе противоположно каузальному, и оба могутъ быть объединены въ функціональной зависимости, понимаемой въ широкомъ смыслѣ. Если въ выраженіи функціональной зависимости $z=f(x, y)$ мы будемъ подразумѣвать подъ z біологическій процессъ и подъ x, y физическія, химическія или механическія силы, то каузальное объясненіе сводится къ предположенію, что x, y являются независимыми перемѣнными, и значеніе ихъ опредѣляетъ значеніе z. Въ свою очередь, значеніе x, y опредѣляется изъ другой функціи, гдѣ независимыми перемѣнными являются предшествующія механическія, физическія, химическія силы и т. д. Напротивъ, при телеологическомъ объясненіи мы принимаемъ, что напередъ дано значеніе z, и уже оно опредѣляетъ возможныя значенія x и y.

Телеологическій принципъ въ томъ видѣ, какъ онъ выдвигается для объясненія явленій жизни, не устраняетъ принципа каузальности, а лишь до-

полняетъ его. Физическія силы продолжаютъ дѣйствовать по закону причинности и производятъ свой результатъ съ естественной необходимостью. Но этотъ результатъ предопредѣленъ цѣлесообразно дѣйствующимъ началомъ, вслѣдствіе чего причинныя силы являются лишь средствомъ его осуществленія. Телеологическому началу принадлежитъ направляющая, формирующая, руководящая функція; физическимъ силамъ—осуществленіе намѣченнаго результата по естественнымъ законамъ ихъ дѣйствія.

Подобно тому какъ формально логическая схема каузальнаго объясненія въ примѣненіи къ физическимъ явленіямъ заполняется матеріальнымъ содержаніемъ, а именно закономъ сохраненія энергіи, такъ и телеологическая схема требуетъ извѣстной матеріальной гипотезы относительно природы цѣлесообразно дѣйствующаго начала.

Одной изъ такихъ гипотезъ являлось предположеніе, что цѣль лежитъ внѣ цѣлесообразнаго процесса, въ Богѣ, природѣ или метафизическомъ принципѣ (finis uniuscuiusque rei est eius perfectio). Такого рода гипостазированіе цѣли внѣ явленій дѣлаетъ ее недоступной для научнаго изслѣдованія, и потому вполнѣ понятно, что современный естественно-научный телеологизмъ не имѣетъ ничего общаго съ его прежней метафизической формой. Онъ разсматриваетъ цѣлесообразное начало, какъ свойство матеріи, присущее ей столь же естественно, какъ всѣ остальныя силы.

Природу такого начала можно представлять себѣ различно. Если взять за исходную точку нашъ внутренній опытъ, можно разсматривать цѣлесообразно дѣйствующую силу по аналогіи съ

сознательнымъ началомъ и приписывать ей психическій характеръ. Къ такому взгляду склоняется Pauly [1]). Гипотеза Pauly имѣетъ то преимущество, что даетъ единое объясненіе цѣлесообразности, какъ органическихъ, такъ и психическихъ формъ. Въ то же время она не приписываетъ органическимъ формамъ никакого сознательнаго начала. Психическій принципъ Pauly лишенъ всѣхъ свойствъ сознательной психики и имѣетъ съ послѣдней сходство лишь въ формальномъ способѣ дѣйствія: естественныя силы организма онъ превращаетъ въ средства для достиженія характеризующихъ организмъ цѣлей.

Съ другой стороны, можно представить телеологическую силу, какъ безсознательное біологическое начало, лежащее въ основѣ физіологическихъ и психическихъ функцій. Такой взглядъ также имѣетъ свои преимущества. Онъ устраняетъ всякую возможность привнесенія антропоморфическихъ элементовъ въ представленіе цѣлесообразности, въ примѣненіи же къ сознательнымъ проявленіямъ жизни идетъ на встрѣчу довольно распространеннымъ представленіямъ о роли безсознательнаго въ психикѣ [2]).

Если такимъ образомъ даже въ области естественныхъ наукъ ощущается потребность въ допущеніи принципа цѣлесообразности, то тѣмъ сильнѣе испытывается она въ наукахъ соціальныхъ. Начало цѣлесообразности отвѣчаетъ нашему

[1]) A. Pauly, Darwinismus und Lamarckismus, 1905: „urteilendes Princip"; необходимо однако замѣтить, что этотъ принципъ вовсе не отожествляется съ сознательнымъ сужденіемъ и въ своей элементарной формѣ сводится къ простой наличности связи средства съ цѣлью: „Innenwerden der Wirkung eines Mittels und der unmittelbaren Benützung dieser Wirkung".

[2]) E. v. Hartmann, Die Moderne Psychologie, 1901.

внутреннему опыту, характеризуетъ наше поведеніе; оно присуще общественнымъ формамъ, институтамъ и отношеніямъ, ихъ возникновенію и развитію. Въ то же время принципъ каузальности не имѣетъ столь прочнаго методологическаго обоснованія въ наукахъ общественныхъ, какъ въ области естествознанія. Прежде всего явленія психическія не допускаютъ примѣненія каузальности въ томъ полномъ объемѣ, какъ это имѣетъ мѣсто въ естествознаніи. Они не подчинены закону сохраненія энергіи, и потому категорія причинности можетъ быть примѣняема къ нимъ лишь въ логически формальномъ смыслѣ [1]). Но даже и возможность такого формальнаго примѣненія подвергается сомнѣнію. Указываютъ на то, что психическія явленія не составляютъ непрерывной замкнутой цѣпи, въ которой каждый послѣдующій членъ могъ бы быть выведенъ изъ предшествующихъ; психическіе акты могутъ быть связаны другъ съ другомъ закономѣрно лишь при помощи физіологическаго ихъ коррелата [2]).

Если такимъ образомъ природа соціальныхъ явленій особенно благопріятствуетъ примѣненію телеологическаго принципа, и потребность замѣны здѣсь каузальности телеологіей испытывается настоятельнѣе, чѣмъ въ другихъ наукахъ, то нельзя сказать, чтобы эта потребность хоть сколько-нибудь могла быть удовлетворена съ пользой для дѣла той телеологической системой, которая стала

---

[1]) За исключеніемъ случая, если разсматривать психику, какъ проявленіе особаго вида энергіи, см., напр., N. Krainsky, Die Principien der energetischen Psychologie, Ann. d. Naturphilos. 1909. VII, 3 и VIII, 4.

[2]) H. Münsterberg, Die Willenshandlung, 1888; J. Petzold, Einführung in die Philos. d. reinen Erfahrung, 1900, 1 B.

почти господствующей со времени появленія работы Stammle'ra. Прежде всего теорія Stammler'a исходитъ изъ противопоставленія человѣка всѣмъ остальнымъ явленіямъ міра. Между тѣмъ потребность въ телеологіи вызывается не особыми свойствами духа, а цѣлесообразностью всѣхъ вообще проявленій жизни. Поэтому едва ли можетъ быть правильнымъ такое обоснованіе телеологіи, которое дѣлаетъ ее исключительной привилегіей сознательной воли. Независимо отъ того, метафизическое обоснованіе, само по себѣ, привноситъ такія понятія, которыя совершенно неумѣстны въ наукахъ положительныхъ. Оно требуетъ признанія трансцедентнаго міра, метафизическаго происхожденія цѣли и въ то же время, преклоняясь передъ причинностью міра явленій, приходитъ къ объясненію одного и того же явленія двумя противоложными способами: каузальнымъ и финальнымъ— что логически невозможно.

Такого рода привнесеніе метафизическихъ началъ нисколько не расширяетъ и не обогащаетъ нашихъ знаній о тѣхъ связяхъ и соотношеніяхъ, какія существуютъ въ общественныхъ явленіяхъ, какъ составной части эмпирическаго, реальнаго міра. Только свободное отъ всякихъ трансцедентныхъ аттрибутовъ естественно-научное обоснованіе принципа финальности могло бы принести пользу соціальной наукѣ.

Такого обоснованія мы должны ждать отъ наукъ положительныхъ. Между тѣмъ здѣсь телеологическій принципъ находится пока въ стадіи неясныхъ и неопредѣленныхъ предположеній; въ немъ чувствуется потребность, сознается его возможная методологическая цѣнность, но онъ не вылился

пока въ форму опредѣленной логической теоріи. Способы примѣненія этого принципа неразработаны, неясно отношеніе его къ категоріи причинности; неизвѣстно, возмѣстятъ ли результаты примѣненія телеологіи тотъ дуализмъ, который она вноситъ въ объясненіе явленій. На это можетъ дать отвѣтъ только время.

А между тѣмъ противъ начавшагося движенія въ пользу телеологіи рѣзко выступаетъ господствующая доктрина съ подавляющимъ авторитетомъ научнаго матеріала, добытаго при помощи каузальнаго метода. На нашихъ глазахъ ей удается разлагать самыя сложныя явленія жизни на удивительно простые процессы [1]), и хотя въ самомъ простомъ процессѣ все же остается скрытой и непонятной таинственная сила живой матеріи, но трудно предрѣшить, гдѣ предѣлъ тому, что можетъ дать гипотеза механическаго пониманія природы?

При такомъ положеніи дѣла едва ли цѣлесообразно становиться на точку зрѣнія телеологическаго объясненія соціальныхъ явленій, отказываясь преждевременно отъ принципа каузальности, на почвѣ котораго общественныя науки могутъ чувствовать себя во всякомъ случаѣ въ полной безопасности отъ вторженія метафизическаго произвола и въ добромъ сосѣдствѣ съ опередившими ихъ отраслями положительнаго знанія.

---

[1]) Изслѣдованія И. П. Павлова, Loe'ba и др. см. рѣчь И. П. Павлова при открытіи XII Съѣзда Русск. Естеств. и Врач. (въ дневникахъ Съѣзда) тамъ же рѣчь Н. Ю. Зографа Новѣйшія теченія въ зоологіи.

5. ДИСПЕРСІЯ И ПОЛИМОРФИЗМЪ ЦѢЛЕЙ.

Оставаясь на почвѣ каузальнаго объясненія, мы будемъ разсматривать чувственно-волевую реакцію, какъ полезное приспособленіе организма, возникшее путемъ эволюціи. Всѣ полезныя приспособленія организма вообще обладаютъ способностью варіировать. Благодаря именно этой способности они возникаютъ и совершенствуются. Такимъ же образомъ возникъ и усовершенствовался чувственно-волевой аппаратъ; поэтому естественно, что и онъ обнаруживаетъ способность варіировать. Варіаціи естественныхъ признаковъ весьма часто бываютъ подчинены извѣстной правильности; такой же самой правильности могутъ быть подчинены варіаціи чувственно-волевой реакціи. Подобно тому какъ ростъ, вѣсъ, сила зрѣнія проявляются у различныхъ индивидовъ извѣстной группы съ случайными уклоненіями отъ опредѣленнаго типа, такъ точно и чувственно-волевой аппаратъ можетъ проявляться у отдѣльныхъ индивидовъ съ случайными варіаціями. Если какое-либо ощущеніе сопровождается извѣстной чувственно-волевой реакціею, величина этой реакціи у отдѣльныхъ индивидовъ можетъ представлять случайныя уклоненія отъ опредѣленнаго типа. Разумѣется, каждое сознательно произвольное дѣйствіе представляетъ собою проявленіе реакціи не на одно какое-либо ощущеніе, а на весьма сложный ком-

плексъ психическихъ состояній. Каждый элементъ этого комплекса имѣетъ свою реакцію, варіирующую для каждаго индивида; если такія отдѣльныя реакціи другъ отъ друга независимы, то совпаденіе въ психикѣ независимыхъ другъ отъ друга варіацій должно было бы дать результаты, также подчиняющіеся закону случайныхъ уклоненій. Однако такое представленіе едва ли соотвѣтствуетъ дѣйствительности; чувственно-волевыя реакціи каждой данной психики на отдѣльныя ощущенія не могутъ быть независимы другъ отъ друга. Между реакціями на разныя состоянія должны существовать въ каждой психикѣ извѣстныя связи и зависимость. Общая реакція не есть механическій результатъ сложенія элементарныхъ независимыхъ реакцій, но нѣкоторый органическій продуктъ, опредѣляемый общей природой чувственно-волевого аппарата данной психики; но такъ какъ этой общей природѣ, какъ цѣлому, свойственны въ отдѣльныхъ психикахъ варіаціонныя уклоненія отъ типа, то и въ этомъ случаѣ результатъ реакціи отдѣльныхъ психикъ на тожественные комплексы, въ ней появляющіеся, долженъ представлять такія же случайныя уклоненія.

Варіаціи естественныхъ признаковъ организма подчинены въ простѣйшемъ случаѣ закону нормальной кривой; чувственно-волевой аппаратъ есть такой же естественный признакъ организма, какъ и всѣ другіе. Его варіаціи также могутъ оказаться въ простѣйшемъ случаѣ подчиненными тому же закону.

Чувственно-волевыя реакціи выражаются въ дѣйствіяхъ. Если дѣйствія или ихъ результаты допускаютъ количественную градацію, варіаціи чув-

ственно-волевыхъ реакцій могутъ получить внѣшнее количественное выраженіе въ дѣйствіяхъ или ихъ результатахъ. Такъ, количество какого-либо продукта, потребляемаго разными индивидами, размѣръ сбереженій, число дѣтей являются, при прочихъ равныхъ условіяхъ, выраженіемъ количественной разницы—силы или интенсивности—чувственно-волевыхъ реакцій. Поскольку варіаціи подчинены закону случайныхъ уклоненій, и количественныя значенія дѣйствій или ихъ результатовъ точно выражаютъ величину варіацій, измѣреніе дѣйствій или ихъ результатовъ должно дать рядъ чиселъ, также подчиненныхъ закону случайныхъ уклоненій. Средняя такого ряда будетъ обладать постоянствомъ, явится вѣроятнымъ выраженіемъ нѣкоторой типичной величины, и уклоненія отдѣльныхъ чиселъ ряда будутъ обнаруживать опредѣленную закономѣрность. Подобные ряды мы и получаемъ въ дѣйствительности въ результатѣ статистическаго наблюденія человѣческихъ дѣйствій.

Количественными варіаціями чувственно-волевого аппарата мы можемъ объяснить прежде всего статистическую правильность среднихъ величинъ. Но кромѣ среднихъ величинъ мы имѣемъ дѣло въ статистикѣ съ величинами относительными. Послѣднія представляютъ численное отношеніе качественно различныхъ результатовъ. Откуда происходитъ постоянство и правильность этого отношенія?

Часть относящихся сюда случаевъ мы можемъ объяснить тѣми же количественными варіаціями чувственно-волевой реакціи. Многія качественно различныя дѣйствія представляютъ со-

бою результатъ или выраженіе количественной разницы—силы или интенсивности реакціи. Непрерывный рядъ количественно измѣняющейся чувственно-волевой реакціи выражается въ рядѣ дѣйствій, которыя мы воспринимаемъ, какъ качественно различныя. Иногда это качественное различіе является чисто условнымъ терминомъ обозначенія, и количественная природа дѣйствій остается явственно замѣтной; мы прямо дѣлимъ весь количественно измѣняющійся рядъ дѣйствій условно или произвольно на части и каждую часть обозначаемъ особымъ качественнымъ терминомъ. Такимъ образомъ мы различаемъ бережливость и скупость; скрытность и сдержанность, откровенность и болтливость.

Въ этихъ случаяхъ мы поступаемъ совершенно такъ же, какъ тогда, когда качественными терминами обозначаемъ, напримѣръ, количественныя различія температуры—холодъ, теплота, жаръ. Дѣло усложняется, разумѣется, тѣмъ, что чувственно-волевая реакція связывается съ различными интеллектуальными элементами, которые своимъ качественнымъ различіемъ скрываютъ въ значительной степени количественный характеръ чувственно-волевой части общаго психическаго комплекса.

Количественная основа качественно различаемыхъ дѣйствій особенно затемняется также и тѣмъ обстоятельствомъ, что дѣйствія являются выраженіемъ не простой элементарной чувственно-волевой реакціи, а сложнаго чувственно-волевого процесса, представляющаго собою реакцію на сложную совокупность интеллектуальныхъ состояній. Реакція на простое ощущеніе можетъ представлять рядъ съ ясно выраженнымъ количественнымъ ха-

рактеромъ; но когда мы возьмемъ два или больше такихъ рядовъ и будемъ комбинировать отдѣльные ихъ члены въ различныя сочетанія, то получающіяся сложныя комбинаціи реакцій могутъ выражаться въ дѣйствіяхъ, качественное различіе которыхъ скрываетъ количественный характеръ реакцій.

Такъ, напримѣръ, чувственно-волевая реакція на деньги, сама по себѣ, можетъ носить количественный характеръ, начиная отъ страсти къ наживѣ и кончая полнымъ равнодушіемъ къ матеріальнымъ благамъ; точно такъ же реакція страха передъ закономъ можетъ представлять количественную градацію интенсивности этого чувства; но сочетанія различныхъ количественныхъ значеній того и другого ряда могутъ выражаться въ дѣйствіяхъ качественно различныхъ, и это качественное различіе будетъ затемнять количественный характеръ реакціи.

Сложность человѣческихъ дѣйствій не даетъ возможности въ большинствѣ случаевъ свести ихъ путемъ анализа къ комплексу простыхъ элементарныхъ реакцій. Но теоретически мы должны допустить возможность подобнаго разложенія. Если же каждая элементарная реакція представляетъ количественныя варіаціи, то и сложный ихъ комплексъ также долженъ представлять количественныя различія. Поэтому мы должны допустить, что подъ многими качественными различіями дѣйствій скрыты въ сущности количественныя различія чувства и воли.

Количественныя варіаціи, если онѣ подчиняются закону случайныхъ уклоненій, встрѣчаются въ опредѣленныхъ численныхъ отношеніяхъ другъ

къ другу; если мы раздѣлимъ весь рядъ варіацій на части такъ, чтобы каждая часть заключала варіаціи въ опредѣленныхъ предѣлахъ, и полученнымъ частямъ ряда дадимъ качественно-различныя наименованія, то очевидно, что число варіацій въ предѣлахъ каждаго качественно-различнаго наименованія будетъ находиться въ правильномъ и опредѣленномъ отношеніи къ числу варіацій остальныхъ наименованій; для двухъ же или многихъ рядовъ, представляющихъ варіаціи одного и того же типа во времени или пространствѣ, это численное отношеніе варіацій разныхъ наименованій будетъ оставаться болѣе или менѣе постояннымъ. Но такого рода численное отношеніе качественно различныхъ признаковъ другъ къ другу и къ общей ихъ совокупности представляетъ собою не что иное, какъ относительное число. Правильность относительныхъ чиселъ, ихъ постоянство, случайный характеръ уклоненій, можетъ быть, слѣдовательно, въ извѣстныхъ случаяхъ внѣшнимъ результатомъ количественныхъ варіацій чувственно-волевого аппарата.

Другая причина постоянства и правильности относительныхъ чиселъ можетъ лежать въ качественныхъ варіаціяхъ того же аппарата. Мы знаемъ, что рядомъ съ количественными варіаціями, какъ, напримѣръ, варіація роста, вѣса, силы и разныхъ меристическихъ признаковъ, органическія формы обнаруживаютъ варіаціи качественныя; послѣднія состоятъ въ томъ, что сходныя формы, относящіяся къ одному и тому же виду или собирательному цѣлому, проявляютъ качественныя различія признаковъ; такова различная окраска, обратно симметричное строеніе тѣла, различное мѣ-

стоположеніе одинаковыхъ органовъ и т. п. [1]). Въ однихъ случаяхъ варіирующія формы представляютъ совершенно различные типы; въ другихъ— между ними существуетъ непрерывный переходъ черезъ промежуточныя варіаціи. Происхожденіе и значеніе такихъ качественныхъ различій одной и той же формы во многихъ случаяхъ бываетъ неясно. Но въ одномъ случаѣ оно имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе, а именно, когда качественныя различія служатъ интересамъ вида; послѣднее можетъ происходить двояко: либо качественныя различія могутъ быть полезны непосредственно отдѣльнымъ особямъ, а черезъ нихъ косвенно служатъ сохраненію и распространенію вида; либо они полезны непосредственно всей собирательной совокупности индивидовъ. Первый случай имѣетъ мѣсто тогда, когда качественно различное устройство или функціи даютъ возможность отдѣльнымъ группамъ индивидовъ использовать различныя условія существованія и внѣшней среды (напримѣръ, экземпляры растеній, раньше и позже цвѣтущіе). Всей совокупности качественныя различія служатъ непосредственно тогда, когда они имѣютъ функціональное значеніе для совокупности: когда индивиды съ качественно различными признаками исполняютъ опредѣленныя функціи въ интересахъ цѣлаго, напримѣръ, раздѣленіе по полу. Въ этомъ случаѣ качественно дифференцированныя группы составляютъ органическія составныя части всей совокупности, являются какъ бы органами ея, какъ цѣлаго. Въ силу этого, такія группы должны сохранять постоянное численное отноше-

[1]) W. Bateson, Materials for the study of Variation 1894, стр. 36 и сл.

ніе другъ къ другу и ко всей совокупности, какъ цѣлому, подобно тому какъ это имѣетъ мѣсто по отношенію къ частямъ организма. Но точно такъ же, какъ части, сохраняя опредѣленные размѣры по отношенію къ размѣрамъ всего организма, допускаютъ случайныя варіаціи, такъ и здѣсь: отдѣльныя качественно-различныя группы, сохраняя въ общемъ свое численное соотношеніе, должны обнаруживать случайныя колебанія въ своихъ размѣрахъ. Такого рода численныя соотношенія качественныхъ различій должны давать въ результатѣ относительныя числа статическаго характера.

Возможно, что и въ области сознательно-волевыхъ дѣйствій различные индивиды одарены качественно различной чувственно-волевой реакціей на одни и тѣ же ощущенія и идеи. Если такой полиморфизмъ имѣетъ біологическое значеніе для всей группы, можно ожидать, что численное отношеніе дѣйствій, вытекающее изъ подобныхъ качественно различныхъ реакцій, должно оставаться болѣе или менѣе постояннымъ. Относительныя числа неисправимыхъ преступниковъ, старыхъ холостяковъ и т. п., быть можетъ, должны быть отнесены насчетъ качественной особенности чувственно-волевого аппарата соотвѣтствующихъ индивидовъ.

6. ОБЪЕКТИВНЫЙ ХАРАКТЕРЪ ФОРМЪ ПОВЕДЕНІЯ.

Чувственно-волевой аппаратъ опредѣляетъ общее направленіе реакціи организма, указываетъ тѣ цѣли, которыя должны быть достигнуты, сообщаетъ характеръ положительныхъ и отрицательныхъ цѣнностей разнымъ внѣшнимъ объектамъ и внутреннимъ состояніямъ, сообразно съ ихъ полезнымъ или вреднымъ значеніемъ для жизни. Но чувственно-волевая реакція не опредѣляетъ того способа, которымъ могутъ быть достигнуты цѣли, той системы дѣйствій, какая должна быть направлена на соотвѣтствующія цѣнности. Между тѣмъ эта система дѣйствій даже въ простѣйшихъ случаяхъ бываетъ весьма сложной. У животныхъ она во многихъ случаяхъ проявляется инстинктивно, т. е. какъ наслѣдственное приспособленіе, приходящее въ дѣйствіе при соотвѣтствующихъ внѣшнихъ условіяхъ и внутреннихъ органическихъ возбужденіяхъ.

Координированныя системы дѣйствій, не опредѣляемыя сознательной волей, имѣются и у человѣка. При этомъ онѣ являются либо врожденными, т. е. представляютъ заложенный въ организмѣ продуктъ предшествующей эволюціи вида, или же пріобрѣтаются организмомъ въ теченіе его индивидуальной жизни и, будучи сперва произвольно-сознательными дѣйствіями, съ теченіемъ времени, вслѣдствіе частаго повторенія, утрачи-

ваютъ характеръ сознательности и превращаются въ механическіе рефлексы. И въ томъ, и въ другомъ случаѣ такія координированныя системы могутъ сопровождаться сознаніемъ иногда неяснымъ, иногда совершенно отчетливымъ; но сознаніе не опредѣляетъ самой координаціи дѣйствій, которая совершается помимо сознанія; вмѣшательство послѣдняго можетъ лишь нарушить быстроту, увѣренность и правильность координаціи. Сознанію принадлежитъ здѣсь въ нѣкоторыхъ случаяхъ лишь возможность пустить систему въ дѣйствіе или задержать ее, а затѣмъ оно остается, если пожелаетъ, въ роли простого наблюдателя.

Но кромѣ такихъ психо-механическихъ системъ дѣйствій, поведеніе человѣка состоитъ изъ сознательно-произвольной дѣятельности, т. е. дѣятельности, гдѣ одновременныя и послѣдовательныя дѣйствія координируются въ планомѣрную и цѣлесообразную систему сознательно-разумной волей. Цѣль и здѣсь дается характеромъ, направленіемъ и силой чувственно-волевой реакціи; но откуда берется самый способъ достиженія цѣли, планомѣрная координированная система дѣйствій?

Однимъ изъ способовъ объясненія планомѣрной сознательной дѣятельности служитъ ссылка на чувство, какъ источникъ и регуляторъ дѣйствій; такъ, семейная жизнь выводится изъ родственныхъ чувствъ, наказаніе—изъ мести, общественныя отношенія—изъ чувства общительности и т. п. Поскольку рѣчь идетъ о координированныхъ системахъ дѣйствій инстинктивнаго характера, это объясненіе можетъ быть принято съ извѣстной оговоркой. Чувственно-волевая реакція сама по себѣ не содержитъ, правда, никакой си-

стемы дѣйствій и лишь направляетъ реакцію на извѣстный объектъ; но система дѣйствій въ готовомъ видѣ заложена уже въ организмѣ, и чувственно-волевая реакція, направляя механизмъ инстинкта на опредѣленный объектъ, тѣмъ самымъ приводитъ его въ дѣйствіе. Механизмъ дѣйствій и чувство здѣсь неразрывно связаны, и въ этомъ смыслѣ можно сказать, что система дѣйствій опредѣляется чувствомъ. Но инстинктивныя дѣйствія составляютъ ничтожную часть того сложнаго комплекса, который образуетъ всю систему поведенія человѣка; послѣднее состоитъ изъ множества сознательно координированныхъ дѣйствій; такія дѣйствія не вытекаютъ изъ однихъ только чувствъ. Чувство сообщаетъ лишь цѣнность объекту, дѣлаетъ его предметомъ желаній и воли; но оно не предписываетъ сознанію никакой опредѣленной системы дѣйствій; такъ, чувство родственной любви сообщаетъ цѣнность дѣтямъ въ глазахъ родителей, и обратно; оно предопредѣляетъ общее направленіе дѣятельности, ея цѣль: стремленіе родителей заботиться о благѣ дѣтей; но это стремленіе столь же отлично отъ системы дѣйствій, посредствомъ которыхъ заботы достигаютъ своей цѣли, какъ желаніе разбогатѣть отлично отъ способа, какъ это сдѣлать. Чувство дружбы придаетъ цѣнность другу, но оно не содержитъ въ себѣ той системы дѣйствій, посредствомъ которыхъ мы оказываемъ другу услуги, помощь, поддерживаемъ его въ горѣ и принимаемъ участіе въ его радостяхъ. Еще съ большею очевидностью то же самое проявляется въ другихъ случаяхъ. Голодъ сообщаетъ цѣнность предметамъ пищи и дѣлаетъ ее цѣлью нашихъ дѣйствій; часть этихъ дѣйствій носитъ инстинк-

тивный характеръ; но инстинктъ ограничивается только развѣ координаціей дѣйствій жеванія и глотанія. Что же касается техническихъ способовъ добыванія и приготовленія пищи, а тѣмъ болѣе общественныхъ способовъ ея пріобрѣтенія, то они не составляютъ дѣйствій инстинктивныхъ и не содержатся въ чувственно-волевомъ состояніи голода; это система дѣйствій сознательно-произвольныхъ, разумныхъ и цѣлесообразныхъ.

Другой способъ объясненія сводится къ теоретическому построенію, которое можетъ быть названо раціоналистическимъ атомизмомъ. Здѣсь объясненіе исходитъ изъ предположенія, что координированная система сознательныхъ дѣйствій, направленныхъ на достиженіе извѣстной цѣли, является результатомъ разумной дѣятельности индивида. Человѣкъ разсматривается, какъ существо, одаренное потребностями и разумомъ. Потребности (т. е. чувственно-волевая реакція) ставятъ ему цѣли, а разумъ находитъ способы ихъ осуществленія. Такимъ образомъ все поведеніе индивида вытекаетъ цѣликомъ изъ его собственной природы, физической и духовной, какъ съ точки зрѣнія цѣлей, такъ и формъ. Это представленіе, окрашенное идеей физицизма, лежитъ въ основѣ ученія физіократовъ. Подобно тому, какъ физическіе атомы, одаренные опредѣленными свойствами, дѣйствуютъ по естественнымъ законамъ своей природы и образуютъ въ своемъ взаимодѣйствіи извѣстную систему, такъ и индивиды, снабженные опредѣленными естественными свойствами, стремятся къ цѣлямъ по законамъ своей природы, образуя естественную систему общества. Такимъ образомъ, всѣ общественныя отношенія выводятся

изъ поведенія индивидовъ, а все поведеніе индивидовъ изъ ихъ естественной природы.

Та же самая идея лежитъ въ основѣ такъ называемой чистой теоріи экономической науки. И здѣсь исходной точкой служитъ представленіе о человѣкѣ, какъ существѣ разумномъ и одаренномъ потребностями. Потребности ставятъ человѣку цѣли и побуждаютъ его затрачивать усилія на ихъ удовлетвореніе; сообразно съ своей природой онъ стремится получить наибольшую выгоду съ наименьшей жертвой. Разумъ подыскиваетъ способы дѣйствій, которые, согласно съ указаннымъ принципомъ, служили бы удовлетворенію потребностей. Такимъ путемъ опредѣляется отношеніе человѣка къ матеріальнымъ благамъ и вытекающее отсюда хозяйственное поведеніе. Изъ хозяйственнаго же поведенія вытекаетъ отношеніе индивида къ другимъ индивидамъ, ихъ совмѣстная хозяйственная дѣятельность и опредѣленная хозяйственная организація.

Такимъ образомъ, всѣ дѣйствія и отношенія вытекаютъ изъ разума и потребностей индивидовъ, являются результатомъ ихъ сознательныхъ расчетовъ, побужденій и мотивовъ. Сходство и однообразіе поведенія индивидовъ разсматривается, какъ естественное слѣдствіе сходства основныхъ свойствъ хозяйственной природы людей, постепенная же эволюція формъ поведенія,—какъ результатъ измѣненія внѣшнихъ условій и развитія духовныхъ свойствъ.

При такой постановкѣ вопроса задача экономиста-теоретика сводится къ тому, чтобы прослѣдить расчеты одного, двухъ или многихъ индивидовъ, поставленныхъ въ опредѣленныя хозяйствен-

ныя условія, и, руководствуясь экономическимъ принципомъ, дедуктивно вывести ихъ поведеніе и его возможныя послѣдствія.

Казалось бы, что для рѣшенія своей задачи экономистъ-теоретикъ поставленъ въ чрезвычайно благопріятныя условія. Съ его привычкой и умѣніемъ мыслить, имѣя въ распоряженіи достаточно времени и, сверхъ того, возможность, по желанію, упрощать условія задачи, онъ долженъ былъ бы, по-видимому, легче и лучше находить наиболѣе правильный способъ хозяйственнаго поведенія и послѣдствія его, чѣмъ можетъ это сдѣлать рядовой индивидъ. А между тѣмъ оказывается, что всей силы абстрактной мысли, распоряжающейся къ тому же усовершенствованнымъ аппаратомъ математическихъ вычисленій, недостаточно для безупречнаго рѣшенія простѣйшей задачи обмѣна; въ то время какъ та же задача въ гораздо болѣе сложномъ видѣ легко и просто разрѣшается ежедневно милліонами простыхъ обывателей, не представляя для нихъ никакихъ теоретическихъ трудностей.

Уже это одно обстоятельство должно было подвергнуть сомнѣнію правильность исходной посылки относительно индивидуально-разумнаго происхожденія сознательныхъ дѣйствій человѣка. И дѣйствительно, такая точка зрѣнія совершенно не отвѣчаетъ фактамъ. Прежде всего это ясно въ той сферѣ дѣятельности, гдѣ индивидъ не имѣетъ возможности или надобности индивидуально изобрѣтать координацію своихъ дѣйствій. Такъ бываетъ, напримѣръ, въ тѣхъ случаяхъ, когда поведеніе индивида опредѣляется принудительными формами, какъ это имѣетъ мѣсто въ правѣ. Право предписываетъ

опредѣленное поведеніе, даетъ готовую формулу дѣйствій для достиженія извѣстной цѣли. Поэтому поскольку въ своемъ поведеніи индивидъ осуществляетъ правовыя нормы, онъ совершаетъ рядъ дѣйствій, координація которыхъ опредѣляется нормой права, а не его усмотрѣніемъ.

Аналогичной принудительностью, хотя иначе организованной, обладаютъ формы поведенія, установленныя обычаемъ, нравами, приличіями.

Если здѣсь личное творчество индивида устраняется принудительно, то въ другихъ случаяхъ оно становится крайне затруднительнымъ и ненужнымъ въ виду фактическаго существованія готовыхъ и общепринятыхъ формъ поведенія. Такой случай имѣется, напримѣръ, по отношенію къ языку. Индивидъ можетъ, разумѣется, выдумать свою собственную координированную систему движеній для передачи мыслей, но фактически всѣ предпочитаютъ пользоваться существующимъ способомъ рѣчи. Человѣкъ, прибѣгающій къ услугамъ одного изъ существующихъ языковъ, совершаетъ рядъ движеній, координація которыхъ опредѣляется правилами языка, а не его усмотрѣніемъ.

Подобные же случаи, когда отдѣльные индивиды съ несомнѣнной очевидностью осуществляютъ формы поведенія, не ими выдуманныя, имѣющіяся уже въ готовомъ видѣ, встрѣчаются и въ области хозяйственной жизни. Сюда относится, напримѣръ, употребленіе денегъ. Индивидъ, прибѣгающій при обмѣнѣ къ помощи особаго мѣнового посредника, не имѣетъ надобности самостоятельно придумывать этотъ цѣлесообразный способъ дѣйствій, такъ какъ онъ уже существуетъ.

Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ очевидно, что

индивидъ совершаетъ рядъ произвольныхъ, планомѣрныхъ и цѣлесообразныхъ дѣйствій, координація которыхъ не опредѣляется однако его индивидуальнымъ усмотрѣніемъ и разумомъ, а существуетъ уже въ готовомъ видѣ.

Для того, чтобы и эти факты подвести подъ теорію индивидуальнаго творчества, обычно переносятъ вопросъ въ другую плоскость и указываютъ, что исторически цѣлесообразныя формы поведенія были въ свое время результатомъ индивидуальнаго изобрѣтенія, индивидуальнаго сознательнаго и разумнаго рѣшенія той или другой жизненной задачи. Но историческое возникновеніе какой-либо цѣлесообразной системы дѣйствій и послѣдующее массовое ея осуществленіе представляютъ два различныхъ процесса. Если первое возникновеніе какой-либо формы поведенія и было даже дѣломъ индивидуальнаго творчества, то отсюда логически еще не слѣдуетъ, что и послѣдующее ея повтореніе представляетъ также сознательную координацію дѣйствій, вытекающую изъ индивидуальнаго признанія ея цѣлесообразности [1]). Для всей той массы сознательныхъ дѣйствій, которыя осуществляются индивидами ежедневно, мы никакимъ образомъ не можемъ утверждать ни того, что дѣйствія эти всякій разъ наново изобрѣтаются каждымъ индивидомъ, ни того, что осуществленіе существующихъ уже формъ поведенія вызывается или сопровождается индивидуальнымъ сознаніемъ

[1]) Попытку логически связать эти два процесса мы находимъ въ гипотезѣ происхожденія общественныхъ формъ поведенія изъ договора или соглашенія; согласно этой гипотезѣ извѣстныя формы поведенія были цѣлесообразно выдуманы и по взаимному соглашенію приняты; отсюда слѣдуетъ заключить, что и дальнѣйшее ихъ осуществленіе покоится на индивидуальномъ признаніи цѣлесообразности какъ формъ поведенія, такъ и соглашенія.

или провѣркой ихъ разумности и цѣлесообразности. Нѣтъ сомнѣнія, что дѣйствія индивидовъ въ общемъ цѣлесообразны, разумны и осуществляются ими сознательно; но сознательность осуществленія сводится лишь къ заимствованію готовыхъ координированныхъ формъ поведенія, какъ имѣющемуся уже способу цѣлесообразнаго осуществленія своихъ намѣреній и цѣлей [1]).

Жить въ домахъ, разумѣется, умно и цѣлесообразно; но тотъ, кто живетъ въ домѣ, конечно, не думаетъ, что именно ему пришла въ голову такая идея; едва ли онъ думаетъ даже о томъ, что такой способъ жизни вообще разуменъ и цѣлесообразенъ. Хозяинъ, построившій домъ, не выдумалъ идеи выгодно помѣстить такимъ путемъ свой капиталъ; точно также и архитектору не было надобности изобрѣтать идею устройства жилого помѣщенія. То же самое бываетъ и во всѣхъ случаяхъ жизни. При приготовленіи пищи и одежды мы пользуемся существующими уже пріемами и готовыми шаблонами. Вся техническая дѣятельность представляетъ въ общемъ массовое примѣненіе извѣстныхъ уже способовъ добыванія и обработки продуктовъ; существующія машины и техническіе пріемы принимаются въ томъ видѣ, какъ они есть, съ ихъ удивительной цѣлесообразностью и столь же поразительными нерѣдко недостатками. Никому не приходится выдумывать многочисленныя профессіи и занятія, которыя даютъ средства къ жизни милліонамъ индивидовъ; населеніе въ массѣ распредѣляется между существующими

---

[1]) P. Beck, Die Nachahmung und ihre Bedeutung für Psychologie und Völkerkunde, 1904.

подраздѣленіями. Хозяину не надо изобрѣтать своихъ отношеній къ рабочимъ, и въ тѣ же существующія рамки укладываетъ свое поведеніе рабочій, какъ бы онъ ни думалъ о капиталистическомъ строѣ. Государственный механизмъ дѣйствуетъ, не будучи изобрѣтаемъ каждую минуту, правовыя нормы осуществляются, не требуя ни согласія, ни одобренія индивидовъ.

Вся наша жизнь и дѣятельность—общественная, хозяйственная, техническая, семейная, личная—состоитъ изъ сознательныхъ дѣйствій, представляющихъ собою конкретное осуществленіе готовыхъ формъ поведенія. Запасъ этихъ формъ составляетъ содержаніе культуры даннаго народа и времени. Онъ является тѣмъ источникомъ, изъ котораго индивиды черпаютъ планомѣрныя системы дѣйствій для осуществленія своихъ конкретныхъ цѣлей. Запасъ готовыхъ формъ дѣлаетъ излишней индивидуальную изобрѣтательность, и весьма кстати: ея не хватаетъ для разрѣшенія самой простой задачи; если индивидъ не находитъ готовой формы поведенія, онъ оказывается въ безпомощномъ положеніи. Поведеніе индивида представляетъ лишь конкретное скрещиваніе готовыхъ формъ, сообразно съ индивидуальнымъ характеромъ его чувственно-волевыхъ реакцій и индивидуальными условіями его жизни.

Если формы поведенія не выдумываются индивидомъ, то за то онѣ существуютъ только благодаря его сознанію; существованіе ихъ зависитъ отъ конкретнаго осуществленія въ дѣйствіяхъ, конкретное осуществленіе—отъ наличности въ психикѣ. Внѣ сознанія и дѣйствій формы поведенія перестаютъ существовать, какъ живыя проявленія, пре-

вращаются въ историческія воспоминанія, мертвые слѣды прошлаго. Правда, онѣ могутъ матеріализироваться внѣ индивида: въ кодексахъ, сборникахъ, книгахъ, моделяхъ, машинахъ, произведеніяхъ искусства; но такая внѣиндивидуальная матеріализація служитъ лишь однимъ изъ средствъ ихъ дальнѣйшаго воспроизведенія, если формы поведенія переходятъ въ сознаніе и дѣйствія индивидовъ. Если же этого не происходитъ, то формы поведенія перестаютъ существовать, а ихъ матеріализованныя воплощенія превращаются въ историческіе документы.

Индивидуальному сознанію формы поведенія могутъ представляться, какъ его собственное достояніе, какъ его, индивида, мысли, рѣшенія, дѣйствія; въ такомъ случаѣ истинная природа ихъ, какъ формъ поведенія, не созданныхъ творчествомъ даннаго индивида, можетъ быть для него скрыта и открывается лишь объективнымъ изслѣдованіемъ со стороны. Но въ другихъ случаяхъ дѣйствія, вслѣдствіе частаго и массоваго повторенія всѣми, представляются индивидуальному сознанію, согласно съ ихъ дѣйствительной природой, какъ конкретное осуществленіе нѣкоторой ранѣе существующей формы; формы поведенія объективируются и выносятся за предѣлы индивидуальной психики. Чаще всего это случается съ такими формами, которыя имѣютъ внѣшне-обязательный характеръ и въ силу этого особенно легко воспринимаются, какъ нѣчто постороннее, навязанное извнѣ. Въ такъ случаѣ объективированныя формы ищутъ внѣшняго мѣста и представляются сознанію, какъ бы живущими въ своихъ матеріализированныхъ воплощеніяхъ, кодексахъ, книгахъ и

т. п., или въ гипостазируемыхъ понятіяхъ, какъ обычаи, приличія.

Научная мысль иногда также принимала психическую объективацію формъ поведенія за реальное существованіе ихъ внѣ индивидуальныхъ сознаній и создавала особаго носителя объективированныхъ продуктовъ психики, въ видѣ народнаго духа. Въ однихъ случаяхъ этотъ народный духъ строится, какъ самостоятельная сущность, господствующая надъ индивидуальными психиками; въ другихъ разсматривается, какъ коллективная совокупность индивидуальныхъ сознаній [1]). Въ первомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ гипостазированіемъ фикціи, напоминающимъ идею реальнаго существованія родовыхъ понятій; во второмъ—безплодное словесное удвоеніе психики, которая приписывается и индивиду, и коллективному цѣлому.

Въ дѣйствительности формы поведенія существуютъ въ индивидуальной психикѣ и только въ ней; въ индивидуальную психику онѣ могутъ попадать изъ другой такой же психики черезъ посредство рѣчи, письма, дѣйствій или другихъ подобныхъ проявленій. Объективація же нѣкоторыхъ формъ поведенія представляетъ собою одинъ изъ случаевъ общаго свойства психики проицировать психическія состоянія внѣ сознанія. Мы проицируемъ чувство, приписывая его предметамъ въ видѣ объективнаго свойства—цѣнности; вмѣстѣ съ чувствомъ мы проицируемъ интеллектуальныя состоянія нашего сознанія, специфицируя цѣнность качественными различіями, когда мы говоримъ о вкусномъ, симпатичномъ, ужасномъ и т. п.; мы

[1]) W. Wundt, Völkerpsychologie, т. I, ч. I, 1900.

объективируемъ сужденія, когда говоримъ о сходствѣ, родствѣ. Такимъ же образомъ мы объективируемъ и формы поведенія. Способы и пріемы объективаціи въ разныхъ случаяхъ различны; но самое явленіе вообще свойственно психикѣ, и для объективированныхъ психическихъ состояній нѣтъ надобности искать внѣиндивидуальнаго существованія [1]).

Итакъ, оставляя въ сторонѣ вопросъ о первоначальномъ возникновеніи формъ поведенія, мы видимъ, что обычное поведеніе индивидовъ состоитъ въ постоянномъ массовомъ осуществленіи готовыхъ формъ, и что эти формы существуютъ лишь въ ихъ осуществленіи индивидами. Такимъ образомъ общественное поведеніе индивидовъ состоитъ не въ чемъ иномъ, какъ въ томъ, что каждый поступаетъ такъ же, какъ и другіе, и всѣ поступаютъ одинаково. Взаимное воспроизведеніе однихъ и тѣхъ же дѣйствій составляетъ характерную особенность общественной жизни людей такъ же, какъ и животныхъ. Но то, что у животныхъ достигается стаднымъ инстинктомъ, то у людей осуществляется при помощи сознанія. Сознательное воспроизведеніе готовыхъ формъ поведенія представляетъ собою не что иное, какъ подражаніе. Подражаніе лежитъ въ основѣ всѣхъ нашихъ дѣйствій, и свойство подражать составляетъ основную черту человѣческой психики [2]). Подражательность проявъ-

---

[1]) Относительно объективаціи правовыхъ нормъ см. Л. Петражицкій, Теорія права и государства, т. 1, 1907; ср. также мое „Ученіе объ элемен. явл.".

[2]) G. Tarde, Les lois sociales, 1898; Les lois de l'imitation, 1895 и др.; E. Durkheim, Die Methode der Sociologie, 1908; J. M. Baldwin, Interprétation sociale et morale des principes du développement mental, traduit... en collaboration avec l'Auteur par G. L. Duprat, 1899.

ляется въ самыхъ разнообразныхъ видахъ и формахъ, у всѣхъ людей и народовъ, во всякомъ возрастѣ, начиная съ первыхъ проблесковъ сознанія и до глубокой старости, въ дѣйствіяхъ сознательныхъ и безсознательныхъ, имѣетъ своимъ объектомъ не только подражаніе людямъ, но и животнымъ, предметамъ и физическимъ явленіямъ.

Подражательность свойственна человѣку, прежде всего, въ видѣ инстинкта, какъ врожденное внутреннее органическое побужденіе. Въ этой непосредственной формѣ она съ особенною ясностью проявляется у дѣтей, которыя подражаютъ взрослымъ, животнымъ, вещамъ и явленіямъ природы. Отъ этой примитивной формы подражательности человѣкъ постепенно освобождается, замѣняя ее болѣе тонкими способами подражанія, по мѣрѣ того, какъ становится старше или культурнѣе.

Далѣе, подражаніе проявляется безсознательно въ видѣ рефлекса, какъ безсознательное отвѣтное дѣйствіе на внѣшнее впечатлѣніе. Такъ мы подражаемъ мимикѣ собесѣдника, невольно поддѣлываемся подъ общій тонъ и манеры другихъ; безсознательно усваиваемъ говоръ и акцентъ окружающаго насъ населенія. Массовое подражаніе представляетъ соединеніе такого рефлекторнаго съ инстинктивнымъ; въ толпѣ, особенно подъ вліяніемъ аффекта, мы испытываемъ органическое побужденіе рефлекторно воспроизводить чужія дѣйствія.

Наконецъ, высшей формой подражанія является подражаніе сознательное. Здѣсь мы сознательно стараемся узнать и усвоить существующія формы поведенія и сознательно воспроизводимъ ихъ въ соотвѣтствующихъ случаяхъ. Мы усваиваемъ пра-

вила приличія и манеру держать себя, способы устройства домашней обстановки и веденія хозяйства, заимствуемъ у другихъ теоретическія знанія и практическіе пріемы профессіи, усваиваемъ то или другое философское міросозерцаніе, научную систему, политическія убѣжденія, художественные взгляды. Вообще мы выбираемъ изъ культурнаго запаса готовыхъ формъ поведенія все то, что болѣе подходитъ къ нашимъ вкусамъ и характеру, если намъ предоставлена свобода выбора, и осуществляемъ безъ выбора установленныя формы тамъ, гдѣ такого выбора юридически и фактически нѣтъ.

На свойствѣ подражанія основана и вся система воспитанія; мы расчитываемъ, что опредѣленныя формы поведенія, мышленія и чувствованія, систематическимъ подборомъ которыхъ мы заполняемъ сознаніе воспитываемаго, будутъ воспроизводимы имъ, когда это потребуется.

Такимъ образомъ на подражательной функціи сознанія основано, какъ усвоеніе существующихъ формъ поведенія, такъ и ихъ постоянное осуществленіе. Путемъ подражанія существующія формы передаются отъ однихъ индивидовъ къ другимъ, отъ поколѣнія къ поколѣнію и путемъ постояннаго повторенія поддерживаются и сохраняются. Но въ этомъ же процессѣ повторенія кроются и причины измѣненія формъ.

Подражаніе воспроизводитъ существующую форму поведенія, но оно не можетъ воспроизвести ее въ абсолютно тожественномъ видѣ. Всякій конкретный случай воспроизведенія представляетъ свои индивидуальныя особенности. Эти индивидуальныя различія являются слѣдствіемъ разныхъ причинъ. Уже при самомъ процессѣ познавательно-

наго усвоенія одна и та же форма не можетъ быть тожественно воспринята разными индивидами: одинъ и тотъ же объектъ всегда представляется различнымъ сознаніямъ въ нѣсколько различномъ видѣ, въ зависимости отъ общаго склада ума, имѣющагося уже въ немъ знанія, конкретнаго стеченія обстоятельствъ, направляющихъ вниманіе на тѣ или другія стороны объекта по-преимуществу. Далѣе, усвоенная форма подвергается новымъ измѣненіямъ при ея осуществленіи подъ вліяніемъ двухъ факторовъ: съ одной стороны, чувственно-волевой реакціи, которая представляетъ индивидуальныя различія въ каждой психикѣ, и, во-вторыхъ, подъ вліяніемъ конкретнаго стеченія внѣшнихъ условій, которое также не можетъ быть абсолютно одинаковымъ для двухъ случаевъ осуществленія одного и того же дѣйствія. Такимъ образомъ, въ окончательномъ счетѣ условія, модифицирующія форму поведенія при ея конкретномъ осуществленіи, сводятся къ тремъ причинамъ: различію познавательной способности, различію чувственно-волевой реакціи и различію внѣшнихъ условій при познаніи и осуществленіи формы. Первые два фактора, какъ всякія вообще біологическія приспособленія, подвержены варіаціямъ, т. е. у каждаго индивида одной и той же собирательной группы представляютъ случайныя уклоненія отъ опредѣленнаго типа. Такимъ образомъ даже при тожествѣ всѣхъ внѣшнихъ условій варіаціи психическаго аппарата должны были бы повести къ варіаціямъ отвѣтныхъ реакцій и вызвать случайныя модификаціи формъ поведенія при ихъ воспроизведеніи. Съ другой стороны, внѣшняя обстановка состоитъ изъ обстоятельствъ, которыя вызываютъ воспроиз-

веденіе опредѣленной формы поведенія и остаются для всѣхъ случаевъ такого воспроизведенія постоянными и неизмѣнными, и условій измѣняющихся; послѣднія могутъ быть независимы по отношенію къ обстоятельствамъ постояннымъ и другъ отъ друга; различныя комбинаціи такихъ условій создаютъ случайныя модификаціи внѣшней обстановки и вызываютъ такія же модификаціи отвѣтной реакціи.

Далѣе, случайныя варіаціи психики и случайныя модификаціи внѣшнихъ условій также независимы другъ отъ друга, и сочетанія ихъ въ томъ или другомъ конкретномъ случаѣ также случайны. Иначе говоря, причины, вызывающія въ отдѣльныхъ конкретныхъ случаяхъ модификацію одной и той же формы поведенія, дѣйствуютъ, какъ причины случайныя, а потому и результаты ихъ случайны. Въ силу этого одна и та же форма поведенія повторяется при конкретномъ ея осуществленіи съ случайными варіаціями.

Это обстоятельство ставитъ формы поведенія въ условія, аналогичныя органическимъ формамъ жизни вообще; подобно послѣднимъ, и формы поведенія, подпадая подъ дѣйствіе естественнаго и искуственнаго отбора, получаютъ возможность постепеннаго развитія въ направленіи наилучшаго приспособленія. Тѣ варіаціи, которыя лучше приспособлены къ достиженію цѣли, воспроизводятся чаще, особенно при сознательныхъ формахъ подражанія, получаютъ преобладаніе; напротивъ, формы поведенія, менѣе цѣлесообразныя, имѣютъ меньше шансовъ на воспроизведеніе, постепенно исчезаютъ и забываются. При многократномъ повтореніи этого процесса, послѣдовательныя измѣненія на-

копляются въ опредѣленномъ направленіи, и форма поведенія эволюціонируетъ въ сторону возрастающей цѣлесообразности.

Психическій процессъ эволюціи формъ поведенія представляетъ однако нѣкоторую особенность по сравненію съ біологической эволюціей формъ органическихъ. Въ біологической эволюціи организмовъ типъ вида устойчивѣе, и варіаціи сдерживаются въ болѣе узкихъ границахъ, чѣмъ это имѣетъ мѣсто въ эволюціи психическихъ формъ. Въ каждомъ организмѣ въ его зародышевой плазмѣ заложены элементы его вида; послѣдній въ большей или меньшей степени воспроизводитъ себя въ потомствѣ каждой особи; поэтому варіаціи потомства въ значительной степени возвращаются къ среднему типу вида и лишь отчасти имѣютъ исходной точкой специфическія особенности непосредственныхъ производителей даннаго потомства. Вслѣдствіе такого регресса къ первоначальному типу вида, только часть индивидовъ можетъ эволюціонировать въ одномъ опредѣленномъ направленіи даже при условіи отбора и изоляціи при воспроизведеніи. Если же при этомъ происходитъ свободное скрещиваніе, то варіаціи тѣмъ болѣе стремятся къ среднему типу [1]).

Въ мірѣ психическихъ формъ дѣло обстоитъ иначе. Психическая форма воспроизводитъ себя не путемъ размноженія, а путемъ подражанія; въ воспроизведенной формѣ не заложено никакихъ

[1]) За исключеніемъ того случая, когда одна варіація обладаетъ признакомъ рѣзко выраженнаго доминирующаго характера, тогда какъ признаки другихъ варіацій имѣютъ столь же рецессивный характеръ; въ такомъ случаѣ, согласно закону Mendel'я, возможно вытѣсненіе доминирующей варіаціей основной, хотя бы и болѣе многочисленной формы, см. Plate, Selectionsprincip, стр. 360 и сл.

скрытыхъ элементовъ, которые потенціально обладали бы способностью возвращать послѣдующія варіаціи къ первоначальному типу. Каждая конкретно воспроизведенная форма можетъ представлять собою самостоятельный и независимый источникъ для дальнѣйшаго подражанія; поэтому всѣ послѣдующія воспроизведенія, берущія начало отъ этого источника, варіируютъ только по отношенію къ нему, безъ регресса въ сторону первоначальнаго типа. При такихъ условіяхъ предѣлы варіацій значительно расширяются, и скопленіе ихъ около средняго типа уменьшается. Это стремленіе къ дисперсіи сдерживается, правда, противоположнымъ началомъ, которое дѣйствуетъ аналогично регрессу и панмиксіи. При подражательномъ воспроизведеніи исходнымъ образцомъ рѣдко служитъ только одинъ какой-либо конкретный случай; воспроизведенію обычно предшествуетъ наблюденіе многихъ случаевъ осуществленія формы поведенія, и только затѣмъ она воспроизводится. Въ этомъ процессѣ наблюденія и сравненія индивидуальныя особенности отдѣльныхъ случаевъ нивелируются, и форма до извѣстной степени сводится къ своему среднему типу. Тѣмъ не менѣе независимость отдѣльныхъ случаевъ отъ общаго типа и возможность каждаго отдѣльнаго случая или группы ихъ быть источникомъ воспроизведенія создаетъ условія, благопріятствующія бо́льшей дисперсіи формъ психическихъ, сравнительно съ органическими варіаціями.

Варіаціи формъ поведенія, отборъ ихъ, эволюція въ опредѣленномъ направленіи объясняютъ происхожденіе новыхъ формъ изъ существующихъ. Обычный способъ появленія новыхъ формъ со-

стоитъ въ послѣдовательномъ накопленіи незначительныхъ варіацій; когда накопленіе это достигнетъ въ количественномъ и качественномъ отношеніи значительныхъ размѣровъ, воспроизводимая форма становится въ извѣстный моментъ времени столь отличной отъ своего первоначальнаго образца, что получаетъ характеръ совершенно новаго явленія. Впечатлѣніе новизны особенно усиливается въ томъ случаѣ, когда промежуточныя, переходныя варіаціи исчезаютъ. Иногда процессъ эволюціи совершается путемъ такихъ незначительныхъ измѣненій, такъ постепенно и медленно, что люди сживаются съ каждой послѣдовательной стадіей, не замѣчая ея различія отъ предъидущей, и такимъ образомъ переходъ къ новой формѣ поведенія совершенно ускользаетъ отъ ихъ вниманія; лишь вызванное какимъ-либо обстоятельствомъ ретроспективное сопоставленіе дѣйствительно осуществляемой формы съ ея первоначальнымъ содержаніемъ обнаруживаетъ ихъ разницу и заставляетъ констатировать появленіе новаго способа поведенія. Въ этомъ случаѣ новая форма является результатомъ массоваго безличнаго творчества, и ни одинъ моментъ процесса не закрѣпляется за какимъ-либо отдѣльнымъ индивидуальнымъ сознаніемъ. Мы имѣемъ передъ собой типъ эволюціи, совершающейся безъ участія индивидуальнаго изобрѣтенія или открытія. Къ этому типу относится множество процессовъ постепеннаго историческаго развитія формъ государственной, общественной и культурной жизни, отдѣльныхъ институтовъ, учрежденій, нормъ и обычаевъ, языка.

Другой типъ эволюціи характеризуется наличностью индивидуальныхъ открытій или изобрѣте-

ній. Онъ, въ свою очередь, распадается на два вида—типъ завершительныхъ открытій и типъ внезапныхъ открытій.

Первый типъ характеризуется тѣмъ, что между исходной и новой формой существуетъ непрерывный рядъ постепенныхъ варіацій. Когда новая форма окончательно сложилась, то каждая варіація представляется для нея одинаково необходимой и важной; только совокупность всѣхъ варіацій и создаетъ новую форму; но именно благодаря этому обстоятельству, послѣдняя, завершающая варіація получаетъ особенное значеніе; сама по себѣ, она такая же варіація, какъ и всѣ прочія, и въ естественномъ процессѣ развитія составляетъ одинъ изъ моментовъ, наравнѣ съ другими; но въ силу мѣста и времени, какое она занимаетъ, появленіе новой формы связывается именно съ этой варіаціей. Поэтому и индивидъ, на долю котораго выпадаетъ осуществленіе такой завершительной варіаціи, оказывается въ особомъ, преимущественномъ, сравнительно съ другими, положеніи—съ нимъ именно связывается открытіе или изобрѣтеніе новой формы. За однимъ изобрѣтеніемъ можетъ слѣдовать рядъ новыхъ варіацій, завершающійся новымъ изобрѣтеніемъ и т. д. Характерной особенностью такого рода изобрѣтеній является ихъ болѣе или менѣе очевидная преемственная связь съ предшествующими варіаціями. Множество техническихъ открытій и усовершенствованій служитъ наглядньмъ примѣромъ этого типа эволюціи формъ поведенія [1]).

Второй типъ эволюціи, сопровождаемой инди-

---

[1]) A. Vierkandt, Die Stetigkeit im Kulturwandel, 1908.

видуальными изобрѣтеніями, характеризуется внезапностью послѣднихъ. Появленіе новой формы не можетъ быть поставлено въ столь очевидную преемственную связь съ предшествующими варіаціями и черезъ нихъ съ какою-либо исходной формой, какъ это имѣетъ мѣсто въ предъидущемъ случаѣ. Новая форма является не простой варіаціей существующей формы, а сочетаніемъ элементовъ различныхъ формъ, какъ бы результатомъ скрещиванія ихъ въ сознаніи и дѣйствіяхъ индивида. Чѣмъ дальше отстоятъ формы другъ отъ друга, чѣмъ бо́льшее число ихъ участвуетъ въ такомъ скрещеніи, тѣмъ менѣе результатъ походитъ на что-либо уже существующее, тѣмъ менѣе онъ можетъ быть поставленъ въ непосредственную преемственную связь съ предъидущимъ развитіемъ. Только путемъ разложенія на составныя части, мы можемъ найти связь этихъ частей съ отдѣльными формами поведенія и такимъ путемъ установить ихъ зависимость отъ предшествующаго поведенія. Такого рода способъ образованія новыхъ формъ путемъ внезапныхъ мутацій мы называемъ открытіями по-преимуществу. Для своего появленія онъ требуетъ, какъ удачнаго совпаденія существующихъ формъ въ психикѣ, т. е. случая, такъ и особыхъ свойствъ психики, которая могла бы разложить формы на части и слежить послѣднія въ новое сочетаніе. Иногда при этомъ бо́льшую роль играетъ случай, другой разъ—особыя свойства психики, но исторія свидѣтельствуетъ, что благопріятныя условія для появленія такого рода открытій встрѣчаются необыкновенно рѣдко, вслѣдствіе чего значеніе ихъ въ безостановочной эволюціи формъ поведенія не можетъ быть велико. Это значеніе ослабляется еще

тѣмъ обстоятельствомъ, что чѣмъ больше открытіе, т. е. чѣмъ менѣе оно похоже на существующія формы поведенія, тѣмъ болѣе оно несовмѣстимо въ индивидуальныхъ сознаніяхъ съ привычными формами, тѣмъ менѣе оно можетъ найти туда доступъ, сопровождаться положительной чувственно-волевой окраской, претвориться въ дѣйствіе. Для того, чтобы получить положительную чувственную окраску, оно должно быть поставлено въ связь съ существующими цѣнностями. Но именно необычность новой формы служитъ этому препятствіемъ. Для того, чтобы подобнаго рода открытіе стало массовой формой поведенія, необходимъ дополнительный процессъ сближенія новой формы съ существующими. Такой процессъ можетъ состоять либо въ измѣненіи существующихъ формъ въ направленіи къ новой путемъ другихъ болѣе обычныхъ типовъ эволюціи, либо въ измѣненіи новой формы, путемъ пониженія ея оригинальности и приспособленія къ привычнымъ формамъ.

Въ общемъ процессъ эволюціи формъ поведенія носитъ массовый и стихійный характеръ; индивидуальная изобрѣтательность и творчество играютъ въ немъ незначительную роль. Главное назначеніе психики—воспроизведеніе существующихъ формъ, а наиболѣе существенная роль ея творчества сводится къ образованію индивидуальныхъ варіацій.

Если личное сознательно-разумное творчество играетъ ничтожную роль въ процессѣ происхожденія новыхъ формъ изъ существующихъ, то тѣмъ менѣе можно приписывать ему какое-либо значеніе въ первоначальномъ возникновеніи первыхъ формъ общественнаго поведенія. Здѣсь сознаніе и

разумъ не могли играть никакой роли уже потому, что раньше, чѣмъ явились первые ихъ проблески, человѣкъ, въ особенности если онъ былъ стаднымъ животнымъ, долженъ былъ обладать готовымъ и обильнымъ запасомъ цѣлесообразныхъ формъ поведенія.

Съ другой стороны, нелѣпо приписывать этимъ первымъ проблескомъ сознательнаго разума, съ его малымъ запасомъ знаній, такого рода открытія, которыя являлись поворотными этапами въ развитіи человѣчества, въ то время, какъ современный средній индивидъ съ его несомнѣнно болѣе развитой психикой, чѣмъ у дикаря, и большимъ количествомъ знаній не въ состояніи сдѣлать даже самаго простого изобрѣтенія. Поэтому картинныя описанія, повѣствующія о томъ, какъ дикарь изобрѣталъ огонь, одежду, оружія и т. п., представляютъ собою чистую фантазію, точно такъ же, какъ гипотетическія соображенія первобытнаго человѣка о пользѣ семьи, права, общежитія и другихъ т. п. институтовъ. Всѣ усилія первобытныхъ Ньютоновъ и Эдиссоновъ были направлены, вѣроятно, на то, чтобы психическимъ путемъ подражанія закрѣпить какія-либо полезныя варіаціи инстинкта и такимъ образомъ сдѣлать первый шагъ по пути замѣны инстинктивнаго воспроизведенія дѣйствій подражательнымъ воспроизведеніемъ ихъ черезъ психику.

Однѣ и тѣ же причины, слѣдовательно, обусловливаютъ, какъ первое возникновеніе, такъ и дальнѣйшее развитіе формъ поведенія. Цѣлесообразность первыхъ формъ жизни человѣка такъ же мало была результатомъ разума и сознанія, какъ и цѣлесообразность формъ поведенія животныхъ

или цѣлесообразность функцій организма. И для дальнѣйшаго развитія формъ поведенія человѣка достаточно тѣхъ факторовъ, которые положили начало цѣлесообразности органическихъ функцій и животныхъ инстинктовъ.

Отличіе общественныхъ формъ поведенія отъ инстинктивнаго поведенія животныхъ состоитъ вовсе не въ томъ, будто цѣлесообразность первыхъ обязана творческимъ актамъ сознательной силы, тогда какъ инстинкты животныхъ развиваются путемъ біологической эволюціи безъ вмѣшательства творческаго начала разума. Разница сводится лишь къ замѣнѣ застывшихъ формъ инстинкта болѣе подвижнымъ психическимъ воспроизведеніемъ дѣйствій. Разница эта не даетъ, правда, основанія возводить сознательную психику на степень единственнаго въ своемъ родѣ и ни съ чѣмъ не сравнимаго фактора, тѣмъ не менѣе она, сама по себѣ, чрезвычайно существенна. Психическое воспроизведеніе, оставаясь въ ряду всѣхъ другихъ біологическихъ факторовъ, создаетъ однако исключительно благопріятныя условія для развитія формъ поведенія: оно, во-первыхъ, открываетъ возможность бо́льшаго разнообразія варіацій и бо́льшаго уклоненія ихъ отъ первоначальнаго типа и, во-вторыхъ, болѣе легкаго и скораго распространенія полезныхъ варіацій. Оба обстоятельства имѣютъ первостепенное значеніе для эволюціи формъ.

Одно изъ главныхъ выраженій противъ теоріи Дарвина состоитъ именно въ томъ, что варіаціи представляютъ собою слишкомъ незначительныя измѣненія и не могутъ дать организму никакихъ преимуществъ ни при поддержаніи своей жизни, ни при размноженіи; и въ такомъ случаѣ непо-

нятно, почему такія біологически-индифферентныя измѣненія должны накопляться и развиваться въ извѣстномъ направленіи. Отсюда понятно, что размѣры уклоненія отъ даннаго типа играютъ существенную роль; только уклоненія достаточной величины могутъ положить начало развитію новой формы. Но именно замѣна физіологическаго воспроизведенія психическимъ даетъ возможность, какъ было указано, появленія болѣе значительныхъ уклоненій. Благодаря этому психическое воспроизведеніе вѣрнѣе и скорѣе ведетъ къ образованію новыхъ формъ и является болѣе совершеннымъ способомъ развитія во всѣхъ возможныхъ направленіяхъ и накопленія признаковъ въ направленіи наиболѣе цѣлесообразномъ.

Что касается второго обстоятельства—быстроты и легкости распространенія варіацій, оказавшихся полезными, то и здѣсь психика даетъ человѣку чрезвычайно существенныя преимущества. Въ мірѣ организмовъ распространеніе задерживается двумя обстоятельствами: передачей полезнаго приспособленія только собственному потомству и трудностью, если не полной невозможностью, наслѣдственной передачи признаковъ, пріобрѣтенныхъ въ теченіе индивидуальной жизни организма.

Въ то время, какъ организмы передаютъ свои признаки только собственному потомству (и притомъ только нѣкоторой части, такъ какъ другая регрессируетъ къ исходному типу вида), психическое воспроизведеніе не связано не только съ личнымъ потомствомъ, но и съ потомствомъ вообще; оно можетъ распространяться на всѣхъ существующихъ индивидовъ и на всѣ будущія поколѣнія. Равнымъ образомъ, оно не редуцируется

никакой физіологической тенденціей возврата къ среднему типу. Благодаря этому, однажды возникшая и оказавшаяся полезной варіація имѣетъ возможность неограниченнаго распространенія.

Еще существеннѣе значеніе психики по отношенію къ пріобрѣтеннымъ свойствамъ.

Вопросъ о наслѣдственной передачѣ лично пріобрѣтенныхъ свойствъ является до настоящаго времени весьма спорнымъ. Одни рѣшительно отвергаютъ возможность такой передачи, какъ, напримѣръ, Weismann, объясняющій случаи появленія у потомства личныхъ особенностей родителей лишь индивидуальнымъ проявленіемъ общаго наслѣдственно-врожденнаго предрасположенія [1]). Другіе признаютъ эту возможность, исходя изъ того соображенія, что во многихъ случаяхъ нельзя объяснить наличность инстинктовъ и наслѣдственныхъ функціональныхъ приспособленій иначе, какъ допустивъ первоначальное возникновеніе ихъ въ организмѣ въ результатѣ его дѣятельности. Опыты и наблюденія прежняго времени—ампутаціи и поврежденія органовъ — свидѣтельствовали не въ пользу наслѣдственной передачи: такого рода измѣненія организма не наслѣдуются потомствомъ, хотя бы происходили послѣдовательно и непрерывно въ цѣломъ рядѣ поколѣній. Только въ послѣднее время удалось получить экспериментальное подтвержденіе наслѣдственной передачи измѣненій морфологическихъ и функціональныхъ, вызванныхъ искусственно [2]). Если признать эти опыты

---

[1]) A. Weismann, Vorträge über Descendenztheorie, 1904.

[2]) Изслѣдованія Kammerer'a, Chauvin'a, Schröder'a, Fischer'a, Standfuss'a, Pictet'a, см. R. Semon, Die Mneme, 1908, стр. 75—86, также L. Plate, о. с., стр. 323 и сл.

доказательными—что многими оспаривается—то и въ такомъ случаѣ все же остается недоказанной прочность наслѣдованія; напротивъ, нѣкоторые изъ этихъ немногочисленныхъ опытовъ прямо свидѣтельствуютъ о томъ, что искусственно вызванные признаки послѣ нѣсколькихъ поколѣній перестаютъ наслѣдоваться, и организмъ возвращается къ прежнему типу. Поэтому правильнѣе всего думать, что если въ извѣстныхъ случаяхъ и возможна наслѣдственная передача лично пріобрѣтенныхъ признаковъ, то во всякомъ случаѣ такіе признаки становятся прочно-наслѣдственными лишь въ томъ случаѣ, когда условія, ихъ вызывающія, дѣйствуютъ непрерывно въ теченіе достаточно длиннаго ряда послѣдовательныхъ поколѣній.

Совершенно иначе обстоитъ дѣло съ психической передачей. Для психики возможно воспроизведеніе всѣхъ формъ, какъ тѣхъ, которыя существуютъ испоконъ вѣковъ, такъ и тѣхъ, которыя возникаютъ въ теченіе индивидуальной жизни какого-либо поколѣнія, и даже тѣхъ, которыя составляютъ индивидуальное изобрѣтеніе одного человѣка.

Отсюда ясно то преимущество, какое даетъ человѣку воспроизведеніе формъ поведенія черезъ психику. Психика представляетъ собою элементъ болѣе пластичный, болѣе подвижный, чѣмъ морфологическія формы и органическія функціи. Она облегчаетъ появленіе новыхъ формъ, накопленіе цѣлесообразностей, ихъ бо́льшую приспособляемость къ внѣшнимъ условіямъ. Организмъ, снабженный психикой, получаетъ такимъ образомъ возможность скорѣе, легче и лучше приспособлять

свои дѣйствія къ большому количеству сложныхъ, разнообразныхъ и мѣняющихся условій.

Итакъ, мы видимъ, что формы поведенія подчиняются въ своемъ развитіи и возникновеніи тѣмъ же законамъ, какъ физіологическія функціи и морфологическія образованія организмовъ; психическія реакціи являются однимъ изъ полезныхъ приспособленій организма, наравнѣ со всѣми другими функціями. Тѣ и другія не представляютъ явленій абсолютно различныхъ и несравнимыхъ. То, что прежде исполнялось физіологически или путемъ инстинкта, теперь болѣе совершенно исполняется психикой; и обратно, извѣстныя психическія функціи теряютъ сознательность, превращаются въ привычные инстинкты или физіологическіе рефлексы.

Цѣль всѣхъ функцій, какъ сознательныхъ, такъ и безсознательныхъ, какъ психическихъ, такъ и физіологическихъ—служить цѣлесообразными полезными реакціями на внѣшнія вліянія. Однѣ изъ нихъ, разъ вылившись путемъ филогинетическаго развитія въ специфическія мало пластичныя формы, трудно поддаются вліянію внѣшнихъ факторовъ и въ своемъ специфическомъ неподвижномъ видѣ передаются изъ поколѣнія въ поколѣніе; ими организмъ неизмѣнно въ одной и той же формѣ реагируетъ на опредѣленныя воздѣйствія. Другія функціи болѣе пластичны, филогенетическая энграмма ихъ менѣе специфична; онѣ легко поддаются внѣшнимъ вліяніямъ и даютъ организму возможность болѣе свободно комбинировать отвѣтныя дѣйствія.

Въ основѣ всѣхъ вообще функцій лежитъ коренное свойство живой матеріи реагировать движеніемъ на внѣшнія вліянія; различна лишь быстрота, способъ и сложность движенія. Измѣняя

морфологическое строеніе, органическая матерія отвѣчаетъ на внѣшнія вліянія движеніемъ, которое длится тысячелѣтія и проходитъ черезъ безконечный рядъ поколѣній; амеба мѣняетъ свою форму въ короткій промежутокъ времени, но за то однообразнымъ способомъ. Психическія реакціи отличаются быстротой, сложностью и пластичностью. Но въ нихъ лишь своеобразно проявляется общее свойство органическихъ формъ жизни.

Форма поведенія въ данное время и въ данномъ мѣстѣ представляютъ собою систему, части которой связаны между собою функціонально Существованіе и воспроизведеніе каждой отдѣльной формы обезпечено существованіемъ всей системы, и обратно. Поэтому вся система образуетъ нѣкоторое органическое цѣлое и, какъ всякая органическая совокупность, обладаетъ устойчивостью типа и способностью къ эволюціи. Устойчивость системы выражается въ типичномъ постоянствѣ количественнаго отношенія качественно различныхъ составныхъ частей системы, а способность къ эволюціи достигается путемъ случайныхъ колебаній, какъ количественнаго соотношенія отдѣльныхъ формъ поведенія, такъ и варіацій признаковъ каждой отдѣльной формы. Количественныя соотношенія качественно различныхъ формъ поведенія въ ихъ статическомъ или динамическомъ состояніи представляютъ собою статистическія относительныя числа. Постоянство и типичность этихъ чиселъ обусловлены органическимъ постоянствомъ типа системы, правильность же уклоненій—общимъ закономъ случайности органическихъ варіацій.

Точно также и каждая отдѣльная форма поведенія, будучи воспроизводима съ случайными варіаціями, можетъ служить источникомъ статистической правильности, посколько варіаціи дѣйствій или ихъ результаты поддаются по своей природѣ количественному измѣренію.

7. СУБСТИТУЦІЯ ЦѢЛИ.

Множество біологически полезныхъ реакцій существовало прежде, чѣмъ появилась сознательная психика. Въ извѣстный моментъ цѣлесообразныя дѣйствія освѣтились сознаніемъ, стали переживаться, какъ субъективныя состоянія духа. Сознательное переживаніе явилось внутреннимъ субъективнымъ коррелатомъ дѣйствій. Поскольку основнымъ свойствомъ дѣйствій является ихъ цѣлесообразность, постолько и производное дѣйствій—психика—должна получить отпечатокъ этого свойства: въ ней также долженъ находить свое выраженіе принципъ цѣлесообразности. Но то, что въ дѣйствіяхъ проявляется объективно, то въ сознаніи переживается субъективно. Это субъективное переживаніе цѣлесообразности и выражается въ процессѣ воли и ея разумномъ осуществленіи. Но именно благодаря тому, что разумную цѣлесообразность воли мы переживаемъ субъективно, она является нашему сознанію, какъ нѣчто непосредственно данное, первоначальное, какъ предшествующее дѣйствіямъ свойство нашего духа. Всѣ же сознательныя дѣйствія въ ихъ объективномъ существованіи представляются намъ результатомъ или проявленіемъ разума и воли; такимъ образомъ психика въ ея собственномъ сознаніи становится источникомъ поведенія.

Однако такое представленіе не отвѣчаетъ дѣйствительности; оно не отвѣчаетъ ей, прежде всего,

съ точки зрѣнія генетической: то, что въ субъективномъ сознаніи представляется непосредственнымъ и первичнымъ, то въ объективномъ процессѣ эволюціи является производнымъ и вторичнымъ. Но и съ точки зрѣнія функціональнаго соотношенія, разумъ и воля не служатъ первоисточникомъ поведенія. Разъ формы поведенія существуютъ раньше, чѣмъ индивидъ приступаетъ къ ихъ осуществленію, то, очевидно, что свою разумную цѣлесообразность онъ укладываетъ въ готовую схему дѣйствій. Неизбѣжное для сознанія ὕστερον-πρότερον получается лишь благодаря тому, что субъективное состояніе переживается непосредственно, тогда какъ объективная форма доступна только черезъ познаніе и именно въ ея объективированномъ видѣ.

Такимъ образомъ, если то, что съ субъективной точки зрѣнія представляется индивиду разумнымъ осуществленіемъ его воли, съ точки зрѣнія объективной составляетъ осуществленіе готовой формы поведенія, то очевидно, что въ сознательныхъ дѣйствіяхъ человѣка происходитъ подстановка его разумной цѣлесообразности подъ объективную схему дѣйствій. Такая подстановка вообще возможна, благодаря тому, что цѣлесообразность—принципъ разумной воли—въ то же время является объективнымъ свойствомъ формъ поведенія. Поэтому вполнѣ естественно, что объективно цѣлесообразное можетъ быть и субъективно разумнымъ.

Когда мы имѣемъ дѣло съ инстинктами, то мы ясно видимъ, какъ ихъ объективную цѣлесообразность, такъ и то, что эта объективная цѣлесообразность не зависитъ отъ разумной воли. Если бы даже животное сознало разумность инстинкта,

было бы очевидно, что инстинктъ все же не опредѣляется сознаніемъ, и сознаніе составляетъ явленіе вторичнаго происхожденія. Когда же дѣйствія совершаются не инстинктивно, а усваиваются путемъ подражанія и воспитанія, они остаются по прежнему объективно цѣлесообразными; но благодаря тому, что сознаніе постигаетъ ихъ цѣлесообразность, объективная цѣлесообразность становится въ то же время субъективною цѣлесообразностью: дѣйствіе исполняется сознательно, какъ дѣйствіе разумное, объективный и субъективный моментъ сливаются въ одинъ актъ, и, вслѣдствіе этого, вторичный характеръ субъективнаго сознанія становится скрытымъ. Не только самому дѣйствующему индивиду кажется, что его способъ дѣйствія опредѣляется его разумнымъ усмотрѣніемъ, но и для посторонняго наблюдателя вторичный характеръ сознанія ни въ чемъ не обнаруживается. Однако это вѣрно только до тѣхъ поръ, пока объективная и субъективная цѣлесообразность вполнѣ совпадаютъ, т. е. когда дѣйствіе и объективно имѣетъ извѣстное полезное назначеніе и субъективно это же назначеніе составляетъ его цѣль въ психикѣ дѣйствующаго индивида.

Хотя такое совпаденіе объективной и субъективной цѣлесообразности вообще возможно, но оно вовсе не обязательно и неизбѣжно. Разумное обоснованіе, которое индивидъ даетъ своимъ дѣйствіямъ, можетъ и не совпадать съ объективно присущей имъ цѣлесообразностью. Подобное расхожденіе объективной и субъективной цѣлесообразности представляетъ своего рода experimentum crucis для рѣшенія вопроса о взаимоотношеніи между

объективной формой поведенія и субъективнымъ сознаніемъ.

Случаи расхожденія могутъ быть сведены къ тремъ видамъ: во 1-хъ, форма поведенія остается неизмѣнной, субъективное ея содержаніе съ теченіемъ времени мѣняется; во 2-хъ, форма поведенія остается одинаковой, влагаемое въ нее содержаніе въ разныхъ случаяхъ различно; и въ 3-ихъ, форма поведенія осуществляется безъ всякаго содержанія. Во всѣхъ этихъ случаяхъ очевидно, что форма поведенія совершенно не зависитъ отъ тѣхъ мотивовъ и цѣлей, которыми сопровождается ея осуществленіе въ сознаніи дѣйствующихъ индивидовъ; существованіе формы представляетъ собою первичный фактъ; она осуществляется, потому что существуетъ; а затѣмъ уже индивиду предоставляется объяснять для себя свое поведеніе, какъ онъ находитъ нужнымъ или удобнымъ, давать ему то или другое разумное объясненіе и обоснованіе.

Первый случай расхожденія объективной формы съ ея субъективнымъ содержаніемъ мы наблюдаемъ въ историческомъ развитіи поведенія.

Разсматривая процессъ историческаго развитія формъ поведенія съ его объективной стороны, мы замѣчаемъ, что однѣ формы болѣе подвижны и легко поддаются измѣненію, тогда какъ другія болѣе устойчивы и неподвижны. Естественно, что формы болѣе подвижныя, при всѣхъ прочихъ равныхъ условіяхъ, легче могутъ приспособляться къ условіямъ существованія и становятся болѣе цѣлесообразными, тогда какъ менѣе подвижныя отстаютъ въ своемъ развитіи. Въ результатѣ различнаго темпа эволюціи можетъ получиться болѣе или менѣе значительное несоотвѣтствіе между общимъ

уровнемъ цѣлесообразности преобладающей части поведенія и той или иной особенно косной формой.

Параллельно эволюціи формъ поведенія идетъ развитіе психики. Каждой ступени объективной цѣлесообразности отвѣчаетъ своя система истинъ, цѣнностей и цѣлей. Но на каждой ступени развитія психика стремится къ единству своего содержанія: въ этомъ проявляется основной присущій ея дѣятельности законъ—экономія психической энергіи. Въ предѣлѣ психика стремится свести всѣ мысли къ одной истинѣ, всѣ чувства—къ одной цѣнности, всѣ проявленія воли—къ одной цѣли. Правда, въ конкретной психикѣ этотъ принципъ экономіи мысли, чувства и воли проявляется крайне несовершенно, но все же онъ требуетъ извѣстной ихъ согласованности, исключаетъ возможность рѣзкихъ противорѣчій и приводитъ къ нѣкоторому единству сознанія.

Въ силу этого стремленія къ единству, сознаніе не можетъ выводить своихъ дѣйствій изъ принциповъ, взаимно противорѣчащихъ другъ другу; объясняя все поведеніе вообще разумными мотивами и цѣлесообразными соображеніями, оно не можетъ въ то же время для какой-либо части поведенія прибѣгать къ объясненіямъ и мотивамъ, которые не вяжутся съ остальнымъ содержаніемъ психики и потому не могутъ представляться разумными и цѣлесообразными.

Поэтому, когда психика встрѣчается съ отставшими косными формами поведенія, она не можетъ сохранить за ними ихъ прежнее психическое содержаніе, если оно не соотвѣтствуетъ ея теперешнему состоянію—то именно содержаніе, которое въ свое время было присуще данной формѣ пове-

денія, когда она находилась въ соотвѣтствіи съ остальной массой поведенія и всѣмъ вообще содержаніемъ психики. Вмѣсто прежняго содержанія психика подставляетъ подъ тѣ же формы новое содержаніе, сообразно съ ея теперешними представленіями и цѣлями. Такимъ образомъ оказывается, что въ процессѣ развитія преобладающая масса поведенія мѣняется параллельно съ измѣненіемъ мотивовъ и цѣлей, тогда какъ нѣкоторыя дѣйствія остаются неизмѣнными, и лишь мѣняется сопровождающее ихъ значеніе и обоснованіе. Субституція мотивовъ и цѣлей становится здѣсь очевидной: не сознаніе опредѣляетъ форму поведенія, а форма поведенія снабжается содержаніемъ, и притомъ содержаніемъ, которое не отвѣчаетъ ей генетически и можетъ не отвѣчать и функціонально.

Вторично подставленное психическое содержаніе оказываетъ, правда, извѣстное вліяніе на объективную форму поведенія; оно до извѣстной степени ее модифицируетъ. Косность формы, съ одной стороны, и стремленіе психики къ единству, съ другой, заставляютъ психику снабжать старую форму такимъ новымъ содержаніемъ, которое какъ можно лучше укладывалось бы въ нее и находилось въ наилучшемъ соотвѣтствіи съ ней. Однако психикѣ не всегда удается достигнуть такого результата; новые мотивы и новыя цѣли, которыми сопровождается осуществленіе формы, невполнѣ укладываются въ нее; въ такомъ случаѣ несоотвѣтствіе содержанія формѣ оказываетъ обратное вліяніе, частично видоизмѣняя форму: однѣ части ея ослабляются при воспроизведеніи или исчезаютъ, другія усиливаются, и такимъ образомъ прежняя форма въ той или иной степени приспособляется

къ своему новому содержанію. Однако въ этомъ процессѣ измѣненія формы подъ вліяніемъ психическаго содержанія, психикѣ все же не принадлежитъ роль первоначальной и независимой силы, опредѣляющей собою поведеніе. Являясь общимъ и единымъ отраженіемъ преобладающей массы поведенія, субъективнымъ переживаніемъ объективной цѣлесообразности дѣйствій и оказывая въ свою очередь вліяніе на отдѣльныя формы поведенія, психика служитъ лишь проводникомъ или средой, черезъ которую преобладающая масса поведенія вліяетъ на отдѣльныя формы, приспособляя ихъ къ общему уровню. Психика съ ея сравнительной подвижностью и стремленіемъ къ единству облегчаетъ лишь до нѣкоторой степени взаимную координацію дѣйствій, ихъ согласованіе и приведеніе объективной цѣлесообразности къ одному уровню.

Въ зависимости отъ бо́льшей или меньшей разницы между общимъ уровнемъ цѣлесообразности и объективной отсталостью той или иной формы поведенія, подстановка въ нее новаго психическаго содержанія можетъ дать различные результаты. Если косная форма сравнительно недалеко отстала отъ общаго уровня всего остального поведенія, новое содержаніе укладывается въ нее сравнительно легко, и самая форма легче приноравливается къ новому содержанію. Между формой и ея содержаніемъ устанавливается болѣе или менѣе полная гармонія, и только путемъ послѣдующаго историческаго изслѣдованія мы можемъ убѣдиться, что старая форма поведенія съ тѣмъ или инымъ частичнымъ измѣненіемъ служитъ новымъ цѣлямъ. Въ этомъ отношеніи нѣкоторыя формы поведенія обладаютъ чрезвычайной приспособляе-

мостью къ разнообразнымъ психическимъ содержаніямъ; при крайней устойчивости, онѣ путемъ послѣдовательно повторяющихся субституцій и соотвѣтственной внѣшней модификаціи, непрерывно продолжаютъ свое существованіе въ теченіе вѣковъ въ исторіи многихъ народовъ, въ каждую эпоху служа разнымъ цѣлямъ и исполняя различныя назначенія. Такого рода формы поведенія приспособлены, повидимому, къ нѣкоторому сложному комплексу существенныхъ для жизни объективныхъ цѣлей, и, по мѣрѣ того, какъ послѣдовательныя измѣненія общей системы дѣйствій выдвигаютъ на первый планъ ту или другую изъ этихъ цѣлей, форма поведенія получаетъ соотвѣтствующее содержаніе и внѣшнюю модификацію. Такого рода пластичной полителехіей обладаютъ основные институты общественной жизни, какъ право, государство, семья. Исторія этихъ институтовъ и множества другихъ болѣе частныхъ представляетъ собою послѣдовательную смѣну цѣлей, подставляемыхъ подъ одну и ту же основную форму поведенія съ бо́льшими или меньшими ея внѣшними модификаціями.

Въ другихъ случаяхъ формы не обладаютъ такой внѣшней пластичностью, мало измѣняются или приспособляются къ своему содержанію, но обнаруживаютъ крайнюю устойчивость и потому, съ ходомъ развитія послѣдовательно получая новое субъективное содержаніе, мало измѣняютъ свое объективное назначеніе. Такого рода формы поведенія служатъ какой-либо простой, элементарной объективной цѣли. Чѣмъ болѣе существенна эта цѣль, тѣмъ дольше можетъ оставаться неизмѣнной форма поведенія, получая послѣдовательно различ-

ное обоснованіе и истолкованіе. Когда же, наконецъ, въ процессѣ объективной эволюціи, функція данной формы окажется въ противорѣчіи съ общимъ характеромъ цѣлесообразности всего поведенія, форма либо совершенно исчезаетъ, либо вырождается, теряя свой практическій характеръ. Первый исходъ имѣетъ мѣсто, когда форма поведенія становится вредной, второй—когда она только безполезна.

Подобной неподвижностью, соединенной съ неспособностью приспособляться къ субституируемому содержанію, отличается, напримѣръ, смертная казнь. Возникнувъ въ глубокой древности, она переживаетъ античную культуру, распространеніе христіанства, вѣкъ просвѣтительныхъ идей и живетъ до нашихъ дней; какое бы психическое объясненіе ни подводилось подъ эту форму поведенія, объективный характеръ ея остается неизмѣннымъ. Когда несоотвѣтствіе этого института съ общимъ характеромъ поведенія дѣлаетъ его, наконецъ, вреднымъ, воспроизведеніе его должно сократиться или вполнѣ исчезнуть.

Иначе бываетъ въ томъ случаѣ, когда при устойчивости и неприспособляемости формы къ своему содержанію, она однако не оказывается вредной, а лишь практически безполезной: если прежде форма поведенія служила объективно полезной цѣли, теперь же, съ общимъ измѣненіемъ всей системы поведенія, эта цѣль отпала, то форма поведенія продолжаетъ осуществляться, но ей сообщается символическое истолкованіе. Въ такомъ положеніи оказываются формы поведенія, происхожденіе которыхъ относится къ глубокой старинѣ; въ свое время онѣ представляли, быть

можетъ, чрезвычайно важное значеніе, но съ теченіемъ времени совершенно утратили его, и тѣмъ не менѣе продолжаютъ воспроизводиться: не имѣя практическаго значенія, онѣ получаютъ символическій характеръ. Примѣромъ могутъ служить многія формы культа, напримѣръ, жертвоприношеніе. Для номадовъ скотъ служилъ главнымъ источникомъ существованія, причемъ однако они пользовались исключительно его молокомъ и другими продуктами, но не мясомъ. Поэтому только въ случаѣ крайней нужды допускалось убійство животнаго, и только все племя сообща вправѣ было это сдѣлать. Съ переходомъ къ иному образу жизни, обычай теряетъ свою практическую цѣлесообразность, но форма поведенія сохраняется въ своей полной неприкосновенности: отъ времени до времени животное убивается всѣмъ племенемъ, причемъ нерѣдко орудіемъ служитъ каменный ножъ въ эпоху, когда существуютъ уже металлическія орудія; мясо съѣдается сырымъ въ то время, какъ въ другихъ случаяхъ его приготовляютъ въ пищу при помощи огня. Весь обрядъ, не имѣя уже никакого практическаго значенія, получаетъ символическое истолкованіе [1]). Сюда же относится обычай поддержанія священнаго огня и множество другихъ т. п. формъ.

Вторымъ доказательствомъ субституціи психическаго содержанія подъ объективную форму служатъ тѣ случаи, когда форма поведенія воспроизводится одинаково, но субъективное обоснованіе ея воспроизведенія дается различное. Въ античной религіи, говоритъ Beck [2]), въ видѣ общаго

[1]) P. Beck, Die Nachahmung, 1904, стр. 121.
[2]) ibid., 106.

правила, ритуалъ установленъ самымъ строгимъ образомъ, но однообразное исполненіе его у разныхъ народовъ и племенъ сопровождается самыми различными истолкованіями. То же самое можно сказать относительно безчисленнаго множества формъ поведенія въ исторіи и современной жизни: внѣшнія формы поведенія чрезвычайно однообразны, но субъективное объясненіе ихъ весьма различно у разныхъ группъ и даже отдѣльныхъ индивидовъ.

Наконецъ, очевиднымъ доказательствомъ независимости объективныхъ формъ поведенія отъ субъективной цѣлесообразности служитъ возможность полнаго отсутствія всякой субституціи; множество формъ существуетъ исключительно по традиціи, т. е. путемъ подражательнаго воспроизведенія или воспитательнаго внушенія, безъ какихъ бы то ни было внутреннихъ цѣлесообразныхъ обоснованій или разумныхъ объясненій. Такимъ характеромъ обладаютъ условныя формы общенія, какъ рукопожатія, привѣтствія и т. п., многія юридическія формулы и обычаи, установленный порядокъ сношеній и т. д.

Возможность расхожденія объективной формы поведенія и ея психическаго содержанія свидѣтельствуетъ о независимости установившихся способовъ дѣйствій отъ индивидуальнаго сознанія; явленіе же субституціи указываетъ на первичный характеръ дѣйствій и вторичное происхожденіе психическаго содержанія. Подобнаго рода отношеніе сознанія къ дѣйствіямъ было бы вообще невозможно, если бы система сознательныхъ дѣйствій опредѣлялась индивидуальнымъ разумомъ и волей. Но если она не опредѣляется такимъ обра-

зомъ въ одной и притомъ преобладающей части случаевъ, то нѣтъ никакихъ основаній принимать обратное допущеніе для тѣхъ случаевъ, когда истинное отношеніе сознанія и дѣйствій скрыто, благодаря видимому совпаденію объективной и субъективной цѣлесообразности.

8. ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

Въ настоящее время мы можемъ подвести общій итогъ причинамъ статистической правильности сознательныхъ дѣйствій человѣка. Причины эти лежатъ въ органической природѣ дѣйствій. Сознательно-произвольныя дѣйствія состоятъ изъ цѣли и способа ея осуществленія. Цѣль дается проекціей чувственно-волевой реакціи; способъ осуществленія—подражательнымъ воспроизведеніемъ объективировавшихся и готовыхъ формъ поведенія. Чувственно-волевая реакція и подражательное воспроизведеніе дѣйствій являются основными свойствами психики, полезными приспособленіями организма, явившимися въ результатѣ его филогенетическаго развитія. Они объективно-цѣлесообразнымъ способомъ опредѣляютъ общее направленіе его реакцій и коренной формальный способъ ихъ осуществленія. Координація же отдѣльныхъ дѣйствій реакціи дается формой поведенія; формы поведенія представляютъ воспроизведеніе съ извѣстными варіаціями и мутаціями формъ ранѣе существовавшихъ, а эти послѣднія—еще болѣе раннихъ, и эта цѣпь эволюціи восходитъ непрерывно до безсознательнаго поведенія, состоящаго изъ физіологическихъ функцій и инстинктивныхъ дѣйствій. Сознательныя реакціи развились такимъ образомъ изъ безсознательныхъ путемъ филогенетическаго образованія сознательной психики и біологической эволюціи формъ поведенія.

Замѣна безсознательныхъ реакцій сознательно-произвольными знаменуетъ собою прогрессъ объективной цѣлесообразности. Сознательныя реакціи обладаютъ бо́льшей подвижностью, лучшей и болѣе легкой приспособляемостью къ сложнымъ условіямъ жизни, даютъ возможность болѣе скорой и многосторонней эволюціи въ сторону накопленія цѣлесообразности.

Рядомъ съ этой объективной цѣлесообразностью психической реакціи существуетъ субъективное переживаніе психическихъ процессовъ, какъ состояній нашего я. Это субъективное переживаніе даетъ намъ возможность испытывать радости и горе жизни—и въ нихъ находить жажду бытія; но для насъ неясенъ смыслъ этого удвоенія бытія путемъ возведенія его къ личному сознанію. Представляетъ ли оно безкорыстную щедрость природы, случайный излишекъ ея энергіи, ошибочную интроекцію, присущую исторической идіосиндемѣ и подлежащую біологическому вымиранію, или же имѣетъ какое-либо полезное назначеніе—этого мы до сихъ поръ не знаемъ [1]). Но то, что мы знаемъ, заставляетъ насъ критически принимать данныя нашего внутренняго опыта. Психическія переживанія являются результатомъ слѣдовъ, отложенныхъ въ процессѣ филогенетическаго развитія, слѣдовъ, оставленныхъ впечатлѣніями индивидуальной жизни, и непосредственныхъ раздраженій, получаемыхъ отъ внѣшней среды. Совокупность результа-

[1]) Здѣсь, въ заключительной части, авторъ позволяетъ себѣ особо указать на работы академика В. Бехтерева, въ частности „Психика и Жизнь“, изд. 2-ое, 1904, „Внушеніе и его роль въ общественной жизни“, 3-ье изд., 1908, „Объективная психологія“, в. 1, 1907,—относящіяся ко всѣмъ вообще вопросамъ психики, жизни и развитія и дающія обширныя указанія на литературу, въ томъ числѣ русскую.

товъ филогенетическаго развитія, отрѣзанная въ сознаніи отъ ея генетической почвы, съ присоединившимися къ ней слѣдами индивидуальныхъ впечатлѣній составляетъ наше личное сознаніе; ему противопоставляется, въ видѣ внѣшней среды, объективація непосредственно переживаемыхъ познавательныхъ процессовъ. Отсѣченіе сознаніемъ своего содержанія отъ его генетическаго источника создаетъ реально переживаемую иллюзію самопроизвольности психическихъ процессовъ. Съ другой стороны, переживаніе произвольности вмѣстѣ съ непосредственной доступностью этихъ переживаній сознанію дѣлаютъ въ сознаніи психику самопроизвольнымъ первоисточникомъ объективныхъ дѣйствій, а присущую ей разумную цѣлесообразность воли—причиной объективной цѣлесообразности поведенія. Между тѣмъ объективное изслѣдованіе убѣждаетъ насъ въ иллюзорности внутренней свободы, открываетъ ея источникъ и возстановляетъ объективную причинную связь дѣйствій съ причинами лежащими внѣ сознанія. Оно свидѣтельствуетъ о производности непосредственныхъ переживаній. Объективное изслѣдованіе приводитъ къ убѣжденію, что психическія произвольныя реакціи, будучи извѣстной стадіей біологическаго развитія жизни, подчиняются общимъ законамъ біологіи и обнаруживаютъ правильности и соотношенія, свойственныя вообще живымъ формамъ. Частнымъ проявленіемъ такой правильности служитъ статистическая закономѣрность сводныхъ признаковъ. Ихъ постоянство является результатомъ устойчивости типа органическихъ формъ, а правильность уклоненій—отраженіемъ закона варіацій этихъ формъ. Посредствомъ сводныхъ при-

знаковъ мы улавливаемъ типъ поведенія и типичныя соотношенія формъ поведенія въ ихъ статическомъ состояніи, посредствомъ уклоненій—степень ихъ устойчивости и эволюцію.

Статистическому изученію доступна пока лишь незначительная часть формъ поведенія, а именно только тѣ формы, которыя сами по себѣ или въ своихъ результатахъ поддаются количественному учету. Хотя усовершенствованіе техническихъ пріемовъ наблюденія расширяетъ сферу примѣненія статистики свыше предѣловъ работоспособности изслѣдователей-теоретиковъ, но тѣмъ не менѣе статистическое изученіе по самой природѣ своей ограничено специфическою областью человѣческихъ дѣйствій; ему недоступна качественная сторона явленій. Правда, и въ этомъ отношеніи статистика дѣлаетъ нѣкоторыя завоеванія, изобрѣтая способы остроумной замѣны качественныхъ различій количественными. Но если въ огромномъ большинствѣ случаевъ статистическій методъ изученія явленій и не можетъ дать непосредственныхъ результатовъ для отдѣльныхъ соціальныхъ наукъ, то онъ все же можетъ и долженъ оказать косвенное вліяніе на методы изученія соціальныхъ явленій вообще. Общество представляетъ собою не что иное, какъ совокупность индивидовъ, осуществляющихъ систему формъ поведенія; соціальное явленіе не что иное, какъ объективированная форма или группа формъ поведенія.

Обыкновенно подъ обществомъ понимаютъ совокупность людей, связанныхъ между собою отношеніями. Логическая сущность связи, которую мы называемъ отношеніемъ, бываетъ однако различна. Въ однихъ случаяхъ связь эта состоитъ

въ томъ, что мы логически объединяемъ предметы въ совокупность по признаку или цѣли, безъ наличности реальной связи между предметами. Здѣсь отношеніе предметовъ есть лишь ихъ логическое отношеніе. Въ другихъ случаяхъ этому логическому отношенію отвѣчаетъ реальный субстратъ—дѣйствіе предметовъ другъ на друга. Отношенія, связывающія людей въ общественную группу, принадлежатъ къ этому второму типу. Здѣсь индивиды связаны не только логически, но и реальнымъ взаимодѣйствіемъ; это взаимодѣйствіе создается поведеніемъ индивидовъ. Общественныя отношенія представляютъ собою, слѣдовательно, не что иное, какъ формы поведенія: поведеніе правителя и гражданина, рабочаго и хозяина, отца и дѣтей, рабочихъ другъ по отношенію къ другу, продавцевъ и покупателей, и т. д. Эти отношенія мы можемъ разсматривать либо съ ихъ динамической стороны, и тогда они представляются намъ, какъ системы дѣйствій; либо статически—и тогда они получаютъ характеръ институтовъ и учрежденій.

Отличительная особенность общественныхъ отношеній состоитъ въ томъ, что создающія ихъ взаимодѣйствія индивидовъ не только доступны внѣшнему познанію, какъ объективныя явленія, но и могутъ субъективно переживаться дѣйствующими индивидами, какъ состоянія ихъ духа. Такимъ образомъ субъективныя переживанія отношеній образуютъ реальный коррелатъ логическаго понятія, специфическій для человѣческаго общества и отсутствующій въ другихъ собирательныхъ группахъ.

Но если общество представляетъ собою сово-

купность индивидовъ, осуществляющихъ формы поведенія, то изученіе общественныхъ явленій должно состоять въ изученіи происхожденія, природы и развитія формъ поведенія. Поскольку статистическій методъ открываетъ и доказываетъ аналогію законовъ поведенія съ общими біологическими законами жизни, послѣдніе должны быть положены въ основу методологіи общественныхъ наукъ. Біологическая природа общественныхъ формъ поведенія требуетъ прежде всего ихъ объективнаго изученія. Отсюда неизбѣженъ тотъ выводъ, что раціоналистическій способъ объясненія общественныхъ явленій изъ разума и воли является въ основѣ своей ложнымъ. Онъ ведетъ къ неправильному представленію о творческой роли индивидуальной психики, снабжаетъ послѣднюю мистическими и метафизическими категоріями трансцедентной цѣли и свободы, разрываетъ связь явленій общественныхъ съ законами всего остального міра и въ то же время безсиленъ объяснить самыя простыя соціальныя отношенія.

Лучшимъ примѣромъ безплодности такого метода служитъ политическая экономія въ ея теоретической части. Съ своимъ принципомъ субъективной цѣлесообразности дѣйствій она до сихъ поръ не дала удовлетворительнаго объясненія основныхъ экономическихъ явленій, какъ явленія цѣны, прибыли на капиталъ, заработной платы, ренты, денегъ; и въ то же время, въ лицѣ нѣкоторыхъ представителей, забралась въ метафизическія дебри абсолютнаго блага и конечной цѣли. Только путемъ перехода къ объективному изслѣдованію дѣйствій, ихъ объективной цѣлесообразности и объективной эволюціи, вмѣсто проникно-

венія въ субъективныя переживанія, теорія политической экономіи можетъ прійти къ познанію дѣйствительныхъ законовъ хозяйства. Подобно тому, какъ нельзя вывести a priori или изъ конечной цѣли строенія глаза и функцій печени, такъ точно нельзя апріорными построеніями воспроизвести строеніе общества и поведеніе людей на опредѣленной стадіи ихъ естественно-историческаго развитія.

Необходимо отказаться отъ подстановки собственныхъ переживаній подъ историческій продуктъ сложной естественной эволюціи и замѣнить произвольныя комбинаціи логическихъ категорій объективнымъ изученіемъ положительнаго матеріала. Статистическій методъ, съ его хотя и неособенно богатымъ, но все же поучительнымъ опытомъ въ области изученія законовъ органической жизни вообще, могъ бы указать путь къ правильной постановкѣ объективнаго изученія общественныхъ явленій.

N427