# ИЗВѢСТІЯ
# Кіевскаго Коммерческаго
# ИНСТИТУТА,

состоящаго въ вѣдѣніи Министерства Промышленности и Торговли.

1911.

Книга X.

КІЕВЪ.
Типографія И. И. Чоколова, Б.-Житомирская № 20 с. д.
1911.

Печатано по опредѣленію Учебнаго Комитета Кіев. Коммерч. Института.
Директоръ **М. Довнаръ-Запольскій.**

# Содержанiе.

СТРАН.

**1. Проф. Д. Граве.** Энциклопедiя математики.

Глава III. Анализъ безконечно малыхъ. Теорiя предѣловъ (§§ 31—34). . . . . . . . . . . . . . . . . . 129
Основанiя теорiи рядовъ (§§ 35—55) . . . . . . . . . . . 130
Основы дифференцiальнаго исчисленiя (§§ 56—145). . . . 145
Основы интегральнаго исчисленiя (§§ 146—173). . . . . 210
Теорiя ансамблей (§§ 174—175). . . . . . . . . . . . . . 240

**2. Соцiальная физика.** А. Кэтлэ. (Переводъ студентовъ Кiевскаго Коммерческаго Института. Продолженiе).

Глава 7. О населенiи и его приращенiяхъ. О таблицахъ населенiя. Таблица населенiя Бельгiи. Можно-ли судить о благосостоянiи народа по даннымъ о населенiи? . . . . . . . 271—300
Прибавленiе. Населенiе, браки, рожденiя и смертные случаи въ нѣсколькихъ государствахъ Европы. Краткiй перечень. 301—313
Теорiя шансовъ и статистическихъ вѣроятностей. 1. Число шансовъ извѣстно. 2. Число шансовъ неизвѣстно. Вычисленiе и опытъ тѣмъ менѣе точно согласуются между собою, чѣмъ менѣе было произведено опытовъ. О средней и крайнихъ предѣлахъ въ оцѣнкѣ измѣренiй . . . . . . . . . . . . 314—333

Труды Общества экономистовъ при К. К. Институтѣ:
Протоколы засѣданiй Общества въ 1910 году . . . . . . . . 1— 18

§ 31. Опредѣленіе. *Постоянное вещественное или комплексное число $a$ называется предѣломъ комплексной перемѣнной $x$, если при нѣкоторомъ процессѣ измѣненія перемѣнной $x$ модуль разности*

$$x - a$$

*можетъ быть сдѣланъ меньше произвольно заданнаго положительнаго числа $\varepsilon$ и при дальнѣйшемъ измѣненіи остается меньше $\varepsilon$.*

Какъ и въ случаѣ вещественныхъ чиселъ мы будемъ обозначать предѣлъ знакомъ

$$a = lim\, x.$$

§ 32. Ограничиваясь во всемъ дальнѣйшемъ случаемъ, когда перемѣнная $x$ пробѣгаетъ перечислимую совокупность значеній, мы можемъ опредѣленіе предѣла въ случаѣ комплексныхъ чиселъ формулировать буквально такъ же, какъ это сдѣлано въ § 16:

*Число $a$ есть предѣлъ перемѣнной $x_n$, если всякому положительному числу $\varepsilon$ можно сопоставить нѣкоторое цѣлое положительное $n$ такое, что при произвольномъ цѣломъ числѣ $p$ имѣетъ мѣсто неравенство*

$$|x_{n+p} - a| < \varepsilon.$$

Здѣсь, конечно, знакомъ

$$|x_{n+p} - a|$$

выражается уже модуль комплекснаго числа $x_{n+p} - a$.

§ 33. Теорема. *Необходимое и достаточное условіе того, что число $a = \alpha + \beta i$ есть предѣлъ перемѣнной $x_n = \xi_n + i\eta_n$, состоитъ въ томъ, что вещественная часть $\alpha$ предѣла $a$ есть предѣлъ вещественной части $\xi_n$ перемѣнной $x_n$, а мнимая часть $\beta$ есть предѣлъ мнимой части $\eta_n$.*

Въ самомъ дѣлѣ,

$$x_n - a = (\xi_n - \alpha) + i(\eta_n - \beta),$$

$$|x_n - a| = +\sqrt{(\xi_n - \alpha)^2 + (\eta_n - \beta)^2},$$

отсюда неравенство

(1) $$|x_{n+p} - a| < \varepsilon$$

влечетъ за собою неравенства

$$|\xi_{n+p} - \alpha| < \varepsilon, |\eta_{n+p} - \beta| < \varepsilon,$$

откуда слѣдуетъ необходимость теоремы.

Съ другой стороны изъ очевиднаго неравенства

$$+\sqrt{(\xi_n - \alpha)^2 + (\eta_n - \beta)^2} \leqslant |\xi_n - a| + |\eta_n - \beta|$$

получаемъ

$$|x_{n+p}-a| \leqslant |\xi_{n+p}-\alpha| + |\eta_{n+p}-\beta|,$$

отсюда неравенства

$$|\xi_{n+p}-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\eta_{n+p}-\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

влекутъ, какъ слѣдствіе, неравенство (1), откуда слѣдуетъ достаточность теоремы.

§ 34. Основная теорема § 18 остается справедливою и для чиселъ комплексныхъ, а именно мы получаемъ теорему.

*Если всякому положительному числу $\varepsilon$ можно сопоставить такое цѣлое число $n$, что при произвольномъ цѣломъ положительномъ $p$ имѣетъ мѣсто неравенство*

(1) $$|x_{n+p}-x_n| < \varepsilon,$$

*то перемѣнная $x_n$ при возрастаніи $n$ стремится къ нѣкоторому предѣлу.*

Въ самомъ дѣлѣ

$$x_{n+p}-x_n = \xi_{n+p}-\xi_n + i(\eta_{n+p}-\eta_n);$$

неравенство (1) влечетъ за собою, какъ слѣдствіе, два слѣдующихъ

$$|\xi_{n+p}-\xi_n| < \varepsilon,$$
$$|\eta_{n+p}-\eta_n| < \varepsilon.$$

Отсюда мы видимъ на основаніи теоремы § 18, что обѣ вещественныя перемѣнныя $\xi_n$ и $\eta_n$ имѣютъ предѣлы, значитъ на основаніи предыдущаго §-а и вся комплексная перемѣнная $x_n$ имѣетъ предѣлъ.

Итакъ мы видимъ, что только что указанная теорема представляетъ основной принципъ теоріи предѣловъ; она даетъ условіе необходимое и достаточное для существованія предѣла заданной перемѣнной.

## Основанія теоріи рядовъ.

§ 35. Положимъ, что мы имѣемъ безконечный рядъ

(1) $$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$$

какихъ угодно чиселъ вещественныхъ или комплексныхъ и по этимъ числамъ составленъ второй рядъ чиселъ

$$s_1 = u_0,$$
$$s_2 = u_0 + u_1,$$

$$s_3 = u_0 + u_1 + u_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Если сумма $s_n$ приближается къ нѣкоторому предѣлу $s$ при безпредѣльномъ возрастаніи $n$, то будемъ, во первыхъ, рядъ (1) называть *сходящимся*, во вторыхъ, число $s$ будемъ называть *суммою* этого ряда и, въ третьихъ, будемъ писать

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{2}$$

Если же при безпредѣльномъ возрастаніи $n$ сумма $s_n$ не приближается ни къ какому предѣлу, то рядъ (1) будемъ называть *расходящимся* и не имѣющемъ суммы.

Равенство (2) мы будемъ иначе записывать символомъ

$$s = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n = \sum u_n.$$

§ 36. Основная теорема о предѣлахъ даетъ признакъ необходимый и достаточный для сужденія о сходимости ряда. Мы получаемъ

$$s_{n+p} - s_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}.$$

Отсюда получаемъ основной признакъ сходимости ряда.

*Рядъ будетъ сходиться, если всякому положительному числу* $\varepsilon$ *можно сопоставить столь большое цѣлое число $n$ что при произвольномъ цѣломъ $p$ будетъ имѣть мѣсто неравенство*

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots u_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

Но очевидно, что этотъ признакъ сопряженъ со значительными неудобствами въ приложеніи къ частнымъ случаямъ; поэтому различными математиками было предложено большое число болѣе простыхъ признаковъ сходимости. Всѣ эти признаки уступаютъ, однако, указанному основному принципу въ томъ отношеніи, что существуютъ ряды, для которыхъ эти признаки неприложимы.

Имѣя въ виду изложеніе лишь основныхъ положеній теоріи рядовъ, я ограничусь изложеніемъ весьма небольшого числа самыхъ важныхъ признаковъ сходимости. Подобнымъ же образомъ я буду пока исключительно разсматривать ряды съ постоянными членами и не буду пока касаться рядовъ, члены которыхъ заключаютъ перемѣнныя величины.

§ 37. Теорема. *Необходимымъ условіемъ сходимости ряда* $\sum u_n$ *является*

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Справедливость теоремы слѣдуетъ изъ основного признака предыдушаго §-а, если будемъ считать $p=1$.

§ 38. Начнемъ со случая рядовъ, всѣ члены которыхъ положительны.

Пусть заданъ рядъ

(1) $$a_0, a_1, a_2, \ldots \ldots a_n, \ldots \ldots,$$

члены котораго $a_0, a_1, a_2, \ldots$ всѣ положительны. Очевидно, что сумма

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots \ldots + a_{n-1}$$

$n$ первыхъ членовъ такого ряда съ возрастаніемъ значка $n$ возрастаетъ.

Теорема. *Если рядъ съ положительными членами расходится, то сумма $n$ первыхъ его членовъ при возрастаніи числа $n$ можетъ быть сдѣлана сколь угодно большою.*

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что сколь бы большое положительное число $N$ мы ни взяли, всегда можно указать столь большое цѣлое число $n$, чтобы было

(2) $$s_n > N.$$

Допустимъ обратное, а именно, что не для всякаго положительнаго числа $N$ существуетъ неравенство (2), т. е. предположимъ, что мы указали такое положительное число $N_1$, что ни при какомъ $n$ величина $s_n$ не превосходитъ числа $N_1$. Такимъ образомъ, мы имѣемъ нѣкоторую перемѣнную величину $s_n$, которая возрастаетъ, но остается меньше конечнаго числа $N_1$; но, на основаніи теоремы § 19, подобная перемѣнная должна имѣть предѣлъ $s$, значитъ, рядъ (1) будетъ сходящимся, что противорѣчитъ предположенію. Итакъ, перемѣнная $s_n$, возрастая, должна превзойти всякое положительное число, сколь большимъ бы оно ни было задано. Это обстоятельство мы будемъ записывать равенствомъ

$$s = +\infty.$$

§ 39. Въ § 37 мы видѣли, что необходимымъ признакомъ сходимости ряда является равенство

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Не трудно на простомъ примѣрѣ убѣдиться въ *недостаточности* этого признака для рядовъ съ положительными членами. Такой примѣръ даетъ такъ называемый гармоническій рядъ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Несмотря на то, что общій членъ $\frac{1}{n}$ при безпредѣльномъ увеличеніи $n$ стремится къ нулю, рядъ расходится. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ $n=2m$, тогда сумму $n$ первыхъ членовъ можно будетъ написать такъ

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right),$$

откуда получаемъ неравенство

$$s_n>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right),$$

или

$$s_n>1+\frac{m}{2}.$$

Такъ какъ число $m$ можетъ быть сколь угодно большимъ, то, слѣдовательно, возрастаетъ безпредѣльно $s_n$, и *рядъ гармоническій расходится*.

§ 40. Весьма важный случай сходящагося ряда представляетъ безконечно убывающая прогрессія

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots,$$

гдѣ $q<1$. По извѣстной формулѣ имѣемъ

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q},$$

и въ предѣлѣ

$$s=\lim_{n=\infty} s_n=\lim\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}.$$

Очевидно, что если $q > 1$, то геометрическая прогрессія будетъ рядомъ расходящимся.

§ 41. Изъ всего предыдущаго вытекаютъ слѣдующія очевидныя предложенія.

I. Если каждый членъ ряда

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

съ положительными членами менѣе соотвѣтствующаго ему члена другого такого же ряда

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots,$$

такъ что

$$a_n < b_n,$$

и если второй рядъ сходится, то и первый сходится.

II. Если будетъ постоянно

$$a_n > b_n,$$

а второй рядъ расходится, то и первый будетъ расходиться.

III. Какъ частный случай этихъ теоремъ, получается, что черезъ отбрасываніе изъ сходящагося ряда конечнаго или безконечнаго числа членовъ получается рядъ также сходящійся.

§ 42. Приведемъ еще одну весьма важную для приложеній теорему.

*Рядъ*

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \ldots$$

*сходится, если $к > 1$, и расходится, если $к \leqslant 1$.*

Въ самомъ дѣлѣ, можемъ написать нашъ рядъ такъ:

$$s = 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) + \left(\frac{1}{4^k} + \ldots + \frac{1}{7^k}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{8^k} + \ldots + \frac{1}{15^k}\right) + \ldots$$

Въ каждой изъ скобокъ первый членъ есть наибольшій, а число членовъ въ первой скобкѣ 2, а во второй 4, въ третьей 8 и т. д. Очевидно, получимъ

$$s < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^k} + 4 \cdot \frac{1}{4^k} + 8 \cdot \frac{1}{8^k} + \ldots$$

или иначе

$$s < 1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^3 + \ldots$$

Въ правой части нашего неравенства находится геометрическая прогрессія; такъ какъ по предположенію $k > 1$, то, слѣдовательно,

$$\frac{1}{2^{k-1}} < 1,$$

значитъ прогрессія имѣетъ конечную сумму, а, слѣдовательно, и заданный рядъ имѣетъ конечную сумму $s$.

Расходимость ряда въ случаѣ $k = 1$ нами была показана уже выше въ § 39. Остается разсмотрѣть случай $k < 1$; но тогда

$$\frac{1}{2^k} > \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^k} > \frac{1}{3},$$

$$\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n^k} > \frac{1}{n},$$

$$\ldots\ldots$$

и, слѣдовательно, на основаніи теоремы II § 41, рядъ будетъ подавно расходящимся.

§ 43. При выводѣ большинства признаковъ сходимости примѣняютъ теоремы § 41, т. е. сравниваютъ заданный рядъ

(1) $$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

съ другимъ рядомъ

(2) $$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

выбраннымъ такъ, чтобы его сходимость или расходимость была извѣстна. Самые простые признаки получаются при сравненіи даннаго ряда съ геометрической прогрессіей.

Положимъ, что для всѣхъ значковъ, начиная съ $n = m$, до безконечности будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha < 1,$$

т. е. что отношеніе всякаго послѣдующаго члена къ его предыдущему остается меньше нѣкотораго положительнаго числа $\alpha < 1$, тогда рядъ (1) будетъ сходящимся.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} < \alpha, \text{ слѣдовательно, } a_{m+1} < a_m \cdot \alpha,$$

$$\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} < \alpha, \quad \text{"} \quad a_{m+2} < a_{m+1} \cdot \alpha < a_m \cdot \alpha^2,$$

$$\frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} < \alpha, \quad \text{"} \quad a_{m+3} < a_{m+2} \cdot \alpha < a_m \cdot \alpha^3,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Примѣняя основную теорему о предѣлахъ, замѣчаемъ, что при $n > m$ мы имѣемъ

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} + \cdot \cdot + a_{n+p-1} &< a_n (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdot \cdot + \alpha^{p-1}) \\ &< a_n (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdot \cdot + \alpha^{p-1} + \cdot \cdot \cdot) \\ &< a_n \cdot \frac{1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Но, такъ какъ

$$a_n < a_m \alpha^{n-m},$$

то

$$a_n + a_{n-1} + \cdot \cdot \cdot \cdot + a_{n+p-1} < a_m \frac{\alpha^{n-m}}{1-\alpha}; \tag{3}$$

но предположенію $\alpha < 1$, слѣдовательно правая часть при возрастаніи $n$ дѣлается сколь угодно малою независимо отъ числа $p$, а потому, на основаніи § 36, рядъ (1) сходится. Такимъ образомъ мы приходимъ къ теоремѣ.

Теорема d'Alambert'a. *Если въ рядѣ съ положительными членами*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + a_n + a_{n+1} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

*начиная съ нѣкотораго значка $n = m$ и для всѣхъ за нимъ слѣдующихъ членовъ отношеніе всякаго члена къ предшествующему ему*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

*меньше нѣкотораго числа $\alpha < 1$, то рядъ сходящійся.*

Не трудно видѣть, что если отношеніе

$$\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

начиная съ нѣкотораго $n$, остается больше 1, то рядъ расходящійся, ибо тогда

$$a_{n+1} > a_n,$$

и общій членъ ряда не стремится къ нулю.

§ 44. Чтобы пользоваться приведеннымъ въ предыдущемъ §-ѣ признакомъ, поступаютъ на практикѣ обыкновенно такъ. Ищутъ предѣлъ отношенія

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

при $n = \infty$. Если этотъ предѣлъ, который мы обозначимъ черезъ $\lambda$, окажется *неравнымъ* 1, то рядъ *сходится*, когда $\lambda < 1$, и *расходится*, когда $\lambda > 1$. Дѣйствительно, если $\lambda \neq 1$, то можно взять за $\alpha$ произвольное число между $\lambda$ и 1, тогда отношеніе

$$\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

стремясь къ предѣлу $\lambda$, при $\lambda < 1$ сдѣлается, начиная съ нѣкотораго значка $n = m$, числомъ, меньшимъ $\alpha$, и рядъ будетъ, на основаніи предыдущаго §-а, сходиться. Если же $\lambda > 1$, то отношеніе

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

сдѣлается и останется больше 1, и рядъ будетъ расходиться.

§ 45. При такомъ примѣненіи признака, когда разсматривается предѣлъ $\lambda$ отношенія

$$\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

въ случаѣ $\lambda = 1$ можетъ остаться сомнѣніе, ибо въ этомъ случаѣ между 1 и $\lambda$ нельзя поставить никакого числа $\alpha$, отличнаго отъ 1, и разсужденіе предыдущаго §-а не имѣетъ мѣста.

Въ подобномъ сомнительномъ случаѣ рядъ можетъ быть какъ сходящимся, такъ и расходящимся. Такъ напримѣръ для гармоническаго ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \ldots\ldots$$

имѣемъ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

При $n$ безконечно большомъ это отношеніе, хотя и меньше 1, но безконечно близко къ 1, и по предыдущей теоремѣ мы не можемъ судить о сходимости или расходимости этого ряда; мы видѣли изъ другихъ соображеній, что рядъ *расходится.*

Для ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\ldots$$

отношеніе

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

также имѣетъ своимъ предѣломъ 1, между тѣмъ мы видѣли, что этотъ рядъ *сходится.*

Весьма важно замѣтить, что, *если* $\lambda=1$, *и отношеніе членовъ приближается къ 1, оставаясь больше 1, то рядъ будетъ расходящимся.*

§ 46. *Примѣръ I.* Разсмотримъ рядъ

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{x_n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

гдѣ $x$ произвольное положительное число. Примѣняя выведенный признакъ сходимости, получаемъ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{n+1};$$

при $n=\infty$ получаемъ

$$lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=0.$$

Такъ какъ нуль есть число меньшее единицы, то мы замѣчаемъ, что заданный рядъ *сходящійся.*

*Примѣръ II.* Разсмотримъ рядъ

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\ldots$$

Для этого ряда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}x,$$

отсюда

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x.$$

Итакъ, мы видимъ, что нашъ рядъ сходится для $x < 1$ и расходится для $x \geqslant 1$.

§ 47. Сравненіе даннаго ряда съ геометрической прогрессіей можно производить еще иначе, причемъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема Cauchy. *Рядъ изъ положительныхъ членовъ*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

*сходится, если корень n-ой степени изъ члена $a_n$, т. е. величина*

$$\sqrt[n]{a_n},$$

*начиная съ нѣкотораго значенія n остается меньше постояннаго числа α, меньшаго единицы, и расходится, если указанный радикалъ, начиная съ нѣкотораго значенія n, остается больше единицы.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, начиная съ нѣкотораго $n = m$, будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} < \alpha < 1,$$

тогда

$$a_n < \alpha^n < 1,$$

и члены заданнаго ряда меньше соотвѣтственныхъ членовъ убывающей геометрической прогрессіи; но такая прогрессія есть рядъ сходящійся, слѣдовательно, сходится и заданный рядъ.

Обратно, если, начиная съ нѣкотораго мѣста,

$$\sqrt[n]{a_n} > 1,$$

то

$$a_n > 1,$$

и, слѣдовательно, мы получаемъ противорѣчіе съ необходимымъ условіемъ

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

значитъ, заданный рядъ расходится.

§ 48. Мы разсматривали ряды съ положительными членами. Относительно этихъ рядовъ существуетъ слѣдующее основное предложеніе. *Сумма ряда съ положительными членами не зависитъ отъ порядка членовъ,* такъ что сумма такого ряда, будучи суммой безконечнаго числа слагаемыхъ, обладаетъ тѣмъ не менѣе перестановочнымъ закономъ конечной суммы.

Переходя къ рядамъ, члены которыхъ могутъ быть разныхъ знаковъ, мы встрѣчаемся въ первый разъ въ анализѣ съ фактомъ, о которомъ было выше упомянуто, а именно, что сумма ряда можетъ зависѣть отъ порядка слагаемыхъ. Отсылая для болѣе подробнаго знакомства къ моей книгѣ „Введеніе въ анализъ", мы пояснимъ сказанное обстоятельство на одномъ частномъ примѣрѣ.

Возьмемъ рядъ

$$(1) \qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots$$

Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы увидимъ, что этотъ рядъ имѣетъ суммой $lg2$, гдѣ логариѳмъ взятъ при основаніи $e$.

Покажемъ, что если мы переставимъ члены такимъ образомъ:

$$(2) \qquad 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots$$

т. е. такъ, что за каждыми двумя послѣдовательными положительными членами слѣдуетъ одинъ отрицательный, то получится для ряда другая сумма $s$. Въ самомъ дѣлѣ, ряды (1) и (2) можно будетъ записать знаками

$$lg\,2=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right),$$

$$s=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right);$$

отсюда

$$s=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=lg\,2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=lg\,2+\frac{1}{2}\,lg\,2=\frac{3}{2}\,lg\,2.$$

Итакъ, сумма $s$ второго ряда (2) не равна суммѣ $lg\,2$ перваго ряда (1).

§ 49. Указанное обстоятельство дѣлаетъ необходимымъ разбить сходящіеся ряды на двѣ категоріи. Одни, въ которыхъ сумма не зависитъ отъ порядка членовъ, называются *абсолютно сходящимися*. Другіе сходящіеся ряды, въ которыхъ сумма можетъ зависѣть отъ порядка членовъ, носятъ названіе *условно сходящихся*. Сходящіеся ряды съ положительными членами принадлежатъ всѣ къ абсолютно сходящимся.

Абсолютно сходящіеся ряды обладаютъ всѣми свойствами конечныхъ многочленовъ, т. е. въ нихъ можно, какъ угодно, члены переставлять, а также складывать и перемножать эти ряды по правиламъ сложенія и умноженія многочленовъ.

Для условно сходящихся рядовъ знаки

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n\,,\ \sum u_n$$

суть символы, имѣющіе значеніе только для обозначеннаго порядка слѣдованія членовъ одного за другимъ. Другими словами, если мы измѣнимъ порядокъ расположенія членовъ въ условно сходящемся рядѣ, то мы пишемъ другой символъ, пишемъ, такъ сказать, другой рядъ.

§ 50. Существуетъ простой необходимый и достаточный признакъ абсолютной сходимости ряда съ разными знаками, этотъ признакъ можно формулировать въ видѣ такой теоремы.

Теорема. *Для существованія абсолютной сходимости ряда*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

*съ разными знаками членовъ необходимо и достаточно, чтобы рядъ абсолютныхъ величинъ*

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$$

*былъ сходящимся.*

Рядъ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

который, какъ мы видѣли, есть рядъ условно сходящійся, оказывается условно сходящимся въ силу того обстоятельства, что рядъ абсолютныхъ величинъ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

расходится.

§ 51. Соображенія, приведенныя относительно условно сходящихся рядовъ, относятся къ рядамъ съ комплексными членами, причемъ получается общее предложеніе, что *рядъ*

$$u_0+u_1+u_2+\cdots\cdot$$

*съ комплексными членами будетъ абсолютно сходящимся, т. е. имѣетъ сумму, не зависящую отъ порядка членовъ, только при условіи, что рядъ модулей*

$$|u_0|+|u_1|+|u_2|+\cdots\cdot$$

*сходится.*

§ 52. Разсмотримъ теперь правила сложенія и умноженія двухъ рядовъ.

Что касается алгебраическаго сложенія двухъ сходящихся рядовъ

$$\sum u_n = s\,,\ \sum v_n = t\,,$$

то, очевидно, получается формула

$$\sum (u_n \pm v_n) = s \pm t\,.$$

Эта формула остается справедливой, будутъ ли ряды абсолютно или условно сходящимися.

Гораздо сложнѣе обстоитъ дѣло съ перемноженіемъ рядовъ. Приступая къ разсмотрѣнію вопроса объ умноженіи рядовъ, мы, естественно, наталкиваемся на мысль, нельзя ли перемножать ряды, какъ конечныя суммы, т. е. не будетъ ли произведеніе рядовъ

$$\sum u_n \text{ и } \sum v_n$$

получаться въ видѣ двойного ряда

$$\sum_m \sum_n u_m v_n\,,$$

общій членъ котораго получается отъ умноженія общаго члена перваго ряда на общій членъ второго ряда. Оказывается, дѣйствительно, что въ случаѣ, когда оба перемножаемыхъ ряда абсолютно сходящіеся, то ихъ произведеніе представляется такимъ двойнымъ рядомъ, который тоже абсолютно сходится, т. е. имѣетъ сумму, не зависящую отъ закона суммированія.

Теорема Cauchy. *Если перемножаются два абсолютно сходящихся ряда*

$$\sum u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots$$
$$\sum v_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots ,$$

*то имѣетъ мѣсто формула*

$$(1) \qquad \left(\sum u_n\right)\left(\sum v_n\right) = \sum w_n ,$$

*гдѣ*

$$w_0 = u_0 v_0 ,$$
$$w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0 ,$$
$$w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0 ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Mertens показалъ, что формула (1) остается справедливой, когда одинъ изъ перемножаемыхъ рядовъ перестаетъ быть абсолютно сходящимся, т. е., другими словами, дѣлается условно сходящимся *).

Если оба перемножаемыхъ ряда условно сходятся, то теорема о перемноженіи рядовъ можетъ перестать быть справедливой, въ чемъ легко убѣдиться на простыхъ примѣрахъ.

*О кратныхъ рядахъ.*

§ 53. На теоремѣ Cauchy объ умноженіи рядовъ мы видѣли примѣръ такъ называемаго *двойного ряда*. Подъ двойнымъ рядомъ мы будемъ разумѣть символомъ

$$\sum_m \sum_n u_{m,n} ,$$

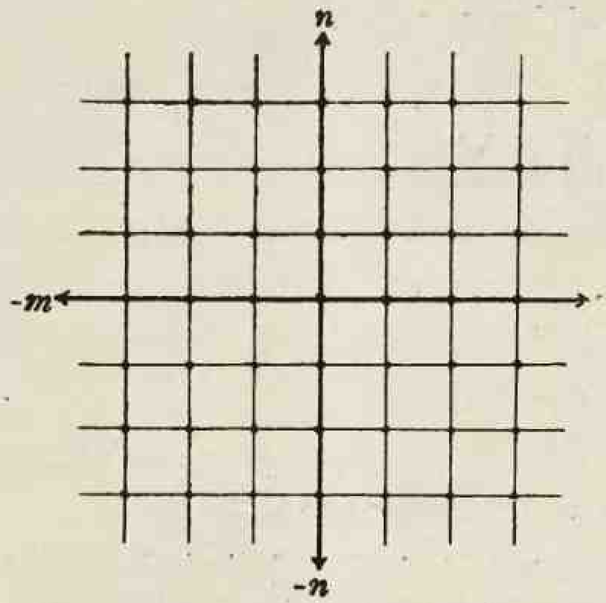
гдѣ общій членъ этого ряда

$$u_{m,n}$$

имѣетъ два значка, причемъ оба эти значка могутъ мѣняться, принимая цѣлыя значенія. Разсмотримъ самый общій случай, когда оба суммированія, по значку $m$ и по значку $n$, распространяются на всѣ, какъ положительныя, такъ и отрицательныя цѣлыя значенія этихъ значковъ.

*) Введеніе въ анализъ. Гл. III § 32.

Для нагляднаго представленія такихъ двойныхъ рядовъ придется членами этихъ рядовъ заполнить цѣлую плоскость, расположивъ ихъ въ безчисленномъ множествѣ строкъ и колоннъ. Можно поступить такъ: разсматривать числа $m$ и $n$, значки члена, какъ прямоугольныя координаты на плоскости, тогда каждый парѣ цѣлыхъ значеній этихъ координатъ будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая точка плоскости. Получимъ безчисленное множество точекъ, расположенныхъ въ вершинахъ сѣти квадратовъ, стороны которыхъ равны единицѣ.



Черт. 54.

Если мы противъ каждой точки такой сѣти напишемъ соотвѣтствующій членъ $u_{m,n}$ ряда, то заполнимъ членами ряда всю плоскость.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & u_{-2,2} & u_{-1,2} & u_{0,2} & u_{1,2} & u_{2,2} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & u_{-2,1} & u_{-1,1} & u_{0,1} & u_{1,1} & u_{2,1} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & u_{-2,0} & u_{-1,0} & u_{0,0} & u_{1,0} & u_{2,0} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & u_{-2,-1} & u_{-1,-1} & u_{0,-1} & u_{1,-1} & u_{2,-1} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & u_{-2,-2} & u_{-1,-2} & u_{0,-2} & u_{1,-2} & u_{2,-2} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Далѣе можно разсматривать тройные ряды

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} u_{m,n,p} .$$

Такіе ряды заполняютъ цѣлое трехмѣрное пространство. Обобщая далѣе, можно притти къ $k$ кратному ряду, значекъ общаго члена котораго состоитъ изъ $k$ цѣлыхъ чиселъ.

### *О безконечныхъ произведеніяхъ.*

§ 54. По аналогіи съ безконечными рядами, сумма которыхъ получается отъ безконечнаго числа прибавленій членовъ одного за другимъ, разсматриваютъ безконечныя произведенія вида

$$(1+u_0)(1+u_1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(1+u_n)\,.\,.\,.\,.\,,$$

состоящія изъ безконечнаго числа множителей вида

$$1+u_n\,,$$

гдѣ $u_n$ какое угодно вещественное или мнимое число.

Разсмотримъ произведеніе $n$ первыхъ множителей безконечнаго произведенія и обозначимъ это произведеніе $P_n$, такъ что будетъ

$$P_n=(1+u_0)(1+u_1)\,.\,.\,.\,(1+u_{n-1})=\prod_{k=0}^{k=n-1}(1+u_k).$$

Если число $P_n$ стремится съ возрастаніемъ значка $n$ къ предѣлу $P$, отличному отъ *нуля* и *безконечности*, то, во первыхъ, произведеніе будемъ называть *сходящимся*, во вторыхъ, число $P$ будемъ называть его *величиною* и, въ третьихъ, будемъ писать

$$P=(1+u_0)(1+u_1)\,.\,.\,.\,(1+u_n)\,.\,.\,.\,.=\prod(1+u_n).$$

Подобно рядамъ безконечныя произведенія раздѣляются на *абсолютно сходящіяся*, т. е. такія, величина которыхъ не мѣняется отъ порядка множителей, и *условно сходящіяся*, т. е. имѣющія данную величину лишь при извѣстномъ опредѣленномъ слѣдованіи множителей однихъ за другими.

§ 55. Оказывается, что вопросъ о сходимости произведенія

$$\prod(1+u_n) \tag{1}$$

тѣсно связанъ со сходимостью ряда

$$\sum u_n, \tag{2}$$

причемъ существуетъ теорема, что *для абсолютной сходимости произведенія (1) необходима и достаточна абсолютная сходимость ряда (2).*

## Основы дифференціальнаго исчисленія.

### *О функціяхъ.*

§ 56. Будемъ разсматривать двѣ перемѣнныя величины $x$ и $y$. Если частныя значенія этихъ перемѣнныхъ величинъ такимъ образомъ связаны между собою, что всякому произвольно выбранному частному значенію перемѣнной $x$ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное частное значеніе другой величины $y$, то говорятъ, что между перемѣнными существуетъ зависимость. Перемѣнная $x$, частныя значенія которой берутся произвольно, носитъ названіе *перемѣнной независимой*, а другая перемѣнная $y$ называется зависимой перемѣнной или *функціей*. При этомъ говорятъ, что перемѣнная $y$ есть функція отъ независимой перемѣнной $x$, или проще, *$y$ есть функція отъ $x$.* Это обстоятельство записывается формулой

$$y = f(x),$$

которая выговаривается такъ: $y$ равняется функціи $f$ отъ $x$.

§ 57. Иногда въ одномъ и томъ же вопросѣ приходится разсматривать нѣсколько различныхъ функцій отъ одной и той же независимой перемѣнной. Тогда для различныхъ функцій употребляются различные знаки, напримѣръ

$$f(x),\ F(x),\ \varphi(x),\ f_1(x),\ f_2(x) \ldots$$

§ 58. Вообще, всякое выраженіе, всякая формула, въ составъ которой входитъ перемѣнная величина, есть функція отъ этой перемѣнной, такъ напримѣръ

$$\sqrt{x}\ ,\ 2^x\ ,\ \sin x\ ,\ \frac{1 - \lg x}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$$

суть функціи отъ перемѣнной $x$.

Въ началѣ понятіе о функціи отождествлялось съ понятіемъ о формулѣ. Считалось, что всякой функціи должна соотвѣтствовать нѣкоторая формула, которая давала бы правила для вычисленія по частному значенію перемѣнной независимой соотвѣтствѣннаго частнаго значенія функціи. При дальнѣйшемъ развитіи науки пришлось установить болѣе общее понятіе о функціональной зависимости двухъ перемѣнныхъ, причемъ, согласно вышеприведенному общему опредѣленію функціи, функція считается заданной всякій разъ, когда указаны точныя правила нахожденія по частному значенію перемѣнной независимой частнаго значенія функціи совершенно независимо отъ того, укладываются-ли эти правила въ рамки какой нибудь опредѣленной формулы, или нѣтъ.

Функція можетъ быть задана сразу нѣсколькими формулами, причемъ по одной формулѣ она вычисляется для однихъ частныхъ значеній перемѣнной независимой, по другой формулѣ для другихъ. Наконецъ, правило вычисленія функціи можетъ быть указано независимо отъ какихъ бы то ни было формулъ, такъ, напримѣръ, мы получаемъ опредѣленную функцію, если скажемъ, что $y = 0$ для всѣхъ раціональныхъ значеній перемѣнной независимой и $y = 1$ для всѣхъ ирраціональныхъ значеній.

§ 59. Понятіе о функціи отъ одной перемѣнной независимой можетъ быть обобщено слѣдующимъ образомъ. Пусть перемѣнныя величины

$$x, y, z, \ldots u, v$$

таковы, что кромѣ $v$ всѣмъ остальнымъ перемѣннымъ

$$x, y, z, \ldots u$$

можно давать произвольныя значенія, перемѣнная же $v$ получаетъ опредѣленное значеніе всякій разъ, какъ остальныя $x, y, z \ldots u$ получаютъ нѣкоторыя частныя значенія. Въ этомъ случаѣ $v$ называется функціей отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots u$, а эти послѣднія носятъ названіе независимыхъ перемѣнныхъ. Это обстоятельство записывается такъ:

$$v = f(x, y, z, \ldots u).$$

Такъ же, какъ и въ случаѣ одной перемѣнной независимой, получаются простѣйшія функціи отъ многихъ перемѣнныхъ независимыхъ при помощи формулъ алгебры и тригонометріи; напримѣръ

$$v = \sin(x+y), v = \frac{1 - lgx^2}{\sqrt{y^2+z^2}}, \ldots$$

Первая функція есть функція отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ, а вторая отъ трехъ.

§ 60. Начнемъ съ разсмотрѣнія функцій, опредѣляемыхъ формулами элементарной математики.

*Опредѣленіе.* Если для полученія функціи надъ независимымъ перемѣннымъ надо произвести въ конечномъ числѣ дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія и, какъ частный случай умноженія, возвышенія въ цѣлую положительную степень, но не дѣленія, то такая функція называется *цѣлой*.

Общій видъ цѣлой функціи отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots u$ можетъ быть представленъ въ видѣ суммы

$$\sum A x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots u^\tau,$$

гдѣ сумма распространяется на конечное число членовъ вида

$$A x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots u^\tau,$$

Здѣсь $A$ есть какой нибудь постоянный коэффиціентъ, а показатели $\lambda, \mu, \nu \ldots \tau$ какія нибудь цѣлыя положительныя числа или нули.

Напримѣръ

$$(1) \qquad \sqrt[3]{3}\; xy^2 - lg\, 9 . xz + \frac{2}{3} z^5 - sin\, 5$$

есть цѣлая функція отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, z$. Слѣдуетъ замѣтить, что дѣйствія, производимыя въ численныхъ коэффиціентахъ, могутъ быть какія угодно: такъ въ нашемъ примѣрѣ дѣйствія извлеченія корня, дѣленія, логариѳмированія и т. д., совершенныя въ коэффиціентахъ, нисколько не препятствуютъ тому, чтобы функція была цѣлая, ибо при опредѣленіи цѣлой функціи дѣло идетъ только о дѣйствіяхъ надъ независимыми перемѣнными.

Сумма показателей

$$\lambda + u + \nu + \; . \; . \; . \; . + \tau$$

независимыхъ перемѣнныхъ въ каждомъ членѣ называется *степенью* этого члена; такъ напримѣръ въ цѣлой функціи (1) первый членъ третьей степени, второй членъ второй степени, третій пятой и четвертый нулевой. Наибольшая изъ степеней отдѣльныхъ членовъ называется *степенью цѣлой функціи*. Цѣлая функція (1), очевидно, пятой степени.

§ 61. Если мы приравняемъ нулю нѣкоторую цѣлую функцію, то получимъ такъ называемое *алгебраическое уравненіе*. Въ § 28 гл. I мы дали уже это опредѣленіе для случая одной перемѣнной независимой. Въ самомъ общемъ случаѣ алгебраическимъ уравненіемъ будетъ называться уравненіе вида

$$U = 0,$$

гдѣ $U$ есть цѣлая функція отъ перемѣнныхъ $x, y, z, \; . \; . \; . \; u, v$.

§ 62. Если выраженіе функціи задано прямо черезъ независимыя перемѣнныя, то такая функція называется *явной*. Если же для полученія выраженія функціи черезъ независимыя перемѣнныя нужно рѣшить одно или нѣсколько уравненій, то въ такомъ случаѣ функція называется *неявной*. Такъ, напримѣръ, если функція $v$ отъ двухъ перемѣнныхъ $x$ и $y$ задана уравненіемъ

$$v^2 - 2xv - y^2 = 0,$$

то $v$ будетъ, очевидно, неявной функціей. Эту неявную функцію мы обратимъ въ явную, если рѣшимъ уравненіе относительно $v$. Получаемъ

$$v = x \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

§ 63. Если функція можетъ удовлетворять алгебраическому уравненію, связывающему ее съ перемѣнными независимыми, то она называется *алгебраической функціей.* Въ обратномъ случаѣ она называется *трансцендентною*, т. е. другими словами, функція называется трансцендентною, если нельзя подобрать никакого алгебраическаго уравненія, которому эта функція удовлетворяетъ. Такъ функція

$$v = x + \sqrt{x^2 + y^2}$$

есть функція алгебраическая, ибо она удовлетворяетъ алгебраическому уравненію

$$v^2 - 2xv - y^2 = 0 .$$

Функція

$$v = lg\, x$$

есть функція трансцендентная, ибо не трудно показать, что она не можетъ удовлетворять никакому алгебраическому уравненію между $x$ и $v$.

Въ нѣкоторыхъ устарѣлыхъ книгахъ по анализу можно видѣть такое опредѣленіе функцій алгебраической и трансцендентной, что алгебраическая функція есть такая, которая выражается при помощи конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій надъ перемѣнными независимыми, а трансцендентная—такая, которая не выражается при помощи конечнаго числа дѣйствій. Не говоря уже о томъ, что такое опредѣленіе совершенно не соотвѣтствуетъ тому, что въ настоящее время всѣ математики разумѣютъ подъ алгебраической функціей, т. е., повторимъ, функціей, представляющей корень алгебраическаго уравненія, простой примѣръ безконечно убывающей геометрической прогрессіи покажетъ неудовлетворительность приведеннаго опредѣленія, ибо одна и та же функція

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ \ldots ,$$

если заключать по лѣвой части равенства, будетъ алгебраической, если судить по правой части, трансцендентной.

§ 64. Алгебраическія функціи подраздѣляются на *раціональныя* и *ирраціональныя. Раціональной* называется такая алгебраическая функція, которая удовлетворяетъ алгебраическому уравненію первой степени. Если же уравненіе самой низкой степени, которому удовлетворяетъ алгебраическая функція, степени выше первой, то функцію называютъ *ирраціональной.*

Согласно этому опредѣленію всякая раціональная функція $v$ должна удовлетворять уравненію вида

$$Qv - P = 0,$$

гдѣ $Q$ и $P$ цѣлыя функціи независимыхъ перемѣнныхъ. Можно всегда предполагать, что $P$ и $Q$ суть многочлены, не имѣющіе общихъ дѣлителей, ибо, если бы такой дѣлитель существовалъ, то мы предварительно сократили бы на него все уравненіе. Рѣшая послѣднее уравненіе относительно $v$, получимъ

$$v = \frac{P}{Q}.$$

Это показываетъ, что раціональная функція есть частное двухъ цѣлыхъ функцій. Въ частномъ случаѣ, если $Q$ не будетъ содержать независимыхъ перемѣнныхъ, то это $Q$ будетъ нѣкоторое постоянное число $A$, тогда

$$v = \frac{1}{A} P,$$

т. е. $v$ представляетъ собою цѣлую функцію, и мы видимъ, что цѣлая функція есть частный случай функціи раціональной.

Если уравненіе, которому удовлетворяетъ ирраціональная функція будетъ второй, третьей или четвертой степени, то мы можемъ его рѣшить и найти явное выраженіе этой функціи черезъ перемѣнныя независимыя. Когда уравненіе выше четвертой степени, то, на основаніи сказаннаго въ § 32 гл. I, задача приведенія неявной функціи въ явную дѣлается въ общемъ случаѣ невозможною. Эта невозможность, однако, не помѣшала прогрессу теоріи алгебраическихъ функцій, пришлось только судить о свойствахъ алгебраической функціи по тому алгебраическому уравненію, которому она удовлетворяетъ, совершенно независимо отъ того, умѣемъ ли мы рѣшать это уравненіе или нѣтъ. Фактъ состоитъ въ томъ, что современная теорія алгебраическихъ функцій есть одна изъ самыхъ разработанныхъ теорій современной математики и составляетъ одну изъ главныхъ частей такъ называемаго *алгебраическаго анализа*, о которомъ было уже упомянуто въ I главѣ.

§ 65. Переходя къ разсмотрѣнію функцій трансцендентныхъ, мы остановимся сначала на тѣхъ трансцендентныхъ функціяхъ, съ которыми намъ приходится имѣть дѣло уже въ элементарной математикѣ. Мы разсмотримъ четыре вида такихъ функцій, а именно функціи показательную, логариѳмическую, тригонометрическія и круговыя.

Подъ *показательной* функціей разумѣется функція вида

$$A^x,$$

гдѣ $x$ перемѣнная независимая, а $A$ постоянное число, называемое *основаніемъ* показательной функціи. Показательныя функціи разсматриваются обыкновенно только при положительныхъ основаніяхъ, ибо при отрицательномъ основаніи $A$ для всѣхъ значеній показателя

$$x = \frac{m}{n},$$

гдѣ $m$ число нечетное, а $n$ четное, получались бы мнимыя значенія функціи.

§ 66. Обратная функція относительно функціи показательной *логариѳмическая* функція, т. е. логариѳмъ перемѣннаго независимаго, взятый при нѣкоторомъ положительномъ основаніи. Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ знакомъ

$$Lg_A\, x$$

обозначать логариѳмъ отъ $x$, взятый при основаніи $A$. Ввиду того, что, какъ мы увидимъ при изложеніи началъ дифференціальнаго исчисленія, неперовскіе логариѳмы, взятые при основаніи $e$, обладаютъ болѣе простыми свойствами, почему и носятъ названіе *натуральныхъ*, мы для этихъ логариѳмовъ будемъ употреблять болѣе простой знакъ

$$lg\, x,$$

такъ какъ эти логариѳмы будутъ чаще встрѣчаться.

Изъ элементарной алгебры извѣстно, что переходъ отъ логариѳмовъ при одномъ основаніи къ логариѳмамъ при другомъ основаніи совершается простымъ умноженіемъ всѣхъ логариѳмовъ первой системы на одно общее число, называемое модулемъ преобразованія логариѳмической системы. Пусть логариѳмъ числа $x$ при натуральномъ основаніи есть $y$, а при основаніи $A$ есть $z$, такъ что

$$y = lg\, x$$

а

$$z = Lg_A\, x.$$

Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, получимъ

$$x = e^y \text{ и } x = A^z,$$

откуда

$$e^y = A^z.$$

Возьмемъ натуральные логариѳмы отъ обѣихъ частей полученнаго равенства, тогда будемъ имѣть

$$y \, lg \, e = z \, lg \, A;$$

но

$$lg \, e = 1,$$

слѣдовательно

$$z = \frac{y . 1}{lg \, A},$$

откуда окончательно

(1) $$Lg_A \, x = lg \, x . M,$$

гдѣ

(2) $$M = \frac{1}{lg \, A}.$$

По формулѣ (2) вычисляется модуль $M$, служащій для перехода отъ неперовскихъ логариѳмовъ къ логариѳмамъ при произвольномъ основаніи $A$. Модуль обыкновенной системы логариѳмовъ при $A = 10$ оказывается равнымъ

$$M = \frac{1}{lg \, 10} — = 0,4342944819032518276511289 \; . \; . \; .$$

Чтобы перейти отъ десятичныхъ логариѳмовъ къ натуральнымъ, необходимо десятичный логариѳмъ раздѣлить на модуль $M$. Въ таблицахъ логариѳмовъ обыкновенно помѣщаются вспомогательныя таблицы для упрощенія этого дѣленія, т. е. таблицы для приближеннаго умноженія на величину $\frac{1}{M}$.

§ 67. Тригонометрія даетъ намъ рядъ функцій, тѣсно связанныхъ другъ съ другомъ и выражающихся формулами

$$sin \, x, \; cos \, x, \; tg \, x, \; cotg \, x, \; sec \, x, \; coses \, x.$$

Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать длину дуги выраженной не въ градусахъ, а въ доляхъ радіуса. Центральному углу $57^0 \; 17' \; 44{,}8''$ . . . . соотвѣтствуетъ дуга, равная радіусу, и, если радіусъ равенъ единицѣ, то и дуга равна единицѣ и принимается за единицу дугъ; соотвѣтственный уголъ принимается за единицу угловъ. Легко выразить въ доляхъ радіуса уголъ, выраженный въ секундахъ.

§ 68. Такъ называемыя *круговыя* функціи представляютъ собою функціи, обратныя тригонометрическимъ функціямъ предыдущаго §-а. Такъ функція, обратная функціи $sin \, x$, будетъ $arc \, sin \, x$, т. е. дуга, синусъ которой есть $x$. Получаемъ слѣдующій рядъ круговыхъ функцій:

$$arc\,sin\,x,\ arc\,cos\,x,\ arc\,tg\,x,\ arc\,cotg\,x,\ arc\,sec\,x,\ arc\,cosec\,x.$$

Эти функціи относятся къ такъ называемымъ *многозначнымъ* функціямъ, т. е. имѣютъ безчисленное множество значеній при одномъ и томъ же значеніи независимаго перемѣннаго. Такъ, напримѣръ, $x = sin y$ при всѣхъ значеніяхъ $y$ вида $y + 2k\pi$ и $(2k+1)\pi - y$, гдѣ $k$ какое угодно цѣлое число или нуль; слѣдовательно, въ круговой функціи $y = arc\,sin\,x$ опредѣленному значенію независимой перемѣнной соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній функціи. Къ такому же выводу мы придемъ, разсматривая остальныя круговыя функціи: всѣ онѣ многозначны.

Чтобы избѣжать неопредѣленности, мы условимся разумѣть въ дальнѣйшемъ, если не будемъ указывать каждый разъ особо, подъ $arc\,sin\,x$ и $arc\,tq\,x$ дугу, заключающуюся въ предѣлахъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, и подъ $arc\,cos\,x$ и $arc\,cotg\,x$ дугу, заключающуюся въ предѣлахъ отъ 0 до $\pi$.

Что касается остальныхъ круговыхъ функцій $arc\,sec\,x$ и $arc\,cosec\,x$, то разсмотрѣніе ихъ сводится къ разсмотрѣнію $arc\,cos\,\frac{1}{x}$ и $arc\,sin\,\frac{1}{x}$.

*Величины безконечно малыя и безконечно большія.*

§ 69. Въ основѣ дифференціальнаго исчисленія лежитъ понятіе о такъ называемой безконечно малой величинѣ. Поэтому это исчисленіе, а также неразрывно связанное съ нимъ интегральное исчисленіе получаютъ названіе *анализа безконечно малыхъ*.

Понятіе о безконечно малой величинѣ вводится условно при помощи такого опредѣленія.

*Безконечно малой величиной называется перемѣнная величина, имѣющая предѣломъ нуль.*

Такимъ образомъ мы видимъ, что если величина $x$ есть безконечно малая, то это обстоятельство можетъ быть записано знакомъ

$$lim\,x = 0.$$

§ 70. Неразрывно съ понятіемъ о величинахъ безконечно малыхъ связано понятіе о перемѣнной *безконечно большой*. Подъ безконечно большой величиной мы разумѣемъ такую перемѣнную величину, которая по условіямъ задачи можетъ принимать сколь угодно большія по абсолютной величинѣ значенія. Очевидно, что если $x$ есть безконечно малая величина, то величина

$$y=\frac{1}{x}$$

будетъ безконечно большой. То обстоятельство, что величина $y$ есть безконечно большая записываютъ иногда знакомъ

$$\lim y=\infty.$$

§ 71. Постоянная величина, не равная нулю, а также и перемѣнная, стремящаяся къ предѣлу, отличному отъ нуля и безконечности, называются величинами *конечными*.

Разсмотрѣніе величинъ перемѣнныхъ какъ конечныхъ, такъ и безконечно большихъ можетъ быть сведено къ разсмотрѣнію безконечно малыхъ.

Пусть разсматривается конечная. перемѣнная $x$, для которой

$$\lim x=a.$$

Тогда, если мы положимъ

$$y=a-x,$$

то $y$ будетъ уже безконечно малой величиной, ибо

$$\lim y=a-\lim x=a-a=0.$$

Точно такъ же, если въ нѣкоторую формулу входитъ буква $x$, обозначающая безконечно большую величину, то, полагая

$$y=\frac{1}{x},$$

откуда

$$x=\frac{1}{y},$$

мы внесемъ въ данную формулу вмѣсто $x$ новую перемѣнную $y$, которая будетъ, какъ легко видѣть, безконечно малой, ибо

$$\lim y=\frac{1}{\lim x}=\frac{1}{\infty}=0.$$

§ 72. Основной задачей дифференціальнаго исчисленія является разсмотрѣніе предѣловъ отношеній двухъ безконечно малыхъ величинъ $\alpha$ и $\beta$, т. е. разсмотрѣніе предѣла, къ которому стремится дробь

$$\frac{\beta}{\alpha}.$$

Мы оставимъ въ сторонѣ случай, когда при уменьшеніи $\alpha$ и $\beta$ до нуля дробь $\frac{\beta}{\alpha}$ не стремится ни къ какому опредѣленному предѣлу. Разберемъ лишь слѣдующіе три случая:

$$lim\frac{\beta}{\alpha}=k\ ,\ lim\frac{\beta}{\alpha}=0\ ,\ lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty\ ,$$

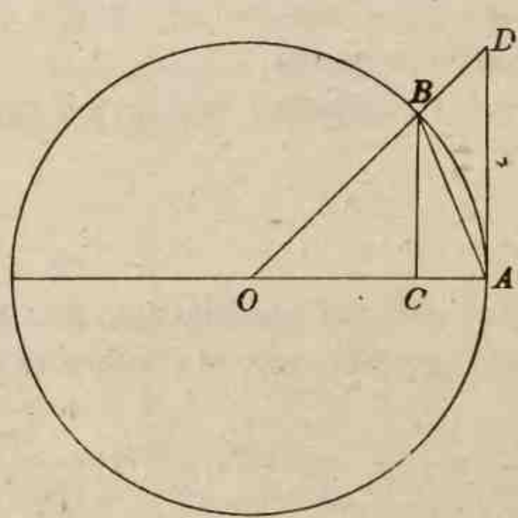
гдѣ $k$ нѣкоторая конечная величина.

Когда предѣлъ отношенія есть конечная величина, то $\alpha$ и $\beta$ называются безконечно малыми *одного порядка*. Когда предѣлъ отношенія есть 0, то говорятъ, что $\beta$ *высшаго порядка*, чѣмъ $\alpha$, или $\beta$ *безконечно малая относительно* $\alpha$. Когда предѣлъ отношенія есть $\infty$, то говорятъ, что $\beta$ *низшаго порядка*, чѣмъ $\alpha$, или $\beta$ *безконечно большая относительно* $\alpha$.

§ 73. Пояснимъ сказанное въ предыдущемъ §-ѣ на одномъ важномъ примѣрѣ. Разсмотримъ двѣ перемѣнныя $\alpha$ и $\beta=sin\,\alpha$. Предположимъ безконечно малую дугу $\alpha$ величиной положительной, уменьшающейся до нуля, тогда перемѣнная $\beta$, представляющая собою синусъ этого угла, будетъ также безконечно малая. Разсмотримъ предѣлъ отношенія

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{sin\,\alpha}{\alpha}\,.$$

Возьмемъ на окружности круга, радіусъ котораго равенъ единицѣ, дугу $AB$ (черт. 55), и пусть $\alpha$ обозначаетъ длину этой дуги, выраженную въ частяхъ радіуса. Построимъ $sin\,\alpha$, т. е. опустимъ перпендикуляръ $BC$ изъ конца $B$ дуги на радіусъ $OA$, проведенный черезъ начало $A$ дуги. Такъ какъ радіусъ $OB$ принятъ за единицу, то длина перпендикуляра $BC$ будетъ представлять величину $sin\,\alpha$. Построимъ также тангенсъ угла $\alpha$, т. е. проведемъ въ началѣ $A$ дуги касательную $AD$ къ кругу до пересѣченія въ точкѣ $D$ съ продолженіемъ радіуса $OB$. Величина $AD$ будетъ, очевидно, тангенсомъ угла $\alpha$. Разсмотримъ площади тре-



Черт. 55.

угольниковъ $OAB$ и $OAD$, а также площадь сектора $OAB$. Очевидно, имѣемъ

$$\text{пл. } \Delta\, OAD > \text{пл. сект. } OAB > \text{пл. } \Delta\, OAB.$$

или

$$\frac{1}{2} OA.AD > \frac{1}{2} OA (\smile AB) > \frac{1}{2} AO.BC.$$

Откуда

$$AD > \smile AB > BC$$

или

$$tang\, \alpha > \alpha > sin\, \alpha.$$

Дѣля всѣ члены неравенства на $sin\, \alpha$, мы получимъ

$$\frac{1}{cos\, \alpha} > \frac{\alpha}{sin\, \alpha} > 1$$

или

(1) $$cos\, \alpha < \frac{sin\, \alpha}{\alpha} < 1.$$

Такъ какъ меньшая перемѣнная $cos\, \alpha$ при уменьшеніи $\alpha$ до нуля имѣетъ предѣломъ единицу, то и перемѣнная $\frac{sin\, \alpha}{\alpha}$ стремится къ единицѣ, и мы получаемъ

$$lim \frac{\beta}{\alpha} = lim \frac{sin\, \alpha}{\alpha} = 1,$$

такъ что безконечно малыя величины $\alpha$ и $sin\, \alpha$ суть величины одного порядка.

Покажемъ, что дугу $\alpha$ можно подобрать такъ, чтобы разность

$$1 - \frac{sin\, \alpha}{\alpha}$$

была меньше произвольно малымъ заданнаго положительнаго числа $\varepsilon$. Изъ неравенствъ (1) выводимъ

$$1 - \frac{sin\, \alpha}{\alpha} < 1 - cos\, \alpha,$$

$$1 - \frac{sin\, \alpha}{\alpha} < 2\, sin^2 \frac{\alpha}{2} < 2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

или окончательно

$$1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}<\frac{\alpha^2}{2}.$$

Если мы хотимъ, чтобы было

$$1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}<\varepsilon,$$

то мы должны удовлетворить неравенству

$$\frac{\alpha^2}{2}<\varepsilon,$$

т. е.

$$\alpha<\sqrt{2\varepsilon}.$$

§ 74. Если одновременно разсматриваются нѣсколько безконечно малыхъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$,... то часто приходится поступать такъ. Принимаютъ одну изъ нихъ, напримѣръ $\alpha$, за главную и съ нею сравниваютъ порядки остальныхъ величинъ. Наиболѣе важный для практики случай тотъ, когда существуютъ равенства

$$\lim\frac{\beta}{\alpha^m}=a,\ \lim\frac{\gamma}{\alpha^n}=b,\ \lim\frac{\delta}{\alpha^p}=c,\ \ldots$$

гдѣ $m$, $n$, $p$, ... положительныя числа, $a$, $b$, $c$, ... конечныя величины. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ... суть *безконечно малыя порядковъ* $m$, $n$, $p$, ...

Такимъ образомъ, мы видимъ, что *порядкомъ безконечно малой называется показатель степени, въ которую надо возвысить главную безконечно малую величину, чтобы отношеніе разсматриваемой безконечно малой къ этой степени имѣло конечный предѣлъ.*

Легко составить общій видъ безконечно малой величины нѣкотораго порядка $n$. Въ самомъ дѣлѣ, такая величина $\beta$ будетъ опредѣляться формулой

$$\lim\frac{\beta}{\alpha^n}=a,$$

гдѣ $a$ нѣкоторая конечная величина. Мы получаемъ

$$\frac{\beta}{\alpha^n}=a+\varepsilon,$$

гдѣ $\varepsilon$ безконечно малая величина. Отсюда

(1) $$\beta=\alpha^n a+\eta.$$

Очевидно, что въ выраженіи (1) второй членъ

$$\eta=\alpha^n\varepsilon$$

представляетъ величину безконечно малую по сравненію съ первымъ $\alpha^n a$. Поэтому первый членъ $\alpha^n a$ носитъ названіе *главнаго члена* безконечно малой величины.

Для примѣра опредѣлимъ порядокъ перемѣнной

$$1 - \cos \alpha,$$

если $\alpha$ главная безконечно малая величина.

Мы имѣемъ

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right]^2,$$

откуда

$$\lim \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2}.$$

Значитъ безконечно малая величина $(1 - \cos \alpha)$ есть величина второго порядка малости и ея главный членъ будетъ равенъ $\frac{1}{2} \alpha^2$.

*Приращеніе функціи отъ одной независимой перемѣнной.*

§ 75. Пусть

$$y = f(x)$$

есть нѣкоторая функція отъ одной независимой перемѣнной $x$ и пусть указаны два частныя значенія $x_0$, $x_1$ перемѣнной независимой. Разность $x_1 - x_0$, показывающая, насколько измѣнилось $x$ при измѣненіи отъ $x_0$ до $x_1$, называется *приращеніемъ независимой перемѣнной*. Значеніе $x_0$ мы будемъ называть *начальнымъ значеніемъ* независимой перемѣнной. Приращеніе будемъ обозначать знакомъ $\Delta x_0$, подчеркивая этимъ, что приращеніе дается начальному значенію $x_0$. Значеніе $x_1 = x_0 + \Delta x_0$ мы будемъ называть *приращеннымъ значеніемъ* перемѣнной независимой.

Подобнымъ же образомъ значеніе

$$y_0 = f(x_0)$$

функціи, соотвѣтствующее начальному значенію $x_0$ перемѣнной независимой, мы будемъ называть *начальнымъ значеніемъ* функціи, а значеніе ея

$$y_1 = f(x_1)$$

мы будемъ называть *приращеннымъ значеніемъ* функціи. Подъ *приращеніемъ функціи* мы будемъ разумѣть разность

$$y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

и будемъ это приращеніе обозначать или знакомъ $\Delta y_0$, или знакомъ $\Delta f\ (x_0)$.

Очевидно, что приращенное значеніе функціи выражается по формулѣ

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0.$$

Мы имѣемъ, очевидно, слѣдующую формулу:

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0).$$

### *Непрерывность функцій.*

§ 76. Однозначная функція $f\ (x_0)$ называется *непрерывной* при начальномъ значеніи $x_0$ перемѣнной независимой, если безконечно малому приращенію $\Delta x_0$ соотвѣтствуетъ также безконечно малое приращеніе функціи $\Delta f\ (x_0)$.

§ 77. Приходится отличать два понятія, *частное значеніе* функціи при $x = a$ и *предѣльное значеніе* $f\ (x)$ при приближеніи $x$ къ a.

Частное значеніе функціи при $x = a$ вычисляется на основаніи опредѣленія функціи, мы его будемъ обозначать такъ:

$$f(a).$$

Что касается предѣльнаго значенія, которое можно обозначить такъ:

$$\lim_{x=a} f(x) = A,$$

то вообще говоря, число $A$ можетъ не равняться числу $f\ (a)$. Такъ, напримѣръ, пусть функція $f(x)$ опредѣлена такъ, что $f(x) = 1$ при всѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ $x$ и $f\ (x) = 0$ при всѣхъ дробныхъ значеніяхъ. Тогда, очевидно, что

$$f(1) = 1,$$

а предѣльное значеніе

$$\lim_{x=1} f(x) = 0,$$

потому что при всѣхъ дробныхъ значеніяхъ $x$, приближающихся къ единицѣ, функція постоянно равна нулю, значитъ и предѣлъ ея нуль.

Равенство

$$A = f(a)$$

будетъ выражать не что иное, какъ только что высказанное свойство непрерывности. Очевидно, что это свойство непрерывности можетъ быть написано еще такъ

$$lim f(x) = f(lim\, x),$$

т. е. другими словами для непрерывной функціи знаки предѣла и функціи обладаютъ перемѣстительнымъ свойствомъ.

§ 78. Если функція $f(x)$ непрерывна для всѣхъ значеній $x$, лежащихъ въ границахъ между двумя числами $a$ и $b$, причемъ $b > a$, то функція называется непрерывной въ промежуткѣ отъ $a$ до $b$. Функція непрерывная въ промежуткѣ отъ $a$ до $b$ обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ: если эта функція для двухъ значеній $\alpha$ и $\beta$ перемѣнной независимой принимаетъ значенія $A$ и $B$, такъ что

$$A = f(\alpha),\ B = f(\beta),$$

то и внутри того же самаго промежутка $(a, b)$ функція приметъ всякое значеніе $C$, промежуточное между $A$ и $B$, т. е. другими словами, будетъ существовать такое значеніе $x = \gamma$, при которомъ

$$f(\gamma) = C.$$

Мы не можемъ здѣсь останавливаться на доказательствѣ этого важнаго предложенія, что непрерывная функція пробѣгаетъ всѣ промежуточныя значенія, отсылая читателя къ современнымъ болѣе полнымъ курсамъ дифференціальнаго исчисленія.

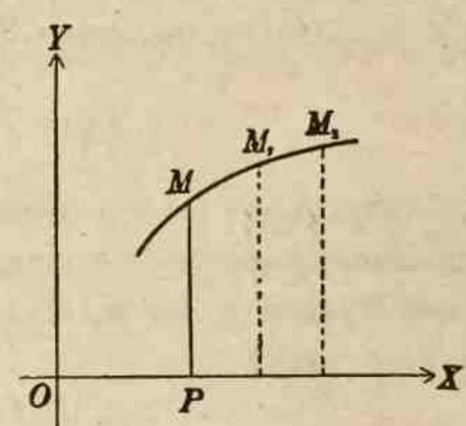
§ 79. Обращаемся теперь къ графическому изображенію функцій кривыми линіями.

Къ числу функцій непрерывныхъ принадлежатъ, напримѣръ, тѣ простѣйшія функціи, съ которыми мы знакомимся въ элементарной математикѣ и которыя перечислены въ §§ 60-68. Эти функціи и большинство простѣйшихъ комбинацій изъ нихъ представляютъ собою такого рода непрерывныя функціи, которыя могутъ быть графически изображены непрерывными кривыми линіями. Конечно, всѣ эти функціи могутъ переставать быть непрерывными или, какъ говорятъ, претерпѣвать разрывъ непрерывности для нѣкоторыхъ значеній перемѣннаго независимаго.

Представимъ себѣ въ координатной плоскости $OXY$ (черт. 56) проведенной нѣкоторую линію $S$, причемъ совершенно безразлично, какимъ движеніемъ карандаша эта линія проведена, участвовалъ ли при такомъ проведеніи какой-нибудь приборъ, какъ напримѣръ циркуль при проведеніи круга, или же линія проведена свободнымъ движеніемъ руки, выражаясь словами Euler'а „linea libera manu ducta". Очевидно, что такой линіи будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая функція

$$y = f(x),$$

т. е. каждому значенію $x = OP$ абсциссы будетъ соотвѣтствовать опредѣленное численное значеніе $y = PM$ ординаты. Если линія проведена непрерывнымъ движеніемъ, то ей будетъ соотвѣтствовать непрерывная функція $f(x)$.



Черт. 56.

Обратная задача гораздо труднѣе. А именно, если мы построимъ геометрическое мѣсто точекъ $M$, $M_1$, $M_2$, . . , соотвѣтствующихъ нѣкоторой непрерывной функціи $y = f(x)$, то, какъ мы убѣдимся въ дальнѣйшемъ, полученное такимъ образомъ геометрическое мѣсто не всегда обладаетъ свойствами кривой линіи въ томъ видѣ, въ какомъ мы привыкли себѣ кривую линію представлять изъ наглядныхъ геометрическихъ соображеній. Оставляя въ сторонѣ разборъ деликатнаго и труднаго вопроса о выводѣ тѣхъ условій, при которыхъ непрерывная функція представляетъ кривую, мы ограничимся въ настоящей главѣ разсмотрѣніемъ только такихъ непрерывныхъ функцій, которымъ соотвѣтствуютъ кривыя линіи.

### *Понятіе о производной и дифференціалѣ.*

§ 80. Приращеніе непрерывной функціи, вообще говоря, есть безконечно малая того же порядка, что и приращеніе независимой перемѣнной, такъ что

$$\lim_{\Delta x_0 = 0} \left\{ \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} \right\}$$

есть, вообще говоря, величина конечная, отличная отъ нуля.

Предѣлъ этотъ будетъ зависѣть, конечно, отъ вида функціи $f(x)$, а также отъ начальнаго значенія $x_0$ перемѣннаго независимаго. Можно сказать, что этотъ предѣлъ будетъ функціей отъ этого значенія $x_0$. Эту функцію, слѣдуя Lagrange'у, мы будемъ обозначать такъ:

$$f'(x_0),$$

и называвать *производною* отъ разсматриваемой функціи $f(x)$.

Итакъ, мы имѣемъ

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x = 0} \left\{ \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} \right\}.$$

Часто въ послѣдней формулѣ мы будемъ пропускать значекъ 0 у начальнаго значенія $x_0$ и писать эту формулу такъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \left\{ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \right\}.$$

Функція $f(x)$ по отношенію къ ея производной $f'(x)$ носитъ названіе *первообразной* функціи. Если функція отъ $x$ обозначена одной буквой $y$, то мы будемъ производную обозначать знакомъ $y'$. Вообще знаки

$$(x^m)', \ (\sin x)', \ . \quad .$$

будутъ обозначать производныя отъ функцій

$$x^m, \ \sin x, \ . \ . \ .$$

§ 81. Покажемъ существованіе производной на одномъ простомъ примѣрѣ:

$$f(x) = x^2.$$

Тогда

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x_0)^2 - x_0^2 =$$
$$= 2\, x_0 \Delta x_0 + \Delta x_0^2.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = 2\, x_0 + \Delta x_0,$$

и, наконецъ,

$$\lim_{\Delta x_0 = 0} \left\{ \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} \right\} = 2\, x_0.$$

Итакъ, производная отъ функціи $x^2$ есть функція $2\,x$.

§ 82. Слѣдуя Leibniz'у, вводятъ нынѣ кромѣ понятія о производной понятіе о такъ называемомъ *дифференціалѣ* функціи. Покажемъ, въ чемъ состоитъ это понятіе.

Такъ какъ мы имѣемъ

$$f'(x) = \lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

т. е. производная есть предѣлъ дроби $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то сама эта дробь будетъ отличаться отъ своего предѣла на безконечно малую величину $\varepsilon$, такъ что

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

откуда

$$\Delta f(x) = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x,$$

и мы видимъ, что приращеніе функціи распадается на двѣ части: на главную часть

$$f'(x)\,\Delta x$$

того же порядка, что и $\Delta x$, и на безконечно малую величину $\varepsilon\Delta x$ высшаго порядка. Мы называемъ нынѣ главную часть приращенія *дифференціаломъ* функціи и обозначаемъ этотъ дифференціалъ знакомъ $d\,f(x)$, такъ что имѣетъ мѣсто равенство

(1) $$d\,f(x) = f'(x)\,\Delta x.$$

Является теперь важнымъ разъяснить, что такое дифференціалъ перемѣнной независимой. Такъ какъ перемѣнная независимая $x$ есть въ то же время простѣйшая функція отъ самой себя, то мы можемъ формулу (1) примѣнить къ этой функціи

$$f(x) = x\,.$$

Такъ какъ для этой функціи $\Delta f(x) = \Delta x$, т. е.

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 1\,,$$

то

$$f'(x) = 1\,,$$

и мы получаемъ

(2) $$d\,x = \Delta x\,,$$

т. е. подъ дифференціаломъ перемѣнной независимой $x$ придется разумѣть не что иное, какъ произвольно взятое приращеніе этой перемѣнной независимой.

Тогда формула (1) для дифференціала функціи перепишется такъ:

$$d\,f(x) = f'(x)\,d\,x.$$

Итакъ мы видимъ, что для полученія дифференціала функціи необходимо умножить производную функціи на дифференціалъ перемѣннаго независимаго. Вѣрнѣе сказать, подъ дифференціаломъ функціи разумѣется такая формула, въ которой написана производная функціи и къ ней приписанъ множителемъ дифференціалъ перемѣннаго независимаго, ибо о настоящемъ умноженіи не можетъ быть и рѣчи, потому что $dx$ остается произвольнымъ числомъ.

У читателя можетъ явиться вопросъ, почему же знакъ дифференціала оказался имѣющимъ важное значеніе. Отвѣтъ на этотъ вопросъ будетъ данъ въ ближайшемъ изложеніи.

Изъ формулы (3) мы замѣчаемъ, что производную $f'(x)$ можно записать символомъ

$$\frac{df(x)}{dx}$$

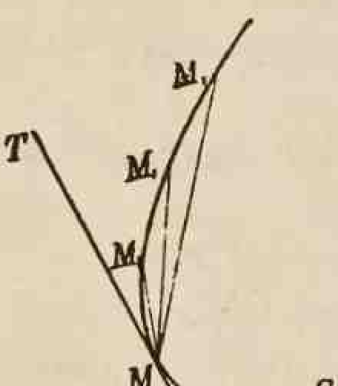
или, если саму функцію обозначимъ черезъ $y$, то символомъ

$$\frac{dy}{dx}.$$

§ 83. Слѣдуетъ замѣтить, что дифференціалъ независимаго перемѣннаго, будучи совершеннно произвольнымъ его приращеніемъ, есть величина, которая не зависитъ отъ перемѣнныхъ, входящихъ въ разсматриваемый вопросъ. Что касается дифференціала функціи, то на основаніи предыдущаго мы видимъ, что онъ не совпадаетъ съ приращеніемъ функціи, а составляетъ его главную часть. Самъ Leibniz опредѣлялъ дифференціалъ нѣсколько неточно, а именно, онъ дифференціаломъ функціи называлъ приращеніе функціи, но при вычисленіяхъ совѣтовалъ откидывать безконечно малыя высшаго порядка, что, конечно, сводилось къ тому же самому значенію дифференціала.

*Геометрическое толкованіе производной и дифференціала.*

§ 84. Для выясненія геометрическаго значенія производной мы разсмотримъ ту задачу, которая послужила однимъ изъ поводовъ къ изобрѣтенію дифференціальнаго исчисленія, а именно задачу о проведеніи касательной къ нѣкоторой кривой на плоскости.



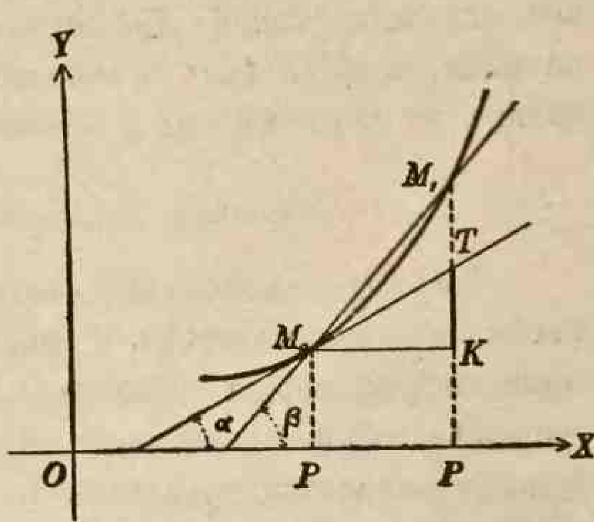
Черт. 57.

Опредѣленіе. *Подъ касательной къ кривой $S$* (черт. 57) *въ нѣкоторой ея точкѣ $M$ разумѣется такая прямая $MT$, съ которой стремится совпасть сѣкущая $MM_1$, проведенная черезъ точку $M$ и черезъ безконечно близкую къ ней точку $M_1$ кривой $S$, при постепенномъ приближеніи точки $M_1$ къ точкѣ $M$ вдоль по кривой.*

Разсмотримъ въ плоскости прямоугольныхъ координатъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ

$$y = f(x).$$

Пусть начальному значенію $x_0$ перемѣннаго независимаго соотвѣтствуетъ на кривой точка $M_0$ (черт. 58), такъ что $x_0 = OP_0, y_0 = f(x_0) = P_0 M_0$.



Черт. 58.

Дадимъ независимому перемѣнному $x_0$ приращеніе

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0,$$

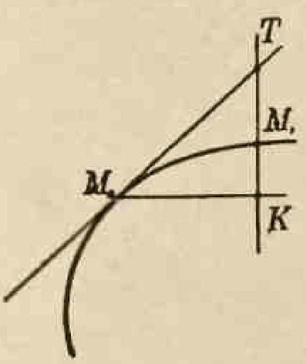
тогда мы получимъ приращенное значеніе $x_1$, которому соотвѣтствуетъ точка $M_1$, при этомъ

$$\Delta x_0 = P_0 P_1, \Delta f(x_0) = P_1 M_1 - P_0 M_0 = K M_1.$$

Если мы обозначимъ черезъ $\beta$ уголъ, который образуетъ съ осью $x$-овъ сѣкущая $M_0 M_1$, то мы получимъ

$$(1) \qquad \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{KM_1}{M_0 K} = tg \angle KM_0 M_1 = tg\,\beta.$$

Если мы будемъ передвигать точку $M_1$ вдоль по кривой къ точкѣ $M_0$, то сѣкущая $M_0 M_1$ будетъ стремиться совпасть съ касательною $M_0 T$ въ точкѣ $M_0$. Уголъ $\beta$ будетъ имѣть своимъ предѣломъ уголъ $\alpha$, который образуетъ съ осью $x$-овъ эта касательная. Тогда въ предѣлѣ равенство (1) обратится въ такое:



Черт. 59.

$$f'(x) = tg\,\alpha.$$

Итакъ, мы видимъ, что производная представляетъ собою не что иное, какъ тангенсъ угла, который образуетъ касательная съ осью $x$-овъ, причемъ при вычисленіи производной надо независимому перемѣнному дать значеніе $x_0$, соотвѣтствующее точкѣ касанія.

Легко убѣдиться, что дифференціаломъ функціи является отрѣзокъ $KT$, представляющій собою приращеніе ординаты касательной. Въ самомъ дѣлѣ, изъ треугольника $KM_0 T$ мы получаемъ

$$KT = M_0 K\, tg\,\alpha = \Delta x\, f'(x) = d\,f(x).$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что приращеніе $KM_1$ функціи состоитъ изъ двухъ частей: изъ главной, дифференціала, представляющаго собою приращеніе до касательной, и изъ безконечно малой высшаго порядка $TM_1$, представляющей собою уклоненіе кривой отъ касательной. Дифференціалъ, будучи главной частью приращенія, можетъ быть и меньше этого приращенія, какъ мы это видимъ на чертежѣ 58, и больше него, какъ видно изъ чертежа 59.

*Понятіе о дифференцированіи функціи.*

§ 85. Въ дифференціальномъ исчисленіи указываются пріемы нахожденія производныхъ и дифференціаловъ отъ функцій. Нахожденіе дифференціала функціи представляетъ собою ту же самую операцію, что и нахожденіе производной, потому что дифференціалъ функціи равняется производной, къ которой приписанъ множителемъ дифференціалъ независимаго перемѣннаго. Операція нахожденія производной носитъ названіе операціи *дифференцированія* функціи. Такъ какъ эта операція есть основная во всемъ анализѣ безконечно малыхъ, то приступимъ теперь къ изученію правилъ дифференцированія.

Докажемъ предварительно нѣсколько общихъ теоремъ.

Теорема I. *Производная и дифференціалъ постоянной величины тождественно равны нулю.*

Пусть

$$f(x) = C,$$

гдѣ $C$ величина постоянная. Такъ какъ это равенство имѣетъ мѣсто при всякомъ $x$, то

$$f(x + \Delta x) = C.$$

Значитъ

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0,$$

откуда

$$lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0.$$

Поэтому мы получаемъ

$$(C)' = 0, \; d\,C = (C)'\,d\,x = 0.$$

Теорема II. *Производныя и дифференціалы двухъ функцій, отличающихся на постоянное число C, равны между собою.*

Пусть имѣемъ двѣ функціи

$$f(x) \text{ и } F(x) = f(x) + C.$$

Тогда

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = f(x + \Delta x) + C - f(x) - C =$$
$$= f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x).$$

Значитъ

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

отсюда

$$F'(x) = f'(x),\ dF(x) = df(x).$$

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что, если двѣ функціи тождественно равны, то и ихъ производныя также тождественно равны.

Теорема III. *Если двѣ функціи отличаются другъ отъ друга постояннымъ множителемъ $C$, то ихъ производныя и дифференціалы отличаются тѣмъ же множителемъ $C$.*

Пусть мы имѣемъ

$$F(x) = Cf(x).$$

Найдемъ производную. Мы имѣемъ

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = Cf(x + \Delta x) - Cf(x).$$

Отсюда

$$F'(x) = Cf'(x),\ dF(x) = Cdf(x).$$

*Производная и дифференціалъ степени.*

§ 86. Возьмемъ функцію

$$f(x) = x^a,$$

гдѣ $a$ какое-нибудь постоянное число. Получаемъ

$$\Delta f(x) = (x + \Delta x)^a - x^a$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^a - x^a}{\Delta x}.$$

Такъ какъ $\Delta x$ есть безконечно малая величина, то мы можемъ положить

$$\Delta x = \alpha x,$$

гдѣ $\alpha$ также нѣкоторая новая безконечно малая.

Вносяэто выраженіе $\Delta x$ въ послѣднее равенство, получимъ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\alpha x)^a-x^a}{\alpha x}=\frac{x^a[(1+\alpha)^a-1]}{\alpha x}=$$

$$=x^{a-1}\frac{(1+\alpha)^a-1}{\alpha}.$$

Итакъ, производная получается въ такомъ видѣ:

(1) $$f'(x)=lim\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=x^{a-1}lim\frac{(1+\alpha)^a-1}{\alpha}=x^{a-1}lim\frac{\beta}{\alpha},$$

гдѣ

(2) $$\beta=(1+\alpha)^a-1.$$

Мы видимъ, что при $\alpha$ безконечно маломъ $\beta$ также безконечно малая величина. Изъ равенства (2) получаемъ

$$1+\beta=(1+\alpha)^a,$$

откуда, логариѳмируя,

$$Log(1+\beta)=a\,Log(1+\alpha).$$

Послѣднее равенство можно будетъ переписать такъ:

$$\beta\cdot\frac{1}{\beta}Log(1+\beta)=a\alpha\frac{1}{\alpha}Log(1+\alpha)$$

или

$$\beta\,Log(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}=a\alpha\,Log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

откуда окончательно

$$\frac{\beta}{\alpha}=a\frac{Log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{Log(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Посмотримъ, къ какому предѣлу стремится $\frac{\beta}{\alpha}$ при уменьшеніи $\alpha$ до нуля. Числитель и знаменатель во второй части стремятся къ общему предѣлу $Log\ e$, ибо

$$lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=lim(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}=e.$$

Итакъ

$$lim\frac{\beta}{\alpha}=a,$$

т. е. мы получаемъ формулы

$$f'(x)=(x^a)'=a\,x^{a-1};\ d(x^a)=a\,x^{a-1}dx.$$

Выведенная нами формула заключаетъ въ себѣ цѣлый рядъ формулъ болѣе частнаго вида, ибо число $a$ можетъ быть произвольнымъ цѣлымъ, дробнымъ, отрицательнымъ и ирраціональнымъ. Такъ напримѣръ

1) $a = 5$,

$$(x^5)' = 5x^4;\ d(x^5) = 5x^4\,dx.$$

2) $a = -1$,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};\ d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}.$$

3) $a = \frac{1}{2}$,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};\ d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

*Производная и дифференціалъ показательной функціи.*

§ 87. Будемъ дифференцировать функцію

$$f(x) = A^x.$$

Мы получаемъ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{A^{x+\Delta x} - A^x}{\Delta x} = A^x \frac{A^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Итакъ

(1) $$f'(x, = A^x \lim \frac{\alpha}{\Delta x},$$

гдѣ

(2) $$\alpha = A^{\Delta x} - 1.$$

Когда $\Delta x$ приближается къ нулю, то число $\alpha$ также приближается къ нулю. На основаніи (2) мы имѣемъ

$$A^{\Delta x} = 1 + \alpha,$$

откуда, логариѳмируя при основаніи $e$, мы получимъ

$$\Delta x lg\, A = lg\,(1 + \alpha),$$

или

$$\Delta x lg\, A = \alpha\, lg\,(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Отсюда

$$\frac{\alpha}{\Delta x} = \frac{lg\, A}{lg\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Приближая $\Delta x$ къ нулю, мы получимъ

$$lim\, \frac{\alpha}{\Delta x} = lg\, A,$$

ибо

$$lim\, lg\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = lg\, e = 1.$$

Итакъ, получаемъ

$$(A^x)' = A^x\, lg\, A\,;\;\; d\,(A^x) = A^x\, lg\, A\, d\, x.$$

Формулы дѣлаются проще, если разсматривать случай $A = e$, тогда получаемъ

$$(e^x)' = e^x\,;\;\; d\,(e^x) = e^x\, d\, x.$$

Показательная функція $e^x$ есть единственная функція, производная которой равна самой функціи. Такъ какъ выраженія производной и дифференціала показательной функціи оказываются болѣе простыми при основаніи $e$, то обыкновенно и употребляются показательныя функціи съ этимъ основаніемъ.

*Производная и дифференціалъ логариѳмической функціи.*

§ 88. Отыщемъ производную функціи

$$f(x) = Log x.$$

Мы имѣемъ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{Log\,(x+\Delta x) - Log x}{\Delta x} = \frac{Log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Полагая

$$\Delta x = x\, \alpha,$$

мы получимъ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\, Log\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

откуда производная опредѣляется по формулѣ

$$f'(x) = \frac{1}{x}\, lim\, Log\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{Log\, e}{x}.$$

Итакъ

$$(Log\,x)' = \frac{Log\,e}{x}, \quad d\,(Log\,x) = Log\,e\,\frac{dx}{x}.$$

Для неперовыхъ логариѳмовъ, когда за основаніе взято число $e$, формулы дѣлаются проще:

$$(lg\,x)' = \frac{1}{x}, \quad d\,lg\,x = \frac{dx}{x}.$$

Логариѳмическая функція даетъ намъ замѣчательный примѣръ того, что производная проще, чѣмъ первообразная функція, потому что эта первообразная функція $lg\,x$ есть функція трансцендентная, а производная простая раціональная $\frac{1}{x}$.

*Производныя и дифференціалы функцій тригонометрическихъ.*

§ 89. Будемъ дифференцировать функцію

$$f(x) = sin\,x,$$

получаемъ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{sin\,(x+\Delta x) - sin\,x}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2\,cos\,\frac{x+\Delta x+x}{2}\,sin\,\frac{x+\Delta x-x}{2}}{\Delta x} = cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{sin\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Приближая число $\Delta x$ къ нулю, мы получимъ

$$(sin\,x)' = cos\,x, \quad d\,(sin\,x) = cos\,x\,d\,x.$$

§ 90. Разсмотримъ теперь функцію

$$f(x) = cos\,x.$$

Подобно предыдущему, получимъ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x,} = \frac{cos\,(x+\Delta x) - cos\,x}{\Delta x} =$$

$$= -\frac{2\,sin\,\frac{x+\Delta x+x}{2}\,sin\,\frac{x+\Delta x-x}{2}}{\Delta x} = -\,sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{sin\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Отсюда

$$(cos\,x)' = -\,sin\,x\,; \; d\,(cos\,x) = -\,sin\,x\,dx.$$

*Дифференцированіе суммы, разности, произведенія и дроби.*

§ 91. Возьмемъ функцію

(1) $$y = u + v,$$

гдѣ $u$ и $v$ суть функціи отъ перемѣнной независимой $x$. Дадимъ этой перемѣнной независимой приращеніе $\Delta x$ и пусть черезъ $\Delta y$, $\Delta u$ и $\Delta v$ обозначаются соотвѣтственныя приращенія функцій $y$, $u$ и $v$. Тогда, очевидно, будемъ имѣть

$$y + \Delta y = (u + \Delta v) + (v + \Delta v).$$

Вычитая равенство (1), получимъ

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Переходя къ предѣлу, получимъ

$$y' = u' + v', \; dy = dy + dv.$$

*Производная суммы равняется суммѣ производныхъ слагаемыхъ* *).

§ 92. Если будемъ имѣть

$$y = u - v,$$

то аналогичнымъ путемъ получимъ

$$y' = u' - v', \; dy = du - dv;$$

мы получаемъ, что *производная разности равняется разности производныхъ.*

§ 93. Теоремы двухъ предыдущихъ §-овъ позволяютъ высказать такую болѣе общую теорему.

*Производная алгебраической суммы равна алгебраической суммѣ производныхъ, т. е. равенство*

$$y = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

*даетъ*

$$y' = u'_1 + u'_2 + u'_3 + \ldots + u_n'.$$

Относительно этой послѣдней теоремы надо обратить вниманіе на слѣдующее весьма важное обстоятельство: теорема можетъ переставать имѣть мѣсто, если число слагаемыхъ будетъ

---

*) Въ этой теоремѣ и въ слѣдующихъ слово *производная* можно замѣнить словомъ *дифференціалъ*.

безконечно большимъ; другими словами, если намъ данъ безконечный рядъ функцій

$$u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

имѣющій суммой функцію $y$, т. е.

$$y = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \tag{1}$$

то рядъ производныхъ

$$u_1' + u_2' + u_3' + \ldots \tag{2}$$

во-первыхъ, можетъ перестать сходиться для тѣхъ значеній, для которыхъ сходится заданный рядъ (1), и, кромѣ того, даже въ томъ случаѣ, когда рядъ (2) сходится, онъ можетъ не имѣть суммой производную $y'$. Для того, чтобы дѣйствительно имѣло мѣсто равенство

$$y' = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots, \tag{3}$$

нужно, чтобы заданный рядъ (1) обладалъ извѣстными условіями. Эти условія носятъ названіе *условій дифференцируемости ряда.*

§ 94. Разсмотримъ производную функціи

$$y = uv,$$

представляющей произведеніе двухъ функцій $u$ и $v$.
Получаемъ

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v),$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta x\,\frac{\Delta u}{\Delta x}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Приближая $\Delta x$ къ нулю и предполагая существованіе конечныхъ производныхъ $u'$ и $v'$, приходимъ къ формулѣ

$$y' = uv' + vu'\,;\; dy = u\,dv + v\,du.$$

§ 95. Примѣняя теорему о дифференцированіи произведенія двухъ множителей послѣдовательно къ произведенію большаго числа множителей, мы получимъ формулы, удобныя для запоминанія. Напримѣръ, въ случаѣ трехъ множителей

$$y = uvw$$

получаемъ слѣдующую выкладку:

$$\begin{aligned} y' &= (uv)\,w' + w\,(uv)' = \\ &= uvw' + w\,(uv' + vu') = \\ &= u'vw + uv'w + uvw'. \end{aligned}$$

Получается, слѣдовательно, такое правило дифференцированія произведенія нѣсколькихъ множителей $u_1 u_2 u_3 \ldots u_n$. Пишемъ рядъ новыхъ произведеній, въ которыхъ замѣняемъ одинъ изъ множителей его производной:

$$u_1' u_2 u_3 \ldots u_n$$
$$u_1' u_2' u_3 \ldots u_n$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$u_1 u_2 u_3 \ldots u'_n.$$

Очевидно, что такихъ произведеній будетъ столько, сколько множителей. *Сумма всѣхъ этихъ произведеній и дастъ производную заданнаго произведенія.*

§ 96. Обращаемся теперь къ дифференцированію дроби

$$y = \frac{u}{v}.$$

Получаемъ

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Приближая къ предѣлу, получаемъ

$$y' = \frac{v u' - u v'}{v^2},\quad d y = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

*Производная дроби есть дробь, имѣющая знаменателемъ квадратъ знаменателя заданной дроби, а числителемъ разность между произведеніемъ знаменателя дроби на производную числителя и произведеніемъ числителя на производную знаменателя.*

§ 97. Найдемъ, напримѣръ, производную функціи

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Получаемъ

$$(tg\, x)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

$$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\quad d\, tg\, x = \frac{d x}{\cos^2 x}.$$

Подобнымъ же образомъ вычислимъ производную функціи $sec\,x$:

$$(sec\,x)' = \left(\frac{1}{cos\,x}\right)' = \frac{cos\,x\,(1)' - 1\,.\,(cos\,x)'}{cos^2 x} = \frac{sin\,x}{cos^2 x}.$$

*Дифференцированіе функцій отъ функцій.*

§ 98. Пусть дана нѣкоторая функція $y$ отъ независимой перемѣнной $u$

(1) $$y = f(u).$$

Мы желаемъ въ уравненіе (1) вмѣсто независимой перемѣнной $u$ подставить новую функцію отъ независимой перемѣнной $x$

(2) $$u = \varphi(x).$$

Тогда получается въ концѣ концовъ $y$, какъ функція отъ независимой перемѣнной $x$, которую мы будемъ называть *функціей отъ функціи*.

Перемѣнной независимой $u$, которая замѣняется новой функціей, мы дадимъ другое названіе, чтобы показать, что она уже перестаетъ быть перемѣнной независимой. Мы эту перемѣнную $u$ будемъ называть *аргументомъ* функціи $f(u)$. Этотъ аргументъ можетъ быть или самой независимой перемѣнной, или же функціей отъ новой перемѣнной независимой. Въ послѣднемъ случаѣ получается функція отъ функціи. Знаками функцію отъ функціи можно выразить такъ:

$$y = f(\varphi(x)).$$

§ 99. Покажемъ теперь, какъ найти производную функціи отъ функціи. Дадимъ независимой перемѣнной $x$ приращеніе $\Delta x$. Тогда аргументъ $u$ получитъ приращеніе $\Delta u$, а функція $y$ получитъ приращеніе $\Delta y$. Намъ надо будетъ вычислить предѣлъ отношенія

(1) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Вмѣсто перемѣнной (1) можно будетъ разсматривать перемѣнную

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

тогда мы получаемъ

$$\frac{dy}{dx} = lim\,\frac{\Delta y}{\Delta u}\,.\,lim\,\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Конечно, мы предполагаемъ, что аргументъ $u$ есть такая функція отъ независимой перемѣнной $x$, что $\Delta u$ не обращается тождественно въ нуль.

По опредѣленію понятія о производной и на основаніи тѣхъ примѣровъ вычисленія производной, которые мы видѣли выше, мы замѣчаемъ, что производная зависитъ только отъ начальнаго значенія перемѣнной независимой и не зависитъ отъ закона приближенія къ нулю приращенія $\Delta x$. Отсюда мы можемъ заключить, что

$$lim \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u),$$

причемъ производная $f'(u)$ взята по аргументу $u$, какъ будто бы этотъ аргументъ $u$ былъ перемѣнная независимая. Далѣе

$$lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' = \varphi'(x).$$

Итакъ, мы получаемъ слѣдующую формулу для дифференцированія функціи отъ функціи:

(2) $$\frac{dy}{dx} = y' = f'(u) \,.\, u'.$$

Итакъ, мы видимъ, что получается такое правило для дифференцированія функціи отъ функціи: надо сначала написать производную функціи по аргументу, какъ будто бы этотъ аргументъ былъ перемѣнной независимой, и *не позабыть* умножить эту производную на производную $u'$ аргумента $u$ по настоящей перемѣнной независимой $x$.

Мы замѣчаемъ, слѣдовательно, что производная мѣняетъ свой видъ въ зависимости отъ выбора перемѣнной независимой.

Весьма важное обстоятельство, давшее большое распространеніе символу дифференціала, состоитъ въ томъ, что *формула для дифференціала функціи отъ нѣкотораго аргумента по своему внѣшнему виду не зависитъ отъ выбора перемѣнной независимой.*

Въ самомъ дѣлѣ, умножая обѣ части равенства (2) на $dx$, получаемъ

$$dy = f'(u)\, u'\, dx.$$

Но по опредѣленію дифференціала функціи имѣемъ

$$u'\, dx = du,$$

и мы получаемъ формулу

(3) $$dy = f'(u)\, du,$$

имѣющую мѣсто во всѣхъ случаяхъ, какая бы ни была перемѣнная независимая.

Итакъ, видъ формулы (3) остается одинъ и тотъ же, но значеніе входящихъ въ нее величинъ мѣняется при перемѣнѣ независимой перемѣнной. Если $u$ перемѣнная независимая, то дифференціалъ $du$ будетъ произвольной постоянной величиной, постоянной въ томъ смыслѣ, что онъ не будетъ зависѣть ни отъ какихъ перемѣнныхъ, входящихъ въ задачу; если же $u$ перестанетъ быть независимой перемѣнной, то дифференціалъ $du$ будетъ выражаться по формулѣ

$$du = u'\,dx = \varphi'(x)\,dx,$$

и онъ будетъ перемѣнной величипой, могущей мѣняться отъ двухъ причинъ: во-первыхъ отъ измѣненія произвольной постоянной $dx$, дифференціала независимой перемѣнной, во-вторыхъ отъ измѣненія перемѣнной $x$, которая входитъ въ $du$ подъ видомъ функціи $\varphi'(x)$. Практичность употребленія формулы (3) съ дифференціалами состоитъ именно въ томъ, что внѣшній видъ этой формулы не зависитъ отъ выбора перемѣнной независимой, а потому мы имѣемъ возможность, начиная вычисленія для какой нибудь задачи, писать формулы, не намѣчая заранѣе перемѣнной независимой, а когда характеръ выкладокъ уже выяснится, можно будетъ болѣе практичнымъ образомъ выбрать перемѣнную независимую.

§ 100. Правило для дифференцированія функцій отъ функцій значительно расширяетъ кругъ функцій, которыя мы умѣемъ дифференцировать. Напримѣръ, требуется найти производную функціи

$$y = \sqrt{1 + x^2}\ .$$

Тогда, обозначая

$$1 + x^2 = u,$$

мы получаемъ

$$y' = (\sqrt{u}\,)'_u \,.\, u',$$

гдѣ знакомъ $(\sqrt{u}\,)'_u$ мы указываемъ производную, взятую по аргументу $u$, какъ независимому перемѣнному. Поэтому,

$$y' = (\sqrt{u}\,)'_u \,.\, u' = \frac{1}{2\sqrt{u}}(1 + x^2)' = \frac{(x^2)'}{2\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\ .$$

## *Дифференцированіе тождества.*

§ 101. Однимъ изъ важныхъ принциповъ приложеній дифференціальнаго исчисленія является дифференцированіе тождествъ. Пусть намъ дано нѣкоторое тождество

(1) $$\Phi(x) = 0.$$

Въ первой части мы написали функцію отъ буквы $x$, но кромѣ этой буквы функція $\Phi(x)$ можетъ заключать сколько угодно другихъ буквъ, которыя мы будемъ считать за числа постоянныя. Обозначимъ производную отъ первой части, взятую по буквѣ $x$, такъ:

$$\Phi'(x).$$

Тогда изъ тождества (1) получится, какъ слѣдствіе, тождество

(2) $$\Phi'(x) = 0,$$

ибо, если тождество (1) имѣетъ мѣсто, то будетъ имѣть мѣсто тождество

(3) $$\Phi(x + \Delta x) = 0,$$

потому что тождество остается въ силѣ, что бы ни подставлять вмѣсто входящихъ въ него буквъ. Вычитая тождество (1) изъ (3), получимъ тождество

$$\Delta\Phi(x) = 0.$$

Раздѣляя послѣднее тождество на $\Delta x$ и приближая къ предѣлу, получимъ тождество (2).

Указанный принципъ можно формулировать такъ. *Мы имѣемъ право всякое тождество дифференцировать по любой изъ входящихъ въ него буквъ. Въ результатѣ дифференцированія тождества получается также тождество.*

§ 102. Если мы имѣемъ нѣкоторое уравненіе

(1) $$f(x) = 0,$$

которое не есть тождество, и если мы его продифференцируемъ, то получимъ новое уравненіе

(2) $$f'(x) = 0,$$

которое, быть можетъ, и полезно при изученіи свойствъ первоначальнаго уравненія (1), но не является слѣдствіемъ его.

## *Дифференцированіе функцій обратныхъ.*

§ 103. Пусть задано уравненіе

(1) $$y = f(x),$$

связывающее двѣ перемѣнныя $y$ и $x$, причемъ $y$ оказывается нѣкоторой функціей $f(x)$. Если уравненіе (1) такого вида, что мы умѣемъ его рѣшить относительно $x$, то получимъ $x$ въ видѣ функціи отъ $y$; эту функцію мы будемъ называть функціей *обратной* функціи $f$ и обозначать знакомъ $f_{-1}$, такъ что получимъ уравненіе

$$x = f_{-1}(y). \tag{2}$$

Напримѣръ, если

$$y = x^2 - 1,$$

то, рѣшая это уравненіе относительно $x$, получимъ обратную функцію

$$x = \pm\sqrt{y+1}.$$

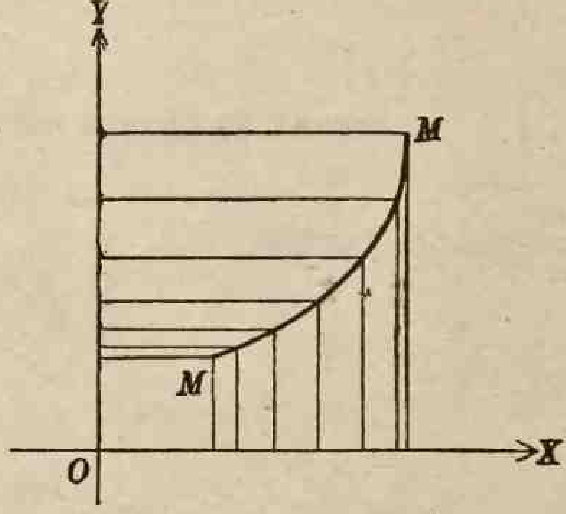
Возьмемъ еще примѣръ

$$y = a^x,$$

тогда

$$x = Log_a y.$$

Нѣкоторое затрудненіе относительно существованія функцій обратныхъ можетъ встрѣтиться въ томъ случаѣ, когда мы не умѣемъ уравненіе (1) рѣшить относительно буквы $x$, но тогда, ограничиваясь разсмотрѣніемъ функцій, изображаемыхъ кривыми линіями, мы можемъ убѣдиться въ существованіи обратныхъ функцій изъ слѣдующихъ соображеній. Пусть нѣкоторая кривая линія $MM_1$ (черт. 60) изображаетъ собою геометрическую картину измѣненія ординаты $y$, которая есть заданная функція $f$ отъ абсциссы $x$. Тогда очевидно, что если мы повернемъ чертежъ на $90^0$ и будемъ разсматривать перемѣнную $y$, какъ независимую, то та же самая кривая будетъ давать измѣненія величины $x$, разсматриваемой, какъ функція отъ $y$.



Черт. 60.

Если мы въ уравненіе (2) вмѣсто $y$ подставимъ величину, взятую изъ уравненія (1), то должны получить тождество

$$x = f_{-1}\Big(f(x)\Big),$$

такъ что уравненіе (2) можно будетъ разсматривать, какъ тождество относительно $x$, если аргументъ $y$ разсматривать, какъ функцію отъ $x$. Дифференцируя это тождество по $x$, получимъ

(3) $$1 = f'_{-1}(y)\,y'.$$

Но мы имѣемъ

(4) $$y' = f'(x),$$

и тогда изъ тождества (3) и равенства (4) получаемъ

(5) $$f'_{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Приходимъ, слѣдовательно, къ теоремѣ. *Производная обратной функціи есть обратная величина относительно производной первоначальной функціи.*

Не надо только забывать, что въ формулѣ (5) каждая производная берется по своему аргументу, такъ что производная первоначальной функціи берется по аргументу $x$, а производная обратной функціи по аргументу $y$.

Наша теорема получается изъ формулъ съ дифференціалами короче, а именно

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Пояснимъ сказанное на примѣрѣ, разсмотримъ

$$y = e^x, x = lg\,y,$$

тогда мы имѣемъ

$$(lg\,y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x}.$$

Отсюда получаемъ

$$(lg\,y)' = \frac{1}{y},$$

что мы уже видѣли въ § 88.

*Производныя отъ функцій круговыхъ.*

§ 104. Будемъ дифференцировать функцію

$$y = arc\,sin\,x.$$

Тогда обратная функція будетъ

$$x = sin\,y.$$

Отсюда, примѣняя теорему о дифференцированіи функцій обратныхъ, получимъ

$$(arc\ sin\ x)' = \frac{1}{(sin\ y)'} = \frac{1}{cos\ y}.$$

Мы выразили производную заданной функціи черезъ $y$, но такъ какъ заданная функція есть функція отъ $x$, то намъ желательно получить выраженіе этой производной черезъ $x$. Для этого воспользуемся равенствомъ

$$cos\ y = \pm\sqrt{1 - sin^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Что касается знака, то мы должны припомнить, что опредѣлили функцію *arc sin x* такимъ образомъ, что это дуга, косинусъ которой число положительное. Отсюда получаемъ окончательно

$$(arc\ sin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};\ d\,(arc\ sin\ x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

§ 105. Будемъ дифференцировать функцію

$$y = arc\ tg\ x.$$

Значитъ

$$x = tg y.$$

Получаемъ

$$(arc\ tg\ x)' = \frac{1}{(tg\ y)'} = cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2 y},$$

откуда окончательно

$$(arc\ tg\ x)' = \frac{1}{1 + x^2},\ d\,(arc\ tg\ x) = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

§ 106. Возьмемъ функцію

$$y = arc\ cos\ x.$$

Разсмотримъ тождество

$$arc\ cos\ x + arc\ sin\ x = \frac{\pi}{2}.$$

Дифференцируя это тождество, получимъ

$$(arc\ cos\ x + arc\ sin\ x)' = 0,$$

значитъ

$$(arc\ cos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ d\,(arc\ cos\ x) = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

§ 107. Подобнымъ же образомъ, дифференцируя тождество

$$arc\,cotg\,x + arc\,tg\,x = \frac{\pi}{2},$$

получимъ

$$(arc\,cotg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2},\; d\,(arc\,cotg\,x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

§ 108. Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію послѣднихъ функцій $arc\,sec\,x$ и $arc\,cosec\,x$. Для нахожденія производныхъ отъ этихъ функцій необходимо имѣть въ виду, что

$$arc\,sec\,x = arc\,cos\,\frac{1}{x},$$

а потому, дифференцируя, какъ функцію отъ функціи, получимъ

$$(arc\,sec\,x)' = \left(arc\,cos\,\frac{1}{x}\right)'\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

или окончательно

$$(arc\,sec\,x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\; d\,(arc\,sec\,x\,) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

наконецъ, получаемъ

$$(arc\,cosec\,x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\; d\,(arc\,cosec\,x) = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

§ 109. Найдемъ производную функціи

$$y = u^v,$$

гдѣ $u$ и $v$ суть функціи отъ $x$.

Прологариѳмировавъ, получимъ

$$lg\,y = v\,lg\,u,$$

откуда

$$y = e^{v lg u}.$$

Получаемъ

$$y' = e^{v lg u}\,(v\,lg\,u)' = e^{v lg u}\left(v\,\frac{u'}{u} + v'\,lg\,u\right) =$$

$$= u^v\left(v\,\frac{u'}{u} + lgu\,.\,v'\right);$$

$$(u^v)' = v\,u^{v-1}\,u' + u^v\,lg\,u.\,v'.$$

Первый членъ во второй части, какъ легко усмотрѣть, представляетъ собою производную отъ $u^v$ въ предположеніи, что $v$ есть постоянная величина, а второй членъ производную отъ $u^v$ въ предположеніи, что $u$ постоянная величина. Это обстоятельство въ дальнѣйшемъ приведетъ къ весьма важнымъ обобщеніямъ.

## § 110. *Основная таблица производныхъ и дифференціаловъ простѣйшихъ функцій.*

Эту таблицу полезно помнить наизусть.

1. $(c)' = 0,$ $\qquad d\,c = 0.$

2. $(c \pm y)' = \pm y',$ $\qquad d\,(c \pm y) = \pm dy.$

3. $(cy)' = cy',$ $\qquad d\,(cy) = cdy.$

4. $\left(\dfrac{c}{y}\right)' = -\dfrac{cy'}{y^2},$ $\qquad d\left(\dfrac{c}{y}\right) = -\dfrac{cdy}{y^2}.$

5. $(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w',$ $d\,(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw.$

6. $(uv)' = vu' + uv',$ $\qquad d\,(uv) = vdu + udv.$

7. $(uvw\ldots\omega)' = u'vw\ldots\omega + uv'w\ldots\omega + \ldots + uvw\ldots\omega'.$
$d\,(uvw\ldots\omega) = vw\ldots\omega\,du + uw\ldots\omega\,dv + \ldots + uvw\ldots d\omega.$

8. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2},$ $\qquad d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}.$

9. $(y^n)' = n\,y^{n-1}\,y',$ $\qquad d\,(y^n) = n\,y^{n-1}\,dy.$

10. $(\sqrt{y})' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}},$ $\qquad d\,(\sqrt{y}) = \dfrac{dy}{2\sqrt{y}}.$

11. $(\sqrt{a^2 \pm y^2})' = \pm\dfrac{yy'}{\sqrt{a^2 \pm y^2}},$ $d\,(\sqrt{a^2 \pm y^2}) = \pm\dfrac{ydy}{\sqrt{a^2 \pm y^2}}.$

12. $(e^y)' = e^y y',$ $\qquad d\,(e^y) = e^y\,dy.$

13. $(A^y)' = A^y\,lg\,A\,y',$ $\qquad d\,(A^y) = A^y\,lg\,A\,dy.$

14. $(lg\,y)' = \dfrac{y'}{y},$ $\qquad d\,lg\,y = \dfrac{dy}{y}.$

15. $(Log\,y)' = \dfrac{y'\,Log\,e}{y},$ $\qquad d\,Log\,y = \dfrac{Log\,e\,dy}{y}.$

16. $(sin\,y)' = cos\,y\,.\,y',$ $\qquad d\,sin\,y = cos\,y\,.\,dy.$

17. $(cos\,y)' = -\,sin\,y\,.\,y',$ $\qquad d\,cos\,y = -\,sin\,y\,.\,dy.$

18. $(tg\,y)' = \dfrac{y'}{cos^2 y},$ $\qquad d\,tg\,y = \dfrac{dy}{cos^2 y}.$

19. $(cotg\, y)' = -\dfrac{y'}{sin^2 y}$, $\qquad d\, cotg\, y = -\dfrac{dy}{sin^2 y}$.

20. $(sec\, y)' = \dfrac{sin\, y\, .\, y'}{cos^2 y}$, $\qquad d\, sec\, y = \dfrac{sin\, y\, .\, dy}{cos^2 y}$.

21. $(cosec\, y)' = -\dfrac{cos\, y\, .\, y'}{sin^2 y}$, $\qquad d\, cosec\, y = -\dfrac{cos\, y\, .\, dy}{sin^2 y}$.

22. $(arc\, sin\, y)' = \dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}}$, $\qquad d\, arc\, sin\, y = \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

23. $(arc\, cos\, y)' = -\dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}}$, $\qquad d\, arc\, cos\, y = -\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

24. $(arc\, tg\, y)' = \dfrac{y'}{1+y^2}$, $\qquad d\, arc\, tg\, y = \dfrac{dy}{1+y^2}$.

25. $(arc\, cotg\, y)' = -\dfrac{y'}{1+y^2}$, $\qquad d\, arc\, cotg\, y = -\dfrac{dy}{1+y^2}$.

26. $(arc\, sec\, y)' = \dfrac{y'}{y\sqrt{y^2-1}}$, $\qquad d\, arc\, sec y = \dfrac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$.

27. $(arc\, cosec\, y)' = -\dfrac{y'}{y\sqrt{y^2-1}}$, $\qquad d arc\, cosec\, y = -\dfrac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$.

28. $(u^v)' = u^v\, lg\, u\, v' + v\, u^{v-1}\, u'$, $\qquad d\,(u^v) = u^v\, lg\, u\, dv + v\, u^{v-1}\, du$.

## § 111. *Примѣры на дифференцированіе явныхъ функцій отъ одной перемѣнной.*

1. $y = lg\dfrac{1+x}{1-x}$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{1-x^2}$.

2. $y = \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$.

3. $y = \dfrac{1+3x-3x^2}{3x^3-9\,{}^2x+9x-3}$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-2}{(x-1)^4}$.

4. $y = sin\,(x^m)$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = m\, cos\,(x^m).\, x^{m-1}$.

5. $y = lg\,(lg\, x)$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\, lg\, x}$.

6. $y = lg\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

7. $y = x^{\sin x}$, $\quad \frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left(\cos x \lg x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

8. $y = arc\,tg\,\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$, $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$.

9. $y = e^{a^x}$, $\quad \frac{dy}{dx} = y\,a^x \lg a$.

10. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.

11. $y = \frac{\sin x}{a + b\cos x}$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a\cos x + b}{(a + b\cos x)^2}$.

12. $y = arc\,tg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $y = \lg tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}$.

14. $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$, $\quad \frac{dy}{dx} = x^3 e^x$.

15. $y = arc tg\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}} tg\,\frac{x}{2}\right]$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a + b\cos x}$.

16. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\,arc\cos\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a + b\cos x}$.

### *Признаки убыванія и возрастанія функцій.*

§ 112. Функція $f(x)$ называется *возрастающей* въ промежуткѣ между числами $a$ и $b > a$, если для всѣхъ значеній $x$, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$a < x < b,$$

приращеніе функціи $\Delta f(x)$ одного знака съ приращеніемъ $\Delta x$ перемѣннаго независимаго. Если же знаки этихъ приращеній различны, то функція $f(x)$ называется *убывающей*. Въ первомъ случаѣ при возрастаніи $x$ функція $f(x)$ возрастаетъ, во второмъ случаѣ при возрастаніи $x$ функція $f(x)$ убываетъ.

§ 113. Не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующаго заключенія: *функція будетъ возрастающей, если для всѣхъ значеній $x$ въ промежуткѣ $(a, b)$ производная $f'(x)$ остается* *постоянно положительной, и функція будетъ убывающей, если эта производная остается постоянно отрицательной.*

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ на основаніи § 82

$$\Delta f(x) = \Delta x\,(f'(x) + \varepsilon). \tag{1}$$

Если производная $f'(x)$ положительна, то вблизи разсматриваемаго значенія $x$ можно указать столь малый промежутокъ $(x-\alpha, x+\beta)$, что въ этомъ промежуткѣ приращеніе $\Delta x$ будетъ достаточно мало, чтобы безконечно малая величина $\varepsilon$ оказалась меньше по абсолютной величинѣ, чѣмъ функція $f'(x)$.

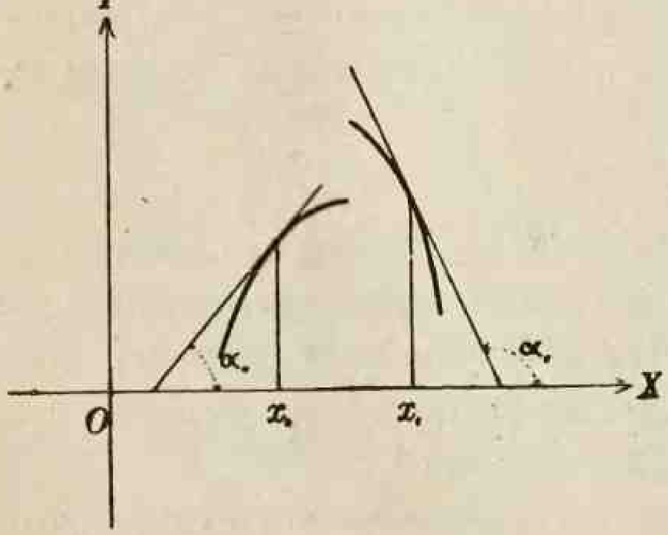
Тогда выраженіе въ скобкахъ въ правой части равенства (1) будетъ положительно для этого промежутка, значитъ, приращенія $\Delta f(x)$ и $\Delta x$ будутъ одного знака, и функція въ промежуткѣ $(x-\alpha, x+\beta)$ будетъ возрастающей.

Если же функція будетъ возрастать во всѣхъ частичныхъ промежуткахъ $(x-\alpha, x+\beta)$, то она будетъ возрастать и во всемъ промежуткѣ $(a, b)$.

Для возрастанія функціи въ какомъ нибудь промежуткѣ нѣтъ надобности требовать, чтобы для всѣхъ точекъ этого промежутка производная была непремѣнно положительная. Производная можетъ обращаться въ нуль для нѣкоторыхъ точекъ, необходимо только, чтобы при переходѣ черезъ нуль эта функція оставалась положительной, а не мѣняла своего знака.

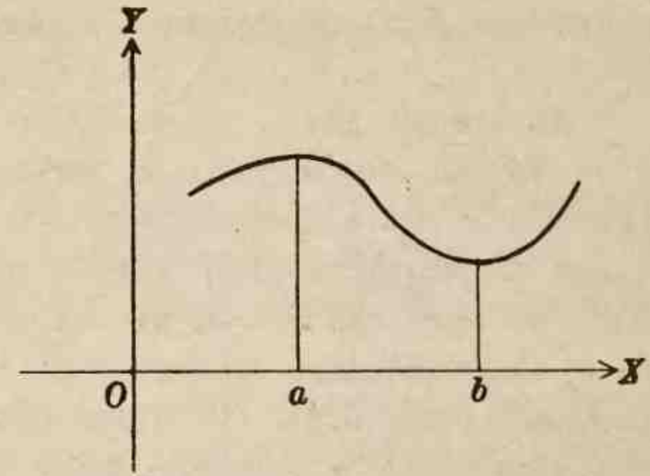
То же самое относится и къ убыванію функцій.

§ 114. Геометрически возрастаніе функціи при значеніи $x_0$ независимаго перемѣннаго характеризуется тѣмъ, что касательная въ соотвѣтственной точкѣ кривой образуетъ острый уголъ $\alpha_0$ (черт. 61) съ осью $x$-овъ; если же при значеніи $x_1$ функція убываетъ, то касательная въ той точкѣ кривой, въ которой абсцисса равняется $x_1$, образуетъ тупой уголъ $\alpha_1$ съ осью $x$-овъ.



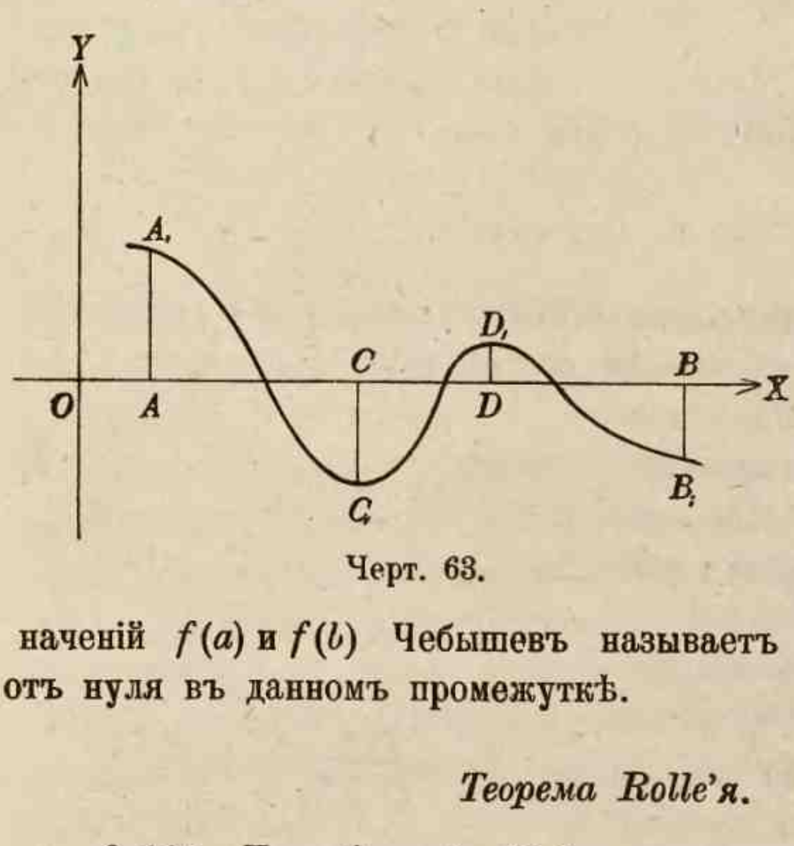
Черт. 61.

Говорятъ, что при возрастаніи перемѣннаго независимаго $x$ функція $f(x)$ имѣетъ *maximum* (наибольшее значеніе) $f(a)$ при значеніи $x=a$, если при переходѣ $x$ черезъ это значеніе $a$ функція изъ возрастающей дѣлается убывающей (черт. 62). Если же происходитъ обратное, т. е. при нѣкоторомъ значеніи $b$ функція изъ убывающей дѣлается возрастающей, то значеніе $f(b)$ носитъ названіе *minimum'a* (наименьшаго значенія) функціи.



Черт. 62.

Знаменитый русскій математикъ Чебышевъ ввелъ понятіе о такъ называемомъ *уклоненіи отъ нуля* функціи въ нѣкоторомъ данномъ промежуткѣ $(a, b)$ (черт. 63). Мы разсматриваемъ всѣ maxima $(DD_1)$ и всѣ minima $(-CC_1)$ функціи въ данномъ промежуткѣ, а также значенія функціи $f(a)$ и $f(b)$ для границъ прмежутка (въ разсматриваемомъ чертежѣ эти значенія суть $+AA_1$ и $-BB_1$). Наибольшую изъ абсолютныхъ величинъ разсматриваемыхъ maxima и minima, а также предѣльныхъ наченій $f(a)$ и $f(b)$ Чебышевъ называетъ уклоненіемъ функціи отъ нуля въ данномъ промежуткѣ.



Черт. 63.

## *Теорема Rolle'я.*

§ 115. *Если функція $f(x)$ и ея производная $f'(x)$ остаются непрерывными въ предѣлахъ промежутка $(A, B)$ и $f(x)$ обращается въ нуль при двухъ значеніяхъ $a$ и $b$, лежащихъ въ разсматриваемомъ промежуткѣ, такъ что*

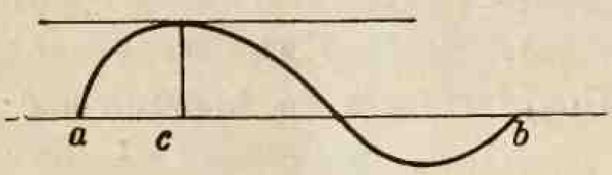
$$f(a)=0, f(b)=0,$$

*то существуетъ такое значеніе $c$ между $a$ и $b$, для котораго производная $f'(x)$ обращается въ нуль, т. е.*

$$f'(c)=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, производная $f'(x)$ не можетъ оставаться ни постоянно положительной, ни постоянно отрицательной при измѣненіи $x$ отъ $a$ до $b$, потому что въ этомъ случаѣ $f(x)$ была бы или все возрастающей, или все убывающей функціей и, обращаясь въ нуль для $x=a$, не могла бы быть нулемъ еще для $x=b$. Слѣдовательно, производная $f'(x)$ должна мѣнять знакъ въ промежуткѣ $(a, b)$. Но такъ какъ она непрерывна, то можетъ мѣнять знакъ не иначе, какъ обращаясь въ нуль для нѣкотораго значенія $x=c$, лежащаго между $a$ и $b$.

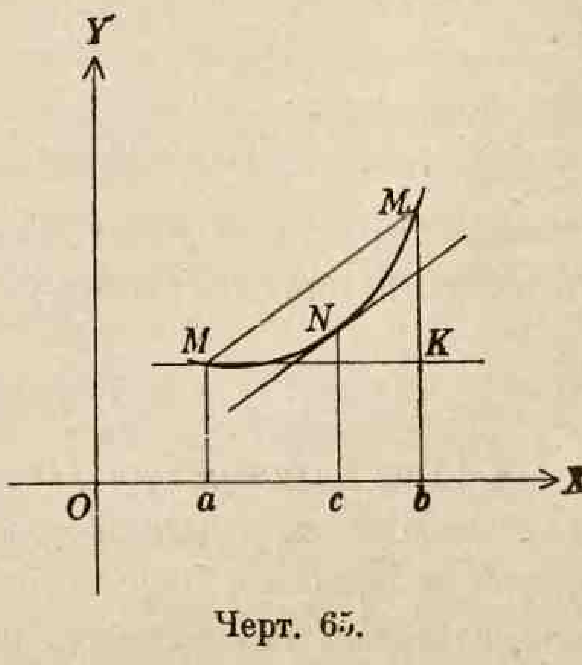
§ 116. Геометрически теорема *Rolle'я* можетъ быть интерпретирована такъ: если непрерывная кривая пересѣкаетъ ось $x$-овъ въ точкахъ $a$ и $b$ (черт. 64), то между этими точками существуетъ такое значеніе абсциссы $x=c$, при которомъ касательная параллельна оси $x$-овъ.



Черт. 64.

### *Теорема Lagrange'a.*

§ 117. Если мы разсмотримъ нѣкоторую хорду $MM_1$ (черт. 65) кривой линіи, то на основаніи соображеній предыдущаго §-а существуетъ на дугѣ $MM_1$ такая точка $N$, въ которой касательная параллельна хордѣ $MM_1$, ибо ось $x$-овъ при разсужденіяхъ предыдущаго §-а являлась нѣкоторой хордой. Мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ *Lagrange'a*.



Черт. 65.

*Если функція $f(x)$ конечна и непрерывна для всѣхъ значеній $x$ въ промежуткѣ отъ $A$ до $B$, и, кромѣ того, производная $f'(x)$ непрерывна въ томъ же промежуткѣ, то для всякихъ двухъ* *значеній $x=a$ и $x=b$, лежащихъ въ этомъ промежуткѣ, имѣетъ мѣсто равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \tag{1}$$

*гдѣ $c$ заключается между $a$ и $b$.*

Въ самомъ дѣлѣ, если мы возьмемъ за числа $a$ и $b$ абсциссы концовъ $M$ и $M_1$ хорды, а за $c$ абсциссу точки касанія $N$, то параллельность касательной въ точкѣ $N$ съ хордой $MM_1$, очевидно, выражается равенствомъ (1).

§ 118. Формулу *Lagrange'a* можно переписать въ такомъ видѣ, удобномъ для приложеній. Замѣнимъ $a$ черезъ $x$, $b$ черезъ $x+\Delta x$, тогда получаемъ

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x+\vartheta\,\Delta x),$$

гдѣ $\vartheta$ положительная правильная дробь, т. е. $0<\vartheta<1$.

Послѣднюю формулу можно переписать такъ:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x\,f'(x+\vartheta\,\Delta x).$$

### *Частныя производныя и частные дифференціалы. Полные дифференціалы.*

§ 119. Пусть

$$f(x, y, z, \ldots t)$$

есть нѣкоторая функція отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Эту функцію мы можемъ разсматривать, какъ функцію отъ одной перемѣнной $x$, если всѣ остальныя буквы $y, z, \ldots t$ будемъ считать постоянными числами. Производную, взятую по буквѣ $x$ въ такомъ предположеніи, мы, очевидно, найдемъ по изложеннымъ выше правиламъ дифференцированія и будемъ ее называть *частной производной функціи по $x$*. Подобнымъ же образомъ можно разсматривать частныя производныя по всѣмъ остальнымъ буквамъ.

Такія частныя производныя можно обозначить символами

$$f'_x(x, y, z, \ldots t), f'_y(x, y, z, \ldots t), \ldots f'_t(x, y, z, \ldots t).$$

Въ этихъ символахъ мы пишемъ въ скобкахъ значенія перемѣнныхъ независимыхъ, чтобы показать, что частныя производныя суть въ свою очередь нѣкоторыя функціи отъ этихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Очень часто употребляются слѣдующія обозначенія Jacobi для частныхъ производныхъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Что касается знака

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{1}$$

то мы замѣчаемъ, что если мы остальныя перемѣнныя кромѣ $x$ будемъ считать постоянными величинами, а не перемѣнными независимыми, то эту производную можно будетъ написать такъ:

$$\frac{df}{dx}. \tag{2}$$

Итакъ, мы видимъ, что знакъ (1) не отличается по существу ничѣмъ отъ знака (2). Круглыя буквы ставятся только для того, чтобы подчеркнуть, что остальныя перемѣнныя $y, z, \ldots t$, хотя и остаются постоянными при дифференцированіи, но все таки въ разсматриваемомъ вопросѣ являются величинами перемѣнными, т. е. другими словами, понятіе о частной производной отличается отъ понятія объ обыкновенной производной только названіемъ, которое мы придаемъ остальнымъ перемѣннымъ величинамъ, входящимъ въ функцію.

Въ высшей степени важно обратить вниманіе на то, что знакъ Jacobi не подлежитъ расчлененію, т. е. его нельзя разсматривать, какъ частное отъ дѣленія $\partial f$ на $\partial x$; его можно писать только въ полномъ видѣ (1).

Разсмотримъ примѣръ

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x + y.$$

§ 120. Произведеніе частной производной по какой-нибудь перемѣнной на дифференціалъ этой перемѣнной или, что одно и то же, на произвольное приращеніе перемѣнной (ибо дифференціалъ независимой перемѣнной совпадаетъ съ ея приращеніемъ) называется *частнымъ дифференціаломъ* функціи по этой перемѣнной. Для частныхъ дифференціаловъ употребляются знаки

$$d_x f = \frac{\partial f}{\partial x} dx,\ d_y f = \frac{\partial f}{\partial y} dy, \ldots d_t f = \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

На основаніи этого обозначенія частныя производныя могутъ быть обозначены знаками

$$\frac{d_x f}{dx}, \frac{d_y f}{dy}, \ldots \frac{d_t f}{dt}.$$

Эти знаки представляютъ собою уже обыкновенныя дроби, въ которыхъ можно отдѣлять числителя отъ знаменателя.

§ 121. Сумма всѣхъ частныхъ цифференціаловъ, взятыхъ по всѣмъ независимымъ перемѣннымъ, отъ которыхъ функція зависитъ, называется *полнымъ дифференціаломъ* функціи и обозначается буквой $d$. Такимъ образомъ дифференціалъ функціи напишется въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t} dt,$$

$$df = d_x f + d_y f + \ldots + d_t f,$$

$$df = f_x' dx + f_y' dy + \ldots + f_t' dt.$$

*Дифференцированіе сложныхъ функцій.*

§ 122. Функція

$$f(x, y, z, \ldots)$$

отъ нѣсколькихъ аргументовъ $x, y, z, \ldots$ называется *сложной* функціей отъ одной независимой перемѣнной $t$, если аргументы $x, y, z, \ldots$ суть нѣкоторыя функціи отъ этой перемѣнной независимой $t$, такъ что

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t), \ldots$$

Конечно, для нахожденія производной сложной функціи можно было бы поступить такъ: замѣнить всѣ аргументы ихъ выраженіями черезъ $t$ и потомъ уже продифференцировать по $t$. На практикѣ оказывается болѣе полезнымъ искать производную сложной функціи, не выражая эту сложную функцію предварительно черезъ независимыя перемѣнныя. Къ такому пріему дифференцированія мы приходимъ по двумъ мотивамъ; во-первыхъ, иногда зависимость между аргументами $x, y, z, \ldots t$ можетъ быть задана неявно, напримѣръ, можетъ быть задано уравненіе

$$\varphi(x, t) = 0,$$

причемъ выразить явно $x$ черезъ $t$ при помощи рѣшенія послѣдняго уравненія представляетъ большія затрудненія; но главнымъ мотивомъ для составленія особаго правила для дифференцированія функцій сложныхъ является то обстоятельство, что это правило можетъ быть высказано очень просто.

§. 123. Разсмотримъ сначала одинъ частный примѣръ. Пусть

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz. \tag{1}$$

Предположимъ, что аргументы $x, y, z$ суть функціи отъ нѣкотораго одного перемѣннаго независимаго. Если мы будемъ брать дифференціалъ отъ обѣихъ частей уравненія (1), то, какъ мы видѣли въ § 99, для такой операціи нѣтъ надобности вводить независимую перемѣнную $t$ явно, и мы получаемъ

$$\begin{aligned} df = d(xy) + d(xz) + d(yz) = ydx + xdy + zdx + xdz + \\ + zdy + ydz = (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (y+x)\,dz = \\ = f'_x(x, y, z)\,dx + f'_y(x, y, z)\,dy + f'_z(x, y, z)\,dz. \end{aligned}$$

Итакъ, мы видимъ, что дифференціалъ отъ функціи сложной имѣетъ тотъ же внѣшній видъ, что и полный дифференціалъ отъ этой функціи, только будетъ другой смыслъ дифференціаловъ аргументовъ $dx, dy, dz \ldots$ Эти дифференціалы будутъ выражаться по формуламъ

$$dx = \varphi'(t)\,dt,\ dy = \psi'(t)\,dt,\ dz = \omega'(t)\,dt, \ldots$$

и заключать одну только произвольную величину $dt$; кромѣ того, эти дифференціалы зависятъ отъ самой перемѣнной независимой $t$, которая можетъ входить въ производныя

$$\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t), \ldots$$

§ 124. Разсмотримъ теперь самый общій случай сложной функціи $f(x, y, z, \ldots)$, въ которой аргументы $x, y, z, \ldots$ суть функціи отъ ряда настоящихъ перемѣнныхъ независимыхъ

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots$$

Ясное дѣло, что, если мы будемъ дифференцировать нашу функцію по $\xi$, считая $\eta, \zeta, \ldots$ постоянными, то дифференціалы по $\xi$ будутъ браться по правиламъ предыдущаго §-а, только вмѣсто обыкновенныхъ дифференціаловъ отъ одной перемѣнной независимой придется брать частные дифференціалы, т. е. будетъ

(1) $$d_\xi f = \frac{\partial f}{\partial x} d_\xi x + \frac{\partial f}{\partial y} d_\xi y + \frac{\partial f}{\partial z} d_\xi z + \ldots$$

Совершенно подобнымъ же образомъ получимъ частные дифференціалы по другимъ перемѣннымъ независимымъ

(2) $$\begin{aligned} d_\eta f &= \frac{\partial f}{\partial x} d_\eta x + \frac{\partial f}{\partial y} d_\eta y + \frac{\partial f}{\partial z} d_\eta z + \ldots \\ d_\zeta f &= \frac{\partial f}{\partial x} d_\zeta x + \frac{\partial f}{\partial y} d_\zeta y + \frac{\partial f}{\partial z} d_\zeta z + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Если мы сложимъ формулы (1) и (2), то можемъ суммы частныхъ дифференціаловъ замѣнить полными дифференціалами, и мы получаемъ формулу

(3) $$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots$$

Мы замѣчаемъ, что формула для полнаго дифференціала остается той же самой.

Итакъ, формула (3) можетъ быть употребляема во всѣхъ случаяхъ, какое бы значеніе ни имѣли аргументы $x, y, z, \ldots$ Если эти аргументы будутъ независимыми перемѣнными, то въ формулѣ (3) $dx, dy, dz, \ldots$ суть произвольныя величины; если аргументы эти зависятъ отъ одной независимой перемѣнной, то формула даетъ дифференціалъ сложной функціи отъ одной независимой перемѣнной. Наконецъ, если аргументы суть функціи отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, то формула (3) даетъ выраженіе для полнаго дифференціала сложной функціи $f(x, y, z, \ldots)$, причемъ $dx, dy, dz, \ldots$ будутъ уже полными дифференціалами аргументовъ.

§ 125. Предположимъ, что формула (3) предыдущаго §-а примѣняется къ случаю сложной функціи отъ одной независимой перемѣнной $t$. Тогда, раздѣляя обѣ части на $dt$, получаемъ правило нахожденія производной сложной функціи:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \ldots$$

Совершенно подобнымъ образомъ можно воспользоваться формулами (1) и (2) предыдущаго §-а для нахожденія частныхъ производныхъ сложныхъ функцій отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}+\ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}+\ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Поясимъ нашу теорію примѣромъ. Возьмемъ функцію

(1) $$f(x,y)=x^2+y^2,$$

гдѣ

(2) $$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Примѣняя предыдущія правила, будемъ имѣть

$$\frac{df}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=$$

$$=2\left\{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2)(-2t)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}+\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2).\,2-2t\,.\,2t}{(1+t^2)^2}\right\}=$$

$$=0.$$

Этотъ результатъ можно было предвидѣть, ибо послѣ подстановки въ формулу (1) выраженій (2), получаемъ

$$f(x,y)=1.$$

*Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ функціи отъ одной перемѣнной.*

§ 126. Пусть

$$y=f(x)$$

есть нѣкоторая функція отъ независимой перемѣнной $x$. Производная

$$y'=f'(x)$$

есть, вообще говоря, новая функція отъ той же перемѣнной $x$. Производная отъ этой новой функціи $y'$ называется *производной второго порядка* или *второй производной* отъ первоначальной функціи $y$ и обозначается знаками

$$(y')'=y''=f''(x).$$

Производная отъ второй производной называется производной третьяго порядка или третьей производной и обозначается черезъ

$$y'''=f'''(x).$$

Составляя послѣдовательно производныя четвертаго, пятаго и т. д. порядковъ, мы можемъ дойти до производной какого угодно порядка $n$, которая обозначается черезъ

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

Такъ, напримѣръ, если

$$y = x^5,$$

то

$$y' = 5x^4, y'' = 20x^3, y''' = 60x^2,$$
$$y^{\mathrm{IV}} = 120x, y^{\mathrm{V}} = 120, y^{\mathrm{VI}} = 0.$$

§ 127. Разсмотримъ дифференціалъ отъ дифференціала функціи. Будемъ называть такой дифференціалъ *дифференціаломъ второго порядка* или *вторымъ дифференціаломъ* функціи и обозначать его

$$d^2 y,$$

такъ что

$$d(dy) = d^2 y.$$

Имѣемъ, слѣдовательно,

$$d^2 y = d(dy) = d[f'(x)\,dx] = df'(x)\,dx + f'(x)\,d(dx).$$

Но дифференціалъ независимаго перемѣннаго $dx$ есть произвольная величина, независящая отъ той перемѣнной, по которой мы дифференцируемъ, значитъ, его надо разсматривать, какъ произвольную *постоянную*, слѣдовательно, $d(dx) = 0$, и мы имѣемъ

$$d^2 y = df'(x)\,dx = [f''(x)\,dx]\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

Дифференцируя дальше, будемъ получать дифференціалы третьяго, четвертаго и т. д. порядковъ, которыя мы будемъ обозначать знаками

$$d^3 y, d^4 y, \ldots$$

Очевидно, что мы будемъ получать формулы

$$d^3 y = f'''(x)\,dx^3,$$
$$d^4 y = f^{\mathrm{IV}}(x)\,dx^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

§ 128. Необходимо замѣтить, что существуетъ одно соглашеніе, не претерпѣвающее исключенія, строго различать знаки

$$dy^n, d^n y, d(y^n),$$

причемъ знакъ $dy^n$ обозначаетъ всегда $n$-ую степень дифференціала $y$, знакъ $d^n y$ обозначаетъ всегда $n$-ый дифференціалъ отъ функціи $y$, и, наконецъ, знакъ $d(y^n)$ обозначаетъ дифференціалъ функціи $y^n$.

§ 129. Итакъ, мы видимъ, что производная $n$-аго порядка можетъ быть символически обозначена такъ:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

### *Формула Leibniz'a.*

§ 130. Будемъ дифференцировать произведеніе двухъ функцій

$$y = uv.$$

Тогда первый дифференціалъ напишется такъ:

$$dy = u\,dv + v\,du,$$

второй дифференціалъ будетъ

$$d^2u = d(u\,dv + v\,du) = u\,d^2v + du\,dv + v\,d^2u + dv\,du =$$
$$= u\,d^2v + 2\,du\,dv + v\,d^2u.$$

Для третьяго дифференціала получимъ

$$d^3y = u\,d^3v + 3\,du\,d^2v + 3\,d^2u\,dv + v\,d^3u.$$

Получаемъ вообще формулу

$$d^n y = u\,d^n v + \frac{n}{1} du\,d^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} d^2u\,d^{n-2}v + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1} d^{n-1}u\,dv + d^n u . v.$$

### *Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ функцій отъ функцій.*

§ 131. Мы видѣли въ § 99, что, дифференцируя равенство

(1) $$y = f(u),$$

получаемъ

(2) $$dy = f'(u)\,du$$

совершенно независимо отъ того, есть ли $u$ перемѣнная независимая или функція.

Если мы хотимъ дифференцировать формулу (2) еще нѣсколько разъ, тогда надо указать значеніе аргумента $u$. Мы разсмотрѣли уже въ §§ 126—129 случай, когда аргументъ былъ независимой перемѣнной. Теперь мы переходимъ къ случаю, когда аргументъ $u$ есть функція отъ настоящей перемѣнной независимой $x$:

$$u = \varphi(x).$$

Можно, однако, продолжать дифференцированіе, не вводя явнымъ образомъ въ разсмотрѣніе $x$. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя равенство (2), получаемъ

$$d^2 y = d\,[f'(u)\,du] = d\,[f'(u)]\,du + f'(u)\,d\,(du) =$$
$$= f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2 u.$$

Если мы раздѣлимъ обѣ части равенства (3) на $dx^2$ и замѣнимъ дифференціалы производными, т. е. напишемъ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'', \frac{du}{dx} = u', \frac{d^2 u}{dx^2} = u'',$$

то получимъ формулу

(4) $$y'' = f''(u)\,(u')^2 + f'(u)\,u''.$$

Формулу (4) мы можемъ еще разъ дифференцировать. Для разнообразія продифференцируемъ ее безъ знаковъ дифференціала, тогда имѣемъ

$$y''' = [f''(u)\,(u')^2]' + [f'(u)\,u'']' = [f''(u)]'\,(u')^2 + f''(u)\,[(u')^2]' +$$
$$+ [f'(u)]'u'' + f'(u)\,u''' = f'''(u)\,(u')^3 + 3\,f''(u)\,u'\,u'' + f'(u)\,u'''.$$

Подобнымъ образомъ можемъ продолжать дальнѣйшее дифференцированіе.

§ 132. Поясннмъ сказанное примѣромъ. Будемъ дифференцировать функцію

(1) $$y = u^4,$$

гдѣ

(2) $$u^2 = x.$$

Получаемъ

$$dy = 4\,u^3\,du,$$

3) $$d^2 y = 12u^2\,du^2 + 4\,u^3\,d^2 u,$$

$$d^3 y = 24\,u\,du^3 + 24\,u^2\,du\,d^2 u + 12\,u^2\,du\,d^2 u + 4\,u^3\,d^3 u =$$
$$= 24\,u\,du^3 + 36\,u^2\,du\,d^2 u + 4\,u^3\,d^3 u.$$

Всѣ дифференціалы порядка выше перваго отъ $u$ можно замѣнить на основаніи тѣхъ соотношеній, которыя получаются отъ дифференцированія равенства (2). Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя это равенство, получимъ

(4) $$2\,u\,du = dx.$$

Такъ какъ $x$ независимая перемѣнная, то $dx$ число постоянное при дальнѣйшемъ дифференцированіи, и мы имѣемъ

(5) $$u\,d^2u + du^2 = 0,$$

(6) $$u\,d^3u + 3\,du\,d^2u = 0.$$

Изъ равенствъ (5) и (6) имѣемъ

$$d^2u = -\frac{du^2}{u},$$

$$d^3u = -\frac{3\,du\,d^2u}{u} = \frac{3\,du^3}{u^2}.$$

Отсюда формулы (3) получаютъ видъ

(7) $$\begin{aligned} dy &= 4\,u^3\,du, \\ d^2y &= 8\,u^2\,du^2, \\ d^3y &= 0. \end{aligned}$$

Раздѣляя обѣ части формулъ (7) на $dx$, $dx^2$ и $dx^3$, получимъ

$$y' = 2\,u^2,\ y'' = 2,\ y''' = 0.$$

*Частныя производныя и полные дифференціалы высшихъ порядковъ.*

§ 133. Возьмемъ функцію отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Для сокращенія письма ограничимся случаемъ трехъ перемѣнныхъ:

$$u = f(x, y, z).$$

Разсмотримъ три частныя производныя этой функціи

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Эти частныя производныя суть въ свою очередь нѣкоторыя функціи отъ $x$, $y$, $z$, такъ что можно искать отъ нихъ новыя частныя производныя по каждой изъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Производная, взятая по $x$ отъ $\frac{\partial u}{\partial x}$ обозначается такъ:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и носитъ названіе второй частной производной, взятой два раза по $x$, или частной производной второго порядка, взятой два раза по $x$.

Подобнымъ образомъ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ обозначаетъ вторую частную производную отъ $u$, взятую два раза по $y$, и знакъ $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ обозначаетъ вторую частную производную, взятую два раза по $z$. Если возьмемъ производную по $y$ отъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, то получимъ вторую частную производную отъ $u$, взятую сначала по $x$, а потомъ по $y$, которая обозначается такъ:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.$$

Если мы вторую частную производную возьмемъ въ обратномъ порядкѣ, сначала по $y$, а потомъ по $x$, то это мы будемъ обозначать такъ:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

Подобнымъ же образомъ получаются частныя производныя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y},\ldots$$

Очевидно, что если будутъ три перемѣнныя независимыя, то частныхъ производныхъ второго порядка будетъ девять, ибо отъ каждой изъ трехъ частныхъ производныхъ перваго порядка можно взять по три частныхъ производныхъ.

§ 134. Вычислимъ, напримѣръ, вторыя частныя производныя функціи

$$u=x^2y^4+2z^4x+y.$$

Мы получаемъ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^4+2z^4,\ \frac{\partial u}{\partial y}=4x^2y^3+1,\ \frac{\partial u}{\partial z}=8z^3x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y^4,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=8xy^3,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=8z^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=8xy^3,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12x^2y^2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}=8z^3,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=24z^2x.$$

На нашемъ примѣрѣ мы видимъ, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y},$$

т. е. что *результатъ дифференцированія не измѣняется отъ порядка частнаго дифференцированія.* Это свойство частныхъ производныхъ сохраняется при любомъ числѣ перемѣнныхъ независимыхъ и при производныхъ любого порядка. Мы не будемъ здѣсь доказывать этого свойства, отсылая читателей къ болѣе подробнымъ курсамъ дифференціальнаго исчисленія.

§ 135. Символомъ

$$\frac{\partial^{m+n+p} u}{\partial x^m\, \partial y^n\, \partial z^p} \tag{1}$$

мы будемъ обозначать производную порядка $m+n+p$, взятую $m$ разъ по $x$, $n$ разъ по $y$ и $p$ разъ по $z$. Если мы частную производную (1) умножимъ на произведеніе дифференціаловъ $dx^m\, dy^n\, dz^p$ перемѣнныхъ независимыхъ, то получимъ такъ называемый *частный дифференціалъ* функціи, взятый $m$ разъ по $x$, $n$ разъ по $y$, $p$ разъ по $z$. Этотъ частный дифференціалъ мы будемъ обозначать такъ:

$$d_{\underbrace{xx\ldots x}_{m}\ \underbrace{yy\ldots y}_{n}\ \underbrace{zz\ldots z}_{p}} u = d_{m,n,p}\, u.$$

Сумма всевозможныхъ частныхъ дифференціаловъ нѣкотораго порядка $N$ отъ функціи $u$, взятыхъ во всевозможныхъ порядкахъ послѣдовательности дифференцированія, носитъ названіе *полнаго дифференціала порядка* $N$ отъ функціи $u$; онъ обозначается такъ:

$$d^N u.$$

Поясннмъ это понятіе о полномъ дифференціалѣ на примѣрѣ. Возьмемъ случай двухъ перемѣнныхъ независимыхъ:

$$u = f(x, y).$$

Тогда мы получимъ четыре вторыхъ частныхъ дифференціала

$$d_{xx} u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2, \quad d_{xy} u = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} dx\, dy,$$

$$d_{yx} u = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} dy\, dx, \quad d_{yy} u = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Второй полный дифференціалъ будетъ выражаться по формулѣ

$$d^2 u = d_{xx} u + d_{xy} u + d_{yx} u + d_{yy} u =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

§ 136. Легко видѣть, что второй полный дифференціалъ можно разсматривать, какъ полный дифференціалъ отъ перваго полнаго дифференціала, если только считать дифференціалы независимыхъ перемѣнныхъ числами постоянными при дифференцированіи. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\,,$$

откуда

$$d^2 u = d\,(du) = \frac{\partial\,(du)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\,(du)}{\partial y}\,dy =$$

$$= \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial\,x^2}\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,dy\right\}dx + \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy\right\}dy,$$

т. е. получается какъ разъ та формула, которая была выведена выше.

§ 137. Очевидно, что при нахожденіи высшихъ дифференціаловъ сложныхъ функцій полные дифференціалы высшихъ порядковъ будутъ играть такую же роль, какъ полный дифференціалъ перваго порядка при разсужденіяхъ § 124.

### *Дифференцированіе функцій неявныхъ.*

§ 138. Пусть задано уравненіе

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Это уравненіе даетъ каждую изъ буквъ $x$, $y$, какъ функцію отъ другой буквы.

Извѣстно, что лишь немногія уравненія допускаютъ удобное рѣшеніе относительно неизвѣстной, а потому на каждомъ шагу на практикѣ встрѣчается надобность разсматривать неявныя функціи, опредѣляемыя уравненіями, которыхъ мы рѣшать въ общемъ видѣ не умѣемъ. Оказывается, что мы можемъ найти производную отъ $y$ по $x$, не обращая функцію $y$ предварительно въ явную.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы въ уравненіи (1) будемъ разумѣть подъ $y$ ту функцію, которая этимъ уравненіемъ опредѣляется, то это уравненіе (1) мы должны будемъ считать тождествомъ относительно $x$, причемъ въ первой части этого тождества мы имѣемъ функцію $f(x, y)$ отъ двухъ аргументовъ, изъ которыхъ одинъ $x$ есть независимая перемѣнная, а другой $y$ нѣкоторая опредѣленная ея функція. Такъ какъ мы имѣемъ право всякое тождество дифференцировать по любой изъ входящихъ въ него буквъ, то дифференцируя по $x$, мы получимъ

$$f_x'(x,y)\,dx + f_y'(x,y)\,dy = 0,$$

откуда

(2) $$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}.$$

Конечно, получилось выраженіе для производной, заключающее обѣ перемѣнныя, какъ $x$, такъ и $y$, но это неудобство не представляется особенно существеннымъ, ибо, если мы хотимъ найти частныя значенія производной (2) при частномъ значеніи $x_0$ перемѣнной независимой, придется вычислить соотвѣтственное значеніе $y_0$ по уравненію

(3) $$f(x_0, y) = 0.$$

Вопросъ о нахожденіи численнаго значенія неизвѣстнаго представляется вопросомъ болѣе простымъ. Существуютъ общіе методы приближеннаго рѣшенія уравненій (3) съ однимъ неизвѣстнымъ $y$, дающіе возможность вычислить съ какой угодно степенью точности корни какъ алгебраическихъ, такъ и трансцендентныхъ уравненій.

Кромѣ сказаннаго выраженіе (2) даетъ возможность вмѣстѣ съ уравненіемъ (1) судить объ измѣненіи производной $y'$, ибо, дифференцируя уравненіе (2), можно получить выраженіе для производныхъ $y''$, $y'''$ и т. д.

§ 139. Напримѣръ, пусть будетъ задано уравненіе

(1) $$x^3 + y^3 - 3xy = 0,$$

опредѣляющее неявно функцію $y$.

Хотя это уравненіе можно рѣшить по формуламъ Cardan'a относительно $y$ и обратить такимъ образомъ функцію въ явную, но въ виду неудобства дифференцированія радикальныхъ выраженій можно посовѣтовать примѣнять вышеизложенныя правила дифференцированія функцій неявныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя по $x$, получимъ

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0,$$

откуда

(2) $$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Найдемъ численное значеніе производной $y'$, соотвѣтствующее значенію $x = \frac{3}{2}$. Подставляя это значеніе въ уравненіе (1), получимъ

$$y^3 - \frac{9}{2}y + \frac{27}{8} = 0.$$

Это уравненіе можно представить въ видѣ

$$\left(y - \frac{3}{2}\right)\left(y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{9}{4}\right) = 0;$$

получаемъ значеніе $y$:

$$y_1 = \frac{3}{2},\, y_2 = \frac{3}{4}\left(-1 + \sqrt{5}\right),\, y_3 = \frac{3}{4}\left(-1 - \sqrt{5}\right).$$

Получаемъ три соотвѣтственныхъ значенія производной: для значеній $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2}$ получается

$$y' = -1,$$

для значеній $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{4}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$ получимъ

$$y' = \frac{5 + 7\sqrt{5}}{10}.$$

и, наконецъ, для значеній $= \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{4}\left(-1 - \sqrt{5}\right)$ получимъ

$$y' = \frac{5 - 7\sqrt{5}}{10}.$$

Если мы хотимъ найти вторую производную, то придется дифференцировать равенство (2), и мы имѣемъ

$$y'' = \frac{(y^2 - x)(y' - 2x) - (y - x^2)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2}.$$

Въ это выраженіе придется подставить значеніе первой производной изъ равенства (2). Тогда для второй производной получимъ окончательное выраженіе

$$y'' = -2\,\frac{x(y^2 - x)^2 - (y^2 - x)(y - x^2) + y(y - x^2)^2}{(y^2 - x)^3}.$$

§ 140. Правила для дифференцированія неявныхъ функцій отъ одной перемѣнной независимой распространяются на случай какого угодно числа перемѣнныхъ независимыхъ. Въ виду того, что обобщеніе это представляется совершенно очевиднымъ, мы ограничимся разсмотрѣніемъ частнаго примѣра.

Пусть задано уравненіе

$$x^2+y^2+z^2=1, \tag{1}$$

которое опредѣляетъ неявнымъ образомъ букву $z$, какъ функцію отъ двухъ перемѣнныхъ $x$ и $y$. Будемъ искать частныя производныя функціи $z$ по этимъ перемѣннымъ независимымъ. Дифференцируя уравненіе (1) по $x$, получаемъ

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

или

$$x+z\frac{\partial z}{\partial x}=0. \tag{2}$$

Здѣсь мы, конечно, при дифференцированіи по $x$ считали $y$ постояннымъ. Дифференцируя по $y$, получимъ

$$y+z\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{3}$$

откуда частныя производныя имѣютъ видъ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}. \tag{4}$$

Если мы желаемъ вычислить вторую производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, то придется первое изъ уравненій (4) дифференцировать по $y$; мы будемъ имѣть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{z^3}.$$

### *Формулы Taylor'а и Maclaurin'а.*

§ 141. Пусть $f(x)$ есть цѣлая функція $(n-1)$-ой степени отъ $x$, такъ что

$$f(x)=p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n, \tag{1}$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$ постоянныя величины. Замѣнивъ $x$ черезъ $x+h$, получимъ

$$f(x+h)=p_1(x+h)^{n-1}+p_2(x+h)^{n-2}+\ldots+p_{n-1}(x+h)+p_n.$$

Раскрывая степени двучлена $x+h$ по формулѣ бинома Newton'а и собирая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ $h$, получимъ результатъ вида

(2) $f(x+h)=X_0+X_1 h+X_2 h^2+\ldots+X_{n-2} h^{n-2}+X_{n-1} h^{n-1}$,

гдѣ $X_0, X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$ не содержатъ $h$ и суть нѣкоторыя функціи отъ $x$. Для нахожденія ихъ дифференцируемъ тождество (2) $n-1$ разъ по $h$, разсматривая $x$, какъ постоянное; тогда

$$f'(x+h)=X_1+2X_2 h+3X_3 h^2+\ldots+(n-1)X_{n-1}h^{n-2},$$
$$f''(x+h)=2X_2+3.2X_3 h+4.3X_4 h^2+\ldots$$
$$\ldots+(n-1)(n-2)X_{n-1}h^{n-3},$$

(3) $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n-2)}(x+h)=(n-2)(n-3)\ldots 2.1.X_{n-2}+$$
$$+(n-1)(n-2)\ldots 2.1.X_{n-1}h,$$
$$f^{(n-1)}(x+h)=(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2.1.X_{n-1}.$$

Полагая въ формулахъ (2) и (3) $h=0$, получимъ

$$X_0=f(x),$$
$$X_1=f'(x),$$
$$X_2=\frac{f''(x)}{1.2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{n-2}=\frac{f^{(n-2)}(x)}{1.2\ldots(n-2)},$$
$$X_{n-1}=\frac{f^{(n-1)}(x)}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Подставляя найденныя значенія коэффиціентовъ въ формулу (2), получимъ *формулу Taylor'a* для цѣлой функціи степени $n-1$:

(4) $$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x).$$

Замѣняя въ этой формулѣ букву $x$ буквой $a$ и полагая затѣмъ $h=x-a$, можно написать формулу Taylor'a въ слѣдующемъ видѣ:

$$(5)\qquad f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\,.\,2}f''(a)+\dots$$
$$\dots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\,.\,2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(a)\,.$$

§ 142. Возьмемъ теперь произвольную функцію $f(x)$, не цѣлую. Тогда, очевидно, формула Taylor'a (5) предыдущаго §-а уже не имѣетъ мѣста. Въ этомъ случаѣ будетъ имѣть мѣсто такая формула:

$$(1)\qquad f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\,.\,2}f''(a)+\dots$$
$$\dots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\,.\,2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+R_n\,,$$

гдѣ $R_n$, вообще говоря, не будетъ равно нулю ни при какомъ значеніи $n$. Это число $R_n$ носитъ названіе *дополнительнаго* или *остаточнаго члена* формулы Taylor'a.

Lagrange сдѣлалъ весьма важное замѣчаніе относительно величины этого члена, послужившее исходнымъ пунктомъ для продолжающихся до сихъ поръ изслѣдованій о формулѣ Taylor'a. Приступимъ къ изложенію соображеній Lagrange'a. Положимъ

$$(2)\qquad R_n=(x-a)^n N.$$

Тогда, перенося всѣ члены формулы (1) въ первую часть, получаемъ

$$(3)\qquad f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-\frac{(x-a)^2}{1\,.\,2}f''(a)-\dots$$
$$\dots-\frac{(x-a)^{n-1}}{1\,.\,2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(a)-(x-a)^n N=0.$$

Разсмотримъ теперь нѣкоторую вспомогательную функцію $\varphi(z)$, выраженіе для которой получается замѣной буквы $a$ буквой $z$ въ равенствѣ (3), т. е. другими словами, положимъ

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-(x-z)f'(z)-\frac{(x-z)^2}{1\,.\,2}f''(z)-\dots$$
$$\dots-\frac{(x-z)^{n-1}}{1\,.\,2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(z)-(x-z)^n N.$$

Относительно этой функціи $\varphi(z)$ замѣтимъ, что имѣютъ мѣсто равенства

$$\varphi(a)=0, \varphi(x)=0;$$

первое равенство есть не что иное, какъ равенство (3), второе очевидно по самому выраженію функціи $\varphi(z)$. Предположимъ, что непрерывны функціи $f(z), f'(z), \ldots f^{(n)}(z)$; тогда будутъ непрерывны функціи $\varphi(z)$ и $\varphi'(z)$, и по теоремѣ Rolle'я мы заключаемъ, что $\varphi'(z)$ должно обратится въ нуль для нѣкотораго значенія $z$, промежуточнаго между $a$ и $x$, т. е. при

$$z=a+\theta(x-a),$$

гдѣ $\theta$ положительная правильная дробь. Составляя производную $\varphi'(z)$, мы замѣчаемъ, что сокращается цѣлый рядъ членовъ, и эта производная выражается очень просто:

$$\varphi'(z)=n(x-z)^{n-1}\left(N-\frac{1}{1.2\ldots(n-1)n}f^{(n)}(z)\right).$$

Подставляя сюда $z=a+\theta(x-a)$ и приравнивая на основаніи вышесказаннаго результатъ подстановки нулю, получимъ

$$N=\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n}f^{(n)}\Big(a+\theta(x-a)\Big).$$

Отсюда дополнительный членъ формулы Taylor'a будетъ имѣть видъ

$$(4) \qquad R_n=\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots(n-1)n}f^{(n)}\Big(a+\theta(x-a)\Big).$$

Эта формула (4) представляетъ весьма важную теорему Lagrange'a. Оказывается, что для полученія величины дополнительнаго члена придется взять членъ формулы Taylor'a

$$\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a),$$

непосредственно слѣдующій за написанными, и замѣнить въ немъ аргументъ $a$ производной выраженіемъ $a+\theta(x-a)$.

Это выраженіе дополнительнаго члена даетъ возможность судить о той ошибкѣ, которую мы дѣлаемъ, вычисляя функцію $f(x)$ по суммѣ

$$(5) \qquad f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a).$$

Очень часто можно замѣтить, что при возрастаніи значка $n$ $R_n$ стремится къ нулю. Тогда формула Taylor'а при возрастающихъ значеніяхъ цѣлаго числа $n$ представляетъ безконечный рядъ, имѣющій суммой заданную функцію $f(x)$. Главное значеніе формулы Taylor'а однако состоитъ не въ указанномъ обстоятельствѣ, т. е. не въ томъ, что она даетъ возможность разложенія функціи въ безконечный рядъ, а въ томъ, что она позволяетъ замѣнять вычисленіе функціи $f(x)$ сложнаго вида вычисленіемъ частныхъ значеній цѣлой функціи (5), такъ что формула Taylor'а является формулой *итерполяціонной*, т. е. такой формулой, которая сводитъ вычисленіе однихъ функцій на вычисленіе функцій болѣе простыхъ. О задачахъ интерполированія будетъ сказано въ дальнѣйшемъ.

Послѣ Lagrange'а были даны другія формулы для дополнительнаго члена. Особенное значеніе имѣетъ формула, дающая возможность представить дополнительный членъ при помощи интегральнаго исчисленія. Объ этомъ будетъ также сказано далѣе.

§ 143. Переписывая формулу Taylor'а (1) предыдущаго §-а въ видѣ (4) § 141, получимъ

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\dots$$

$$\dots+\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+R_n,$$

гдѣ

$$R_n=\frac{h^n}{1.2\dots(n-1)n}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Приращеніе $h$ можно считать дифференціаломъ $dx$ независимаго перемѣннаго. Тогда

$$hf'(x)=df,$$
$$h^2f''(x)=d^2f,$$
$$\dots\dots$$

а

$$f(x+h)-f(x)=\Delta f,$$

т. е. приращеніе функціи, и мы получаемъ

$$\Delta f=df+\frac{d^2f}{1.2}+\frac{d^3f}{1.2.3}+\dots \tag{1}$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что та безконечно малая величина высшаго порядка, на которую дифференціалъ функціи отличается отъ приращенія функціи, представляется рядомъ

$$\frac{d^2 f}{1\,.\,2} + \frac{d^3 f}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

Формула (1) сохраняетъ свой видъ и для функцій многихъ перемѣнныхъ независимыхъ; въ этомъ случаѣ $df$, $d^2 f$, $d^3 f, \ldots$ суть полные дифференціалы перваго, втораго и т. д. порядка.

§ 144. Полагая въ формулѣ (1) § 142

$$a = 0,$$

получаемъ *формулу Maclaurin'а*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(0) + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.} f'''(0) + \ldots,$$

дающую непосредственно разложеніе функціи $f(x)$ въ рядъ по степенямъ $x$.

§ 145. Примѣнимъ формулу Maclaurin'а къ разложенію наиболѣе важныхъ функцій въ ряды.

I. Возьмемъ функцію

$$f(x) = e^x.$$

Тогда будемъ имѣть

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \ldots$$

Получаемъ

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \ldots,$$

откуда

$$(1) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

II. Возьмемъ функцію

$$f(x) = \sin x.$$

Мы имѣемъ

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{IV}(x) = \sin x, .$$

откуда

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{IV}(0) = 0, \ldots,$$

получаемъ, слѣдовательно,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \tag{2}$$

$$+ \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

III. Разсмотримъ, наконецъ, функцію

$$f(x) = \cos x.$$

Мы имѣемъ

$$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x, f^{\text{IV}}(x) = \cos x, \ldots$$

значитъ

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0, f^{\text{IV}}(0) = 1, \ldots$$

и разложеніе получается въ такомъ видѣ:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \tag{3}$$

## Основы интегральнаго исчисленія.

§ 146. Мы видѣли, что дифференціальное исчисленіе имѣло своей главной задачей нахожденіе предѣла отношенія $\frac{\beta}{\alpha}$ двухъ безконечно малыхъ величинъ. Интегральное исчисленіе, къ изложенію котораго мы приступаемъ, будетъ имѣть главной задачей разсмотрѣніе предѣловъ суммъ

$$\Sigma \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

безконечно малыхъ слагаемыхъ $\alpha_i$, когда число этихъ слагаемыхъ безпредѣльно возрастаетъ.

Оказывается, что разсмотрѣніе такихъ суммъ тѣсно связано съ задачей, обратной задачѣ нахожденія производной заданной функціи, т. е. съ такой задачей: задана функція $f(x)$, ищется новая функція $F(x)$ такимъ образомъ, чтобы ея производная $F'(x)$ равнялась заданной функціи, т. е. чтобы было

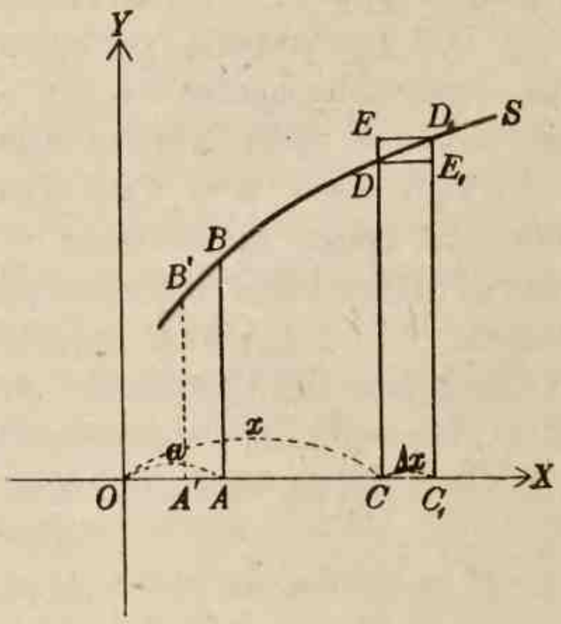
$$F'(x) = f(x).$$

Тогда искомая функція $F(x)$ носитъ названіе *первообразной функціи*.

Напримѣръ, если $f(x) = \cos x$, то очевидно, что за первообразную функцію $F(x)$ можно будетъ принять $\sin x$.

§ 147. Основнымъ является вопросъ, существуетъ ли для всякой заданной функціи опредѣленная первообразная. Первый свѣтъ на этотъ вопросъ проливается изъ геометрическихъ соображеній. Будемъ разсматривать функцію $f(x)$, изображаемую кривою линіей, такъ что въ плоскости прямоугольныхъ координатъ построена кривая $S$ (черт. 66), опредѣляемая уравненіемъ

$$y = f(x).$$




Черт. 66.

Возьмемъ нѣкоторую ординату $AB$ этой кривой, соотвѣтствующую $x = a$, и перемѣнную ординату $CD$, соотвѣтствующую перемѣнной абсциссѣ $x$. Будемъ разсматривать площадь $V$ части плоскости $ABDC$, ограниченной осью $x$-овъ, двумя ординатами $AB$ и $CD$ и частью $BD$ заданной кривой. Эта площадь будетъ, очевидно, функціей отъ $x$. Покажемъ, что производная этой функціи по $x$ будетъ равняться какъ разъ ординатѣ $CD$.

Въ самомъ дѣлѣ, дадимъ перемѣнной независимой приращеніе $\Delta x = CC_1$. Тогда приращеніе функціи будетъ $\Delta V = CDD_1C_1$. Мы всегда имѣемъ право предположить, что при достаточно маломъ приращеніи $x$ функція $f(x)$ остается или возрастающей, или убывающей. Для опредѣленности рѣчи предположимъ, что функція возрастаетъ, какъ это и указано на чертежѣ. Тогда мы имѣемъ неравенство

$$CDE_1C_1 < \Delta V < CED_1C_1,$$

или иначе

$$f(x)\,\Delta x < \Delta V < f(x + \Delta x)\,\Delta x;$$

отсюда

$$f(x) < \frac{\Delta V}{\Delta x} < f(x + \Delta x).$$

Такъ какъ мы нашу функцію предполагаемъ непрерывною, то

$$\lim_{\Delta x = 0} f(x + \Delta x) = f(x),$$

и мы получаемъ

$$\frac{dV}{dx} = f(x), \tag{1}$$

т. е. другими словами, мы видимъ, что площадь $V$ будетъ первообразной функціей отъ заданной функціи $f(x)$.

Это разсужденіе убѣждаетъ насъ въ томъ, что первообразная функція существуетъ для всѣхъ такихъ непрерывныхъ функцій, которыя изображаются кривыми линіями.

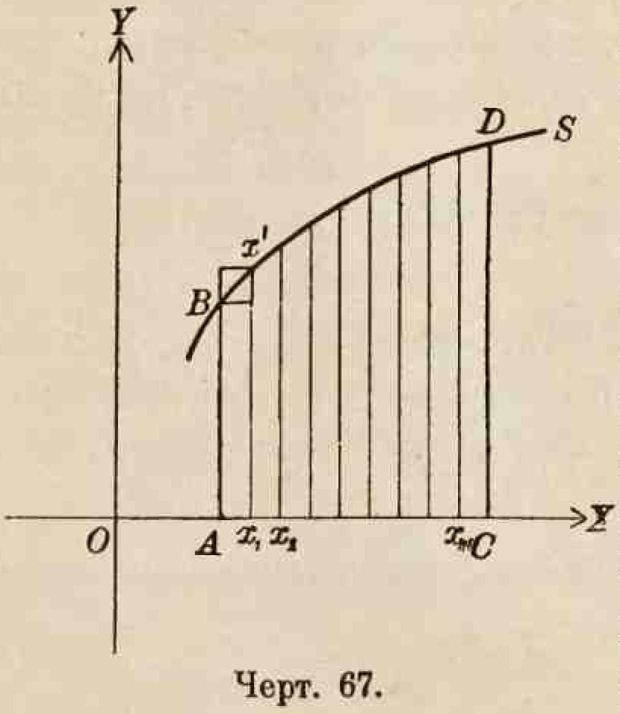
Такъ какъ отъ прибавленія къ первообразной функціи постояннаго числа производная не мѣняется, то мы замѣчаемъ, что задача нахожденія первообразной функціи есть задача неопредѣленная, т. е., другими словами, если для заданной функціи $f(x)$ существуетъ первообразная функція $F(x)$, то будетъ существовать безчисленное множество первообразныхъ функцій, причемъ всѣ эти функціи выражаются по формулѣ

$$F(x) + C,$$

гдѣ $C$ произвольная постоянная величина. Геометрически неопредѣленность первообразной функціи сводится къ тому, что за начальную ординату $AB$ можно выбирать любую изъ ординатъ, т. е., другими словами, если мы выбираемъ другую начальную ординату $A'B'$, то мы къ перемѣнной площади $V$ прибавляемъ постоянное число

$$C = ABB'A'.$$

§ 148. Геометрическое толкованіе первообразной функціи, какъ площади, даетъ возможность вычислять эту функцію при помощи новой операціи, состоящей въ нахожденіи предѣла суммы безконечно большого числа безконечно малыхъ слагаемыхъ.




Черт. 67.

Будемъ предполагать, что функція, изображаемая кривою $S$ (черт. 67), возрастаетъ между ординатами $AB$ и $CD$. Тогда для вычисленія площади $V$ можемъ поступить такъ: разстояніе $AC$ между основаніями крайнихъ ординатъ разобьемъ на нѣкоторое число $n$ промежутковъ. Аналитически это приведется къ указанію ряда чиселъ

(1) $$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1},$$

заключающихся въ промежуткѣ между

$$a = OA \text{ и } b = OC,$$

такъ что

$$a < x_1, \; x_{n-1} < b.$$

Тогда наша площадь разобьется ординатами, соотвѣтствующими числамъ (1) на рядъ криволинейныхъ трапецій, подобныхъ $ABx'x_1$, у которыхъ одна сторона $Bx'$ есть кусокъ заданной кривой, а остальныя стороны прямыя. Площадь каждой изъ этихъ трапецій будетъ заключаться между площадями двухъ прямоугольниковъ, которые мы получимъ, проведя изъ концовъ криволинейной стороны трапеціи прямыя, параллельныя оси $x$-овъ. Тогда очевидно, что площадь $V$ будетъ больше площади внутреннихъ и меньше площади внѣшнихъ прямоугольниковъ, и мы получаемъ неравенства

(1) $$V > f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1}),$$

(2) $$V < f(x\;)(x_1 - a) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(b)(b - x_{n-1}).$$

Покажемъ теперь, что, если мы будемъ увеличивать такимъ образомъ число $n$ промежутковъ, что при возрастаніи этого числа $n$ наибольшій по длинѣ изъ всѣхъ промежутковъ можетъ быть сдѣланъ сколь угодно малымъ, то суммы въ правыхъ частяхъ неравенствъ (1) и (2) необходимо стремятся къ общему предѣлу $V$. Въ самомъ дѣлѣ, переписывая неравенста (1) и (2) въ видѣ

$$V > \Sigma_1, \; V < \Sigma_2,$$

получимъ

$$0 < V - \Sigma_1 < \Sigma_2 - \Sigma_1,$$

и значитъ

(3) $$0 < V - \Sigma_1, < [f(x_1) - f(a)](x_1 - a) +$$
$$+ [f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) + \ldots + [f(b) - f(x_{n-1})](b - x_{n-1}).$$

Предполагая функцію $f(x)$ непрерывною и предполагая, что при достаточно большомъ числѣ промежутковъ всѣ эти промежутки достаточно малы, мы можемъ эти промежутки увеличеніемъ ихъ числа настолько уменьшить, чтобы было

$$\begin{gathered} f(x_1) - f(a) < \varepsilon, \\ f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots \\ f(b) - f(x_{n-1}) < \varepsilon, \end{gathered}$$

гдѣ $\varepsilon$ произвольно малое положительное число. Тогда неравенство (3) принимаетъ видъ

$$0 < V - \Sigma_1 < \varepsilon\,[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})].$$

Полагая

$$\varepsilon\,(b - a) < \eta,$$

получаемъ неравенство

$$0 < V - \Sigma_1 < \eta, \tag{4}$$

которое показываетъ, что площадь $V$ есть предѣлъ суммы $\Sigma_1$. Аналогичныя разсужденія приводятъ къ неравенству

$$0 < \Sigma_2 - V < \eta, \tag{5}$$

такъ что $V$ оказывается общимъ предѣломъ двухъ суммъ $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$.

Сумму $\Sigma_1$ можно записать такимъ образомъ:

$$\Sigma_1 = \Sigma f(x)\,\Delta x,$$

гдѣ сумма во второй части обозначаетъ не что иное, какъ сумму, стоящую во второй части неравенства (1). Въ виду этого употребляется такой знакъ для обозначенія площади, какъ предѣла суммы:

$$V = \int f(x)\,dx.$$

Этотъ знакъ носитъ названіе знака *интеграла*. Онъ происходитъ, конечно, отъ латинской буквы $S$, начальной буквы слова *summa*.

Чтобы указать, между какими ординатами берется разсматриваемая площадь, пишутъ такой знакъ:

$$V = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

который носитъ названіе *опредѣленнаго интеграла*, причемъ абсциссы $a$ и $b$ крайнихъ ординатъ площади носятъ названіе *предѣловъ* интеграла. Предѣлъ $a$ называется *нижнимъ предѣломъ*, предѣлъ $b$ *верхнимъ предѣломъ*, функція $f(x)$ называется *подинтегральной функціей*, и формула (6) читается такъ: *$V$ равняется опредѣленному интегралу, взятому отъ $a$ до $b$, отъ функціи $f(x)$*.

Если верхній предѣлъ опредѣленнаго интеграла оставляется произвольнымъ:

$$V = \int_a^x f(x)\,dx, \tag{7}$$

то мы приходимъ къ понятію о такъ называемомъ *неопредѣленномъ* *интегралъ*. Этотъ интегралъ мы разсматривали въ § 147, когда считали одну изъ ординатъ перемѣнной. Значитъ формула (7) опредѣляетъ $V$, какъ функцію отъ предѣла $x$ такую, что

$$\frac{dV}{dx}=f(x). \tag{8}$$

Неопредѣленный интегралъ, который представляетъ не что иное, какъ одно изъ значеній первообразной функціи, часто пишется безъ знаковъ предѣла, т. е.

$$V=\int f(x)\,dx.$$

На основаніи равенства (8) эту формулу можно написать еще такъ:

$$V=\int dV,$$

откуда мы замѣчаемъ, что знаки интеграла и дифференціала взаимно уничтожаются.

§ 149. Формула (7) предыдущаго §-а показываетъ, что интегралъ допускаетъ двоякое опредѣленіе: во-первыхъ, какъ первообразная функція отъ подинтегральной, во вторыхъ, какъ предѣлъ суммы. Второе понятіе объ интегралѣ, какъ предѣлѣ суммы, древнѣе, чѣмъ понятіе объ операціи, обратной дифференцированію. Послѣднее понятіе восходитъ къ Leibniz'у (1675). Необходимо признать, что еще у Архимеда (287—212 до Р. Х.) существуютъ примѣры опредѣленія площадей при помощи суммъ, аналогичныхъ интеграламъ, именно въ сочиненіи о квадратурѣ параболы, а также въ найденномъ въ 1906 году сочиненіи о механическихъ теоремахъ.

§ 150. Легко видѣть, что формулу для площадей можно написать еще такъ:

$$V=f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ .\ .\ .\ +f(\xi_n)(b-x_{n-1}),$$

гдѣ $\xi_1, \xi_2, \ .\ .\ .\ \xi_n$ суть числа, лежащія въ соотвѣтственныхъ промежуткахъ, а именно

$$a<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\ .\ .\ .\ <x_{n-1}<\xi_n<b.$$

Riemann поставилъ себѣ цѣлью изучить условія, необходимыя и достаточныя для такъ называемой *интегрируемости* заданной функціи $f(x)$. Подъ интегрируемостью разумѣется свойство функціи давать для суммы

$$\sum_a^b f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}); \tag{1}$$

гдѣ

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i,$$

опредѣленный предѣлъ, не зависящій отъ закона раздѣленія промежутка $(a, b)$ числами $x_i$ на частичные промежутки и отъ закона выбора числа $\xi_i$ въ промежуткѣ $(x_{i-1}, x_i)$. Итакъ, если сумма (1) имѣетъ опредѣленный предѣлъ, не зависящій отъ указаннаго закона заданія чиселъ $\xi_i$, то функція $f(x)$ называется *интегрируемой* а искомый предѣлъ носитъ названіе опредѣленнаго интеграла и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim \sum_a^b f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Здѣсь мы не можемъ входить въ подробное изложеніе изслѣдованій Riemann'а, замѣтимъ лишь, что всякая конечная и непрерывная функція въ промежуткѣ $(a, b)$ есть функція интегрируемая.

Riemann'овское понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ было обобщено Lebesgue'омъ.

§ 151. Резюмируя сказанное въ предыдущихъ §-ахъ, мы устанавливаемъ слѣдующія положенія.

I. Интегралъ

$$\int_a^x f(x)\,dx,$$

гдѣ $f(x)$ конечная и непрерывная функція, есть конечная и непрерывная функція отъ $x$.

II. Этотъ интегралъ для каждаго значенія $x$ имѣетъ опредѣленную производную, равную подинтегральной функціи $f(x)$.

III. Справедливо равенство

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a), \tag{1}$$

гдѣ $F(x)$ есть одна изъ первообразныхъ функцій подинтегральной функціи.

Чтобы доказать третье положеніе, достаточно замѣтить, что будетъ имѣть мѣсто равенство

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C,$$

гдѣ $C$ постоянная. При приближеніи $x$ къ $a$, т. е. при уменьшеніи промежутка $(a, x)$ опредѣленный интегралъ, очевидно, приближается къ нулю, ибо приближается къ нулю площадь кривой линіи, и мы получаемъ при $x=a$

$$0=F(a)+C,$$

откуда

$$C=-F(a),$$

и формула (1) оказывается справедливой.

### *Интегрированіе простѣйшихъ функцій.*

§ 152. Приведенная въ § 110 таблица производныхъ даетъ въ то же время таблицу интеграловъ простѣйшихъ функцій.

Прежде всего мы замѣчаемъ, что *постоянный множитель можетъ быть вынесенъ изъ-подъ знака интеграла.* Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\int d(au)=au$$

и

$$a\int du \quad =au,$$

слѣдовательно

$$\int d(au)=a\int du,$$

или, полагая

$$du=f(x)\,dx,$$

получаемъ

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx.$$

Здѣсь мы разсматриваемъ интегралы неопредѣленные и пропускаемъ добавочную постоянную.

§ 153. Получаемъ слѣдующую таблицу простѣйшихъ интеграловъ

$$dx^{n+1}=(n+1)\,x^n\,dx, \qquad \int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C;$$

$$de^x=e^x\,dx, \qquad \int e^x\,dx=e^x+C;$$

$$d\,a^x = a^x\,lg\,a\,dx, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{lga} + C;$$

$$d\,(lg\,x) = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dx}{x} = lg\,x + C;$$

$$d\,sin\,x = cos\,x\,dx \qquad \int cos\,x\,dx = sin\,x + C;$$

$$d\,cos\,x = -\,sin\,x\,dx, \qquad \int sin\,x\,dx = -\,cos\,x + C;$$

$$d\,tg\,x = \frac{dx}{cos^2 x}, \qquad \int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\,x + C;$$

$$d\,cotg\,x = -\frac{dx}{sin^2 x}, \qquad \int \frac{dx}{sin^2 x} = -\,cotg\,x + C.$$

$$d\,arc\,sin\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ (x<1), \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,sin\,x + C,$$

$$d\,arc\,tg\,x = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x + C.$$

По поводу приведенной таблицы необходимо сдѣлать слѣдующее замѣчаніе. Формула

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

при $n = -1$ дѣлается невозможной. Причиной этого обстоятельства является то, что

$$\int \frac{dx}{x}$$

оказывается трансцендентной функціей $lg\ x$.

§ 154. То обстоятельство, что производная суммы равняется суммѣ производныхъ, влечетъ за собой, какъ слѣдствіе, аналогичное свойство для интеграловъ, а именно: *интегралъ отъ суммы функцій является суммой интеграловъ отъ слагаемыхъ функцій.*

Напримѣръ

$$\int (4\,x^3 - 3\,x + 7)\,dx = \int 4\,x^3\,dx - \int 3\,x\,dx + \int 7\,dx + C =$$

$$= x^4 - \frac{3}{2} x^2 + 7x + C.$$

По этому правилу берется просто интегралъ отъ всякаго полинома.

*Интегрированіе при помощи подстановки.*

§ 155. Очень часто бываетъ, что интегралъ сводится замѣной перемѣнной къ новому интегралу, который мы умѣемъ находить. Тогда говорятъ, что интегралъ взятъ при помощи подстановки. Если мы сдѣлаемъ подстановку

$$x = \varphi(t),$$

то интегралъ преобразуется слѣдующимъ образомъ:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Пояснимъ указанное правило на примѣрахъ.

I. Требуется взять интегралъ

$$\int (ax+b)^m\,dx;$$

положимъ

$$ax + b = t,$$

тогда

$$dx = \frac{dt}{a},$$

и мы имѣемъ

$$\int (ax+b)^m\,dx = \frac{1}{a} \int t^m\,dt =$$

$$= \frac{t^{m+1}}{a(m+1)} + C = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + C.$$

II. Возьмемъ интегралъ

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q}.$$

Вслѣдствіе тождества

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

можно ввести новое перемѣнное при помощи равенства

$$x+\frac{p}{2}=t\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

откуда

$$dx=dt\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

и искомый интегралъ получитъ видъ

$$\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,arc\,tg\,t+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,arc\,tg\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

*Интегрированіе по частямъ.*

§ 156. Пусть $u$ и $v$ двѣ произвольныя функціи; тогда мы имѣемъ

$$d(uv)=u\,dv+v\,du,$$

откуда, интегрируя, получимъ

$$uv=\int u\,dv+\int v\,du$$

или

$$\int u\,dv=u\,v-\int v\,du.$$

Эта формула приводитъ вычисленіе интеграла $\int u\,dv$ къ вычисленію другого $\int v\,du$ и представляетъ собою очень часто употребляемую методу интегрированія. Эта метода называется *интегрированіемъ по частямъ*.

Напримѣръ

$$\int lg\,x\,dx=x\,lg\,x-\int x\,d\,(lg\,x)=$$

$$=lg\,x-\int\frac{x\,dx}{x}=x\,lg\,x-x+C=x\,(lg\,x-1)+C.$$

*Интегрированіе раціональныхъ дробей.*

§ 157. Подъ раціональной дробью понимается выраженіе вида

$$\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n}, \tag{1}$$

гдѣ въ числителѣ и знаменателѣ находятся цѣлыя функціи степеней $m$ и $n$ отъ $x$.

Обозначая для сокращенія дробь (1) черезъ

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

будемъ разсматривать интегралъ

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx. \tag{2}$$

Замѣчательно, что какія бы функціи $\varphi(x)$ и $f(x)$ ни были, интегралъ (2), какъ говорятъ, берется въ конечномъ видѣ, т. е. онъ выражается при помощи конечнаго числа функцій, извѣстныхъ изъ элементарной математики. Необходимо при этомъ замѣтить, что интегральное исчисленіе приводитъ къ новымъ трансцендентнымъ функціямъ въ томъ случаѣ, когда интегралъ не берется въ конечномъ видѣ. Въ этомъ отношеніи интегральное исчисленіе раздѣляетъ участь всѣхъ обратныхъ дѣйствій; мы видѣли уже, что обратное сложенію дѣйствіе вычитанія приводитъ къ новымъ числамъ, такъ называемымъ отрицательнымъ; дѣленіе, будучи обратнымъ умноженію, приводитъ къ числамъ дробнымъ; извлеченіе корня приводитъ къ числамъ ирраціональнымъ; подобно этому, интегральное исчисленіе, будучи обратнымъ дифференціальному, приводитъ къ новымъ трансцендентнымъ функціямъ, которыя не выражаются при помощи конечнаго числа знаковъ элементарной математики.

Итакъ, обращаемся къ разсмотрѣнію интеграла отъ раціональныхъ дробей. Если степень многочлена $\varphi(x)$, стоящаго въ числителѣ, больше степени знаменателя $f(x)$, то, производя дѣленіе $\varphi(x)$ на $f(x)$, получимъ частное $\varphi_1(x)$ и остатокъ $\psi(x)$ степени, меньшей дѣлителя.

Тогда будемъ имѣть

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\varphi_1(x)+\frac{\psi(x)}{f(x)},$$

откуда

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=\int\varphi_1(x)\,dx+\int\frac{\psi(x)}{f(x)}dx.$$

Интегралъ

$$\int\varphi_1(x)\,dx$$

берется просто, какъ интегралъ отъ полинома. Обратимся поэтому къ интегрированію раціональныхъ функцій въ томъ случаѣ, когда степень числителя меньше степени знаменателя. Найдемъ всѣ корни знаменателя, и пусть знаменатель раскладывается на простыя множители такъ:

$$f(x)=(x-a)^p\,(x-b)^q\,(x-c)^r\;.\;.\;.\;,$$

гдѣ

$$p+q+r+\;.\;.\;.=n.$$

Существуетъ замѣчательное разложеніе всякой раціональной функціи разсматриваемаго вида на простѣйшія дроби. Это разложеніе имѣетъ видъ

$$
\begin{aligned}
\frac{\psi(x)}{f(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\;.\;.\;.+\frac{A_p}{(x-a)^p}+\\
+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\;.\;.\;.+\frac{B_q}{(x-b)^q}+\\
+\frac{C_1}{x-c}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\;.\;.\;.+\frac{C_r}{(x-c)^r}+\\
+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\
.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Чтобы доказать возможность такого разложенія, нужно показать, что равенство (1) можетъ быть обращено въ тождество выборомъ постоянныхъ $A_1, A_2, \ldots A_p, B_1, B_2, \ldots B_q, \ldots$

Въ самомъ дѣлѣ, умножая обѣ части равенства (1) на $f(x)$, мы получимъ въ обѣихъ частяхъ многочлены. Въ первой части окажется многочленъ $\psi(x)$ степени не выше $n-1$, съ заданными коэффиціентами, во второй части получится многочленъ $(n-1)$-ой степени, потому что выраженія

$$\frac{f(x)}{x-a}, \frac{f(x)}{x-b}, \frac{f(x)}{x-c}, \ldots$$

будутъ $(n-1)$-ой степени. Собирая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ $x$ въ правой части и приравнивая ихъ соотвѣтственнымъ коэффиціентамъ въ лѣвой части, мы получимъ $n$ уравненій (потому что цѣлая функція $(n-1)$-ой степени имѣетъ $n$ коэффиціентовъ) первой степени съ неизвѣстными

$$A_1, A_2, \ldots A_p, B_1, B_2, \ldots B_q, \ldots$$

Этихъ неизвѣстныхъ также $n$, ибо

$$p+q+r \ldots = n.$$

Для коэффиціентовъ $A_i$, $B_i$, $C_i$, ... въ равенствѣ (1) получаются, слѣдовательно, формулы, раціонально выражающіяся черезъ коэффиціенты функціи $\varphi(x)$ и корни знаменателя $f(x)$.

*Напримѣръ*:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-2}.$$

Приведя къ одному знаменателю, получаемъ

$$x^2 = A_1(x-1)(x-2) + A_2(x-2) + B(x-1)^2$$

или

$$x^2 = (A_1+B)x^2 + (-3A_1 + A_2 - 2B)x + (2A_1 - 2A_2 + B);$$

получаемъ, слѣдовательно, уравненія

$$\begin{aligned} A_1 + B &= 1, \\ -3A_1 + A_2 - 2B &= 0, \\ 2A_1 - 2A_2 + B &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$A_1 = -3, A_2 = -1, B = 4,$$

и разложеніе получится въ такомъ видѣ:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{3}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-2}.$$

Интегрируя равенство (1), получаемъ окончательное выраженіе интеграла раціональной функціи:

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}dx = A_1 \lg(x-a) - \frac{A_2}{x-a} - \ldots - \frac{A_p}{(p-1)(x-a)^{p-1}} +$$
$$+ B_1 \lg(x-b) - \frac{B_2}{x-b} - \ldots - \frac{B_q}{(q-1)(x-a)^{q-1}} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§ 158. Что касается интеграловъ отъ выраженій ирраціональныхъ и трансцендентныхъ, то лишь немногіе интегралы отъ болѣе простыхъ выраженій такого вида берутся въ конечномъ видѣ, большинство же интеграловъ не берутся въ конечномъ видѣ и представляютъ новыя трансцендентныя.

### *Интегрированіе при помощи рядовъ.*

§ 159. Положимъ, что подинтегральная функція $f(x)$ разлагается въ безконечный рядъ функцій

$$(1) \qquad f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$$

Степенные ряды, которые мы видѣли при разложеніи по формулѣ Maclaurin'а представляютъ собою частный случай рядовъ функцій.

Старые математики, не долго думая, выводили изъ равенства (1) равенство

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x u_1(x)\,dx + \int_a^x u_2(x)\,dx + \int_a^x u_3(x)\,dx + \ldots$$

Такимъ образомъ они поступали при интегрированіи безконечнаго ряда такъ же, какъ при интегрированіи конечныхъ суммъ. Можно однако указать рядъ простыхъ примѣровъ, гдѣ такое интегрированіе ряда приводитъ къ абсурднымъ результатамъ. Для того, чтобы можно было рядъ интегрировать почленно, необходимо, чтобы этотъ рядъ былъ *равномѣрно* сходящимся. Подъ равномѣрной сходимостью мы понимаемъ слѣдующее свойство ряда: представимъ формулу (1) въ такомъ видѣ:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_{n-1}(x) + R_n,$$

гдѣ дополнительный членъ $R_n$ выражается по формулѣ

$$R_n = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots$$

Для сходимости ряда необходимо, чтобы

$$lim\ R_n = 0.$$

т. е. другими словами, чтобы всякому малому положительному числу $\varepsilon$ можно было сопоставить такое большое $n$, что

$$|R_n| < \varepsilon.$$

Если такое сопоставленіе цѣлаго числа $n$ числу $\varepsilon$ не зависитъ отъ значеній, которыя можетъ принимать $x$ въ данныхъ границахъ отъ $a$ до $b$, то сходимость называется равномѣрной, и рядъ можно интегрировать. Если же $n$, сопоставляемое числу $\varepsilon$, есть функція, какъ отъ $\varepsilon$, такъ и отъ $x$, то рядъ не будетъ равномѣрно сходиться.

§ 160. Сдѣлаемъ нѣсколько примѣровъ на интегрированіе при помощи рядовъ, которые будутъ не столько относиться къ задачѣ нахожденія интеграловъ, сколько къ задачѣ разложенія функцій въ ряды.

I. Возьмемъ интегралъ

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = lg\,(1+x).$$

Предположимъ, что $x$ заключается въ предѣлахъ

(1) $$0 \leqq x < 1.$$

При помощи простого дѣленія мы получаемъ формулу

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ .\ .\ . + (-1)^{n-1} x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1+x},$$

откуда, интегрируя, получимъ

(2) $$lg\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ .\ .\ . + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + $$
$$+ (-1)^n \int_0^x \frac{x^n\,dx}{1+x}.$$

Такъ какъ при неравенствахъ (1)

$$\frac{x^n}{1+x} < x^n,$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{x^n\,dx}{1+x} &< \int_0^x x^n\,dx, \\ &< \frac{x^{n+1}}{n+1}, \\ &< \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Итакъ, мы видимъ, что дополнительный членъ

$$\int_0^x \frac{x^n\,dx}{1+x}$$

будетъ меньше $\varepsilon$, если положимъ

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon,$$

и мы получаемъ разложеніе $lg\,(1+x)$ въ рядъ

$$lg\,(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ .\ .\ .\ ,$$

который остается сходящимся и при $x=1$; мы имѣемъ

$$lg\,2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ .\ .\ .\ ,$$

что подтверждаетъ сказанное въ § 48.

II. Возьмемъ интегралъ

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=arc\,tg\,x.$$

Дѣленіе даетъ

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ .\ .\ .$$
$$.\ .\ .\ +(-1)^{n-1}x^{2n-2}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

Интегрируя, получаемъ

$$arc\,tg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ .\ .\ . \tag{3}$$
$$.\ .\ .\ +(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+(-1)^n\int_0^x\frac{x^{2n}\,dx}{1+x^2}.$$

Послѣдній рядъ, какъ показываетъ дополнительный членъ, будетъ сходиться при

$$-1<x\leqq 1.$$

Когда $x>1$, то для вычисленія $arc\,tg\,x$ можно употребить формулу

$$arc\,tg\,x+arc\,cotg\,x=\frac{\pi}{2}$$

или

$$arc\,tg\,x + arc\,tg\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$arc\,tg\,x = \frac{\pi}{2} - arc\,tg\,\frac{1}{x},$$

и если $x > 1$, то $\frac{1}{x} < 1$.

§ 161. Подставляя въ формулу (3) предыдущаго §-а $x = 1$, получаемъ

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \quad . \ . \ .$$

Эта формула неудобна для вычисленія $\pi$ вслѣдствіе плохой сходимости. Самой удобной формулой для вычисленія $\pi$ является формула Machin'а

$$\frac{\pi}{4} = 4\,arc\,tg\,\frac{1}{5} - arc\,tg\,\frac{1}{239},$$

такъ какъ ряды для $arc\,tg\,\frac{1}{5}$ и $arc\,tg\,\frac{1}{239}$ очень быстро сходятся.

Мною была предложена такая задача въ 1895 г. въ журналѣ „Intermédiaire des mathématiciens“:

Найти всѣ рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ уравненія

(1) $$\frac{\pi}{4} = m\,arc\,tg\,\frac{1}{p} + n\,arc\,tg\,\frac{1}{q}.$$

Уже давно было извѣстно пять рѣшеній:

$m = 1, n = 1, p = 2, q = 3;$
$m = 2, n = 1, p = 1, q = -1:$
$m = 2, n = 1, p = 2, q = -7;$
$m = 2, n = 1, p = 3, q = 7$ (Euler);
$m = 4, n = 1, p = 5, q = -239$ (Machin).

Изъ соображеній, относящихся къ дѣлителямъ чиселъ вида $x^2 + 1$, я догадался, что больше цѣлыхъ рѣшеній уравненія (1) не существуетъ. Эту теорему доказалъ вполнѣ студентъ университета въ Христіаніи C. Stoermer, нынѣ профессоръ этого университета. Послѣ этого доказательства можно считать формулу Machin'а дѣйствительно лучшей формулой для вычисленія $\pi$.

*Опредѣленные интегралы.*

§ 162. Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію главнѣйшихъ свойствъ опредѣленныхъ интеграловъ.

I. Очевидно, что при перестановкѣ предѣловъ интегрированія опредѣленный интегралъ мѣняетъ свой знакъ, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

ибо при измѣненіи направленія интегрированія значенія подинтегральной функціи входятъ въ сумму въ прежнемъ видѣ, тогда какъ приращеніе независимаго перемѣннаго измѣняетъ свой знакъ; отсюда мѣняетъ знакъ и вся сумма.

II. Очевидно, справедливы формулы

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^b f(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{c_{к-1}}^{c_к} f(x)\,dx + \int_{c_к}^b f(x)\,dx.$$

III. Если $f(x)$ функція четная, т. е. такая, которая обладаетъ свойствомъ

$$f(-x) = f(x),$$

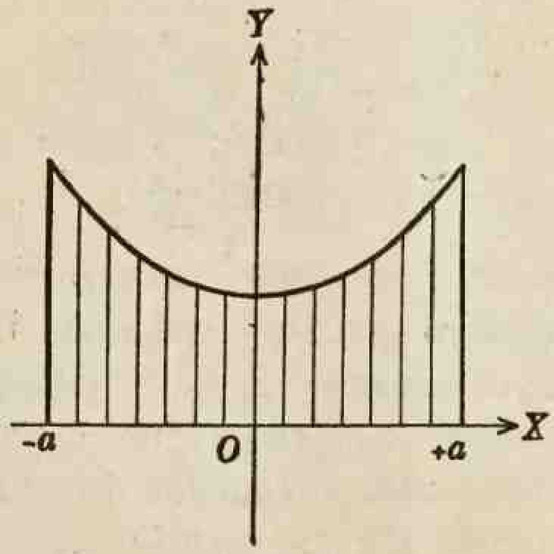
то имѣстъ мѣсто равенство

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

ибо при переходѣ черезъ отрицательныя значенія отъ $-a$ до 0 подинтегральная функція пробѣгаетъ тѣ же самыя численныя значенія, что и въ положительномъ промежуткѣ отъ 0 до $a$. Геометрически это сводится къ тому (черт. 68), что площадь, опредѣляемая интеграломъ

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$$

равняется удвоенной площади, опредѣляемой интеграломъ




Черт. 68.

$$\int_0^a f(x)\,dx.$$

Если подинтегральная функція нечетная, т. е. если она удовлетворяетъ условію

$$f(-x) = -f(x),$$

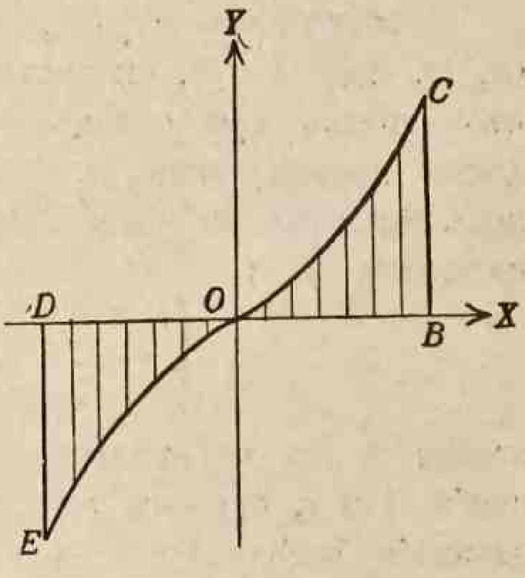
то имѣетъ мѣсто равенство

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0.$$

Въ этомъ случаѣ площадь, опредѣляемая интеграломъ

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$$

состоитъ изъ двухъ частей, положительной площади $OBC$ (черт. 69) и равновеликой ей по абсолютной величинѣ отрицательной площади $ODE$, которыя въ суммѣ взаимно уничтожаются *).




Черт. 69.

*Несобственные опредѣленные интегралы.*

§ 163. Riemann'овское опредѣленіе перестаетъ имѣть мѣсто въ двухъ случаяхъ: во-первыхъ, когда подинтегральная функція обращается въ безконечность внутри промежутка интегрированія, во-вторыхъ, когда промежутокъ интегрированія дѣлается безконечно большимъ.

Если, несмотря на такія исключительныя обстоятельства, возможно бываетъ путемъ новыхъ опредѣленій все таки установить понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

---

*) Названіе „четная функція" происходитъ отъ того, что къ четнымъ функціямъ принадлежатъ всѣ полиномы, имѣющіе только четные показатели, напримѣръ

$$A x^4 + A_1 x^2 + A_2,$$

а къ нечетнымъ функціямъ принадлежатъ всѣ полиномы съ одними нечетными показателями, напримѣръ

$$3x^5 - 4x^3 + x.$$

то тогда такой интегралъ будемъ называть *несобственнымъ интеграломъ.*

Понятіе о несобственномъ интегралѣ было впервые разъяснено Cauchy.

Разсмотримъ случай, когда въ промежуткѣ интегрированія $(a, b)$, гдѣ $a < b$, подинтегральная функція $f(x)$ обращается въ $\infty$ только при одномъ значеніи $x = c$, между тѣмъ какъ въ двухъ промежуткахъ $(a, c - \delta)$, $(c + \varepsilon, b)$ функція интегрируема, какъ бы малы ни были положительныя числа $\delta$ и $\varepsilon$. Если два интеграла

$$\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx\,,\ \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

стремятся къ опредѣленнымъ конечнымъ предѣламъ при уменьшеніи $\delta$ и $\varepsilon$, причемъ эти предѣлы не зависятъ отъ закона приближенія чиселъ $\delta$ и $\varepsilon$ къ нулю, тогда мы приходимъ къ несобственному интегралу, опредѣляемому слѣдующимъ образомъ:

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = lim \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + lim \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Понятіе о несобственномъ интегралѣ съ одною безконечностью въ промежуткѣ интегрированія, конечно, непосредственно обобщается на случай нѣкотораго конечнаго числа такихъ безконечностей. Оказывается возможнымъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ ввести понятіе о несобственномъ интегралѣ съ безконечнымъ числомъ безконечностей въ промежуткѣ интегрированія.

Иногда встрѣчается слѣдующее обстоятельство, на которое обратилъ вниманіе Cauchy, а именно формула (1) не даетъ возможности установить понятіе о несобственномъ интегралѣ, ибо не существуетъ опредѣленныхъ предѣловъ для интеграловъ

$$(2) \qquad \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx \ \text{ и } \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

при произвольныхъ $\delta$ и $\varepsilon$; между тѣмъ, если мы установимъ нѣкоторое соотношеніе между $\delta$ и $\varepsilon$, то получимъ нѣкоторое предѣльное значеніе для суммы интеграловъ (2). Напримѣръ, разсматривая интегралъ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x},$$

мы замѣчаемъ, что подинтегральная функція $\frac{1}{x}$ обращается въ $\infty$ при $x=0$. Тогда, если бы мы захотѣли разсматривать формулу

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = lim \left\{\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x}\right\},$$

то получили бы

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = lim \left\{ \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} - \int_{\delta}^{1} \frac{dx}{x}\right\} =$$

$$= lim \left\{ lg\, 1 - lg\, \varepsilon - (lg\, 1 - lg\, \delta) \right\} = lim\, lg \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Если мы установимъ соотношеніе

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = a,$$

гдѣ $a$ нѣкоторое постоянное число, тогда можно написать

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = lg\, a.$$

Cauchy предложилъ называть главнымъ значеніемъ несобственнаго интеграла послѣдняго вида то значеніе, которое соотвѣтствуетъ соотношенію

$$\varepsilon = \delta, \text{ т. е. } a = 1.$$

Хотя Dirichlet употреблялъ это понятіе о главномъ значеніи интеграла, тѣмъ не менѣе Riemann и Kronecker оспариваютъ необходимость такого понятія.

§ 164. Что касается другого обстоятельства, когда промежутокъ интегрированія дѣлается безконечно большимъ, то тутъ нужно разсматривать три случая: когда, во первыхъ, безконеченъ верхній предѣлъ, во-вторыхъ нижній предѣлъ, въ третьихъ оба предѣла.

Несобственные интегралы съ безконечными предѣлами опредѣляются, очевидно, при помощи формулъ

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b=\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a=-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

и, наконецъ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a=-\infty \\ b=+\infty}} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Въ третьемъ случаѣ предѣлъ не долженъ зависѣть отъ закона увеличенія чиселъ $a$ и $b$. Здѣсь также можетъ случиться, что предѣлъ существуетъ только при извѣстномъ соотношеніи между $a$ и $b$. Значеніе

$$\lim_{a=\infty} \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$$

называется главнымъ значеніемъ интеграла.

Если несобственные интегралы существуютъ и конечны, т. е. существуютъ тѣ предѣлы, о которыхъ шла рѣчь выше, то интегралъ называется *сходящимся*. Можно наблюдать замѣчательную аналогію сходящихся интеграловъ со сходящимися рядами, а именно интегралъ называется абсолютно сходящимся, если будетъ сходящимся другой интегралъ, гдѣ подинтегральная функція есть абсолютная величина подинтегральной функціи перваго интеграла, и условно сходящимся, если это не имѣетъ мѣста.

*Теорема Cauchy. Признакъ Ермакова.*

§ 165. Вопросъ о сходимости несобственныхъ интеграловъ находится въ большой связи съ вопросомъ о сходимости рядовъ. Въ этомъ направленіи большое значеніе имѣетъ слѣдующая теорема Cauchy.

Теорема. *Безконечный рядъ*

$$f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots,$$

*гдѣ* $f(x)$ *убывающая до нуля съ возрастаніемъ* $x$ *до* $\infty$ *положительная функція, будетъ сходящимся или расходящимся смотря по тому, будетъ ли*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

*число конечное или безконечное, и обратно.*

По условію убыванія функціи мы имѣемъ при $a < x < a+1$

$$f(a) > f(x) > f(a+1),$$

отсюда

$$\int_a^{a+1} f(a)\,dx > \int_a^{a+1} f(x)\,dx > \int_a^{a+1} f(a+1)\,dx,$$

т. е.

$$f(a) > \int_a^{a+1} f(x)\,dx > f(a+1);$$

отсюда получаемъ

$$f(a)+f(a+1)+\ldots+f(a+n-1) > \int_a^{a+n} f(x)\,dx > f(a+1)+\ldots$$
$$\ldots+f(a+n).$$

Эти неравенства показываютъ, что если $n$ возрастаетъ безпредѣльно, то интегралъ сходится одновременно съ рядомъ.

166. Изъ теоремы Cauchy вытекаетъ принадлежащій профессору Ермакову весьма важный признакъ сходимости рядовъ съ положительными членами.

Пусть $\varphi(x)$ обозначаетъ функцію обусловленную только тѣмъ, что при $x > a$, гдѣ $a$ достаточно большое положительное число, имѣетъ мѣсто неравенство

$$\varphi(x) > x.$$

Разсмотримъ рядъ изъ положительныхъ членовъ

(1) $$f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots$$

Получается такая теорема Ермакова.

*Если при всѣхъ $x > a$, гдѣ $a$ достаточно большое положительное число, имѣетъ мѣсто неравенство*

$$\frac{\varphi'(x)\,f(\varphi(x))}{f(x)} < \mathfrak{a} < 1,$$

*то рядъ (1) будетъ сходящимся. Если же имѣетъ мѣсто неравенство*

$$\frac{\varphi'(x)\,f(\varphi(x))}{f(x)} > 1,$$

*то рядъ (1) расходится.*

Въ самомъ дѣлѣ, при произвольномъ числѣ $b$, большемъ $a$, будемъ, очевидно, имѣть

$$\int_a^b \varphi'(x)\,f(\varphi(x))\,dx < \mathfrak{a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Положивъ $\varphi(x) = z$, получимъ

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\,dz < \mathfrak{a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Возвращаясь отъ обозначенія подинтегральной функціи $z$ къ обозначенію $x$ и разбивая первый интегралъ на части, можно написать

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{\varphi(b)} f(x)\,dx - \int_a^{\varphi(a)} f(x)\,dx < \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Интегралъ

$$\int_b^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

представляетъ собою положительное число, ибо $\varphi(b) > b$, значитъ, получаемъ

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^{\varphi(a)} f(x)\,dx < \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\,dx < \frac{1}{1-\alpha} \int_a^{\varphi(a)} f(x)\,dx,$$

и у насъ получается конечность интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

при $b = \infty$.

Совершенно подобнымъ же образомъ мы убѣждаемся въ расходимости ряда при второмъ неравенствѣ.

Если мы положимъ въ признакѣ Ермакова

$$\varphi(x) = x + 1,$$

то получаемъ

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} = \frac{f(x+1)}{f(x)},$$

что представляетъ собою не что иное, какъ указанный въ § 43 признакъ D'Alembert'a.

*Теорема о среднемъ значеніи.* (*Mittelmertsatz*).

§ 167. Приведемъ теперь одну основную теорему, имѣющую большія приложенія: положимъ, что функція $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ $(a, b)$ интегрированія, а $\varphi(x)$—интегрируемая въ этомъ промежуткѣ функція, сохраняющая опредѣленный знакъ. Тогда существуетъ слѣдующая формула:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

гдѣ $\xi$ нѣкоторое число, лежащее въ промежуткѣ интегрированія.

Обозначимъ черезъ $m$ и $M$ наименьшее и наибольшее значеніе функціи $f(x)$ въ промежуткѣ $(a, b)$. Тогда имѣемъ очевидныя неравенства

$$m\Sigma\varphi(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\leqq\Sigma f(\xi_i)\varphi(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\leqq M\Sigma\varphi(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Отсюда получаемъ неравенства

$$m\int_a^b\varphi(x)\,dx\leqq\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\leqq M\int_a^b\varphi(x)\,dx,$$

откуда имѣемъ

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\mathfrak{m}\int_a^b\varphi(x)\,dx,$$

гдѣ $\mathfrak{m}$ удовлетворяетъ неравенствамъ

$$m\leqq\mathfrak{m}\leqq M.$$

Такъ какъ функція $f(x)$ по предположенію непрерывна, то она должна проходить всѣ промежуточныя значенія между своимъ наименьшимъ и наибольшимъ значеніемъ, значитъ, должно существовать нѣкоторое число $\xi$ въ промежуткѣ интегрированія, для котораго будетъ

$$\mathfrak{m}=f(\xi),$$

и теорема доказана.

§ 168. Къ этой давно извѣстной теоремѣ въ настоящее время присоединяютъ въ курсахъ интегральнаго исчисленія другую теорему, которую называютъ второй теоремой о среднемъ значеніи.

Будемъ называть функцію $f(x)$ *монотонною* въ нѣкоторомъ промежуткѣ, если она или все время возрастаетъ въ этомъ промежуткѣ или все время убываетъ.

Имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема.

*Если*

$$f(x) \text{ и } \varphi(x)$$

*двѣ функціи, интегрируемыя въ промежуткѣ* $(a, b)$ *и* $f(x)$ *монотонна, то существуетъ въ этомъ промежуткѣ такое среднее значеніе* $\xi$, *для котораго имѣетъ мѣсто равенство*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=f(a)\int_a^\xi\varphi(x)\,dx+f(b)\int_\xi^b\varphi(x)\,dx.$$

### *Интегрированіе и дифференцированіе подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла.*

§ 169. Если функція $f(x, t)$ отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ, измѣняющихся въ промежуткахъ

$$a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

интегрируема, если ее разсматривать, какъ функцію отъ $x$, и непрерывна, если ее разсматривать, какъ функцію отъ $t$, то

$$\int_a^b f(x, t)\, dx$$

представляетъ непрерывную функцію отъ $t$ въ промежуткѣ $(\alpha, \beta)$, причемъ этотъ промежутокъ можетъ быть безконечно большимъ.

Эту функцію можно интегрировать въ промежуткѣ отъ $\alpha$ до $\beta$ подъ знакомъ интеграла, т. е. получается формула

$$\int_\alpha^\beta \left[ \int_a^b f(x,t)\, dx \right] dt = \int_a^b \left[ \int_\alpha^\beta f(x, t)\, dt \right] dx.$$

Это равенство выражаетъ теорему о такъ называемомъ измѣненіи порядка интегрированія въ опредѣленныхъ интегралахъ.

§ 170. Если частная производная

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$$

непрерывна въ разсматриваемыхъ границахъ для перемѣнныхъ, то можно интегралъ, разсматриваемый какъ функцію отъ $t$, дифференцировать по такой формулѣ:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dx.$$

Если предѣлы $a$ и $b$ будутъ также функціи отъ $t$, то получается теорема:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dx + f(b, t) \frac{db}{dt} - f(a, t) \frac{da}{dt}.$$

Всѣ эти теоремы обобщаются для несобственныхъ интеграловъ.

### *Неравенства Чебышева.*

§ 171. Чебышеву принадлежитъ слѣдующая весьма важная по приложеніямъ теорема.

*Если функціи $u$, $v$ въ границахъ интегрированія отъ 0 до 1 обѣ убываютъ, то имѣетъ мѣсто неравенство*

$$\int_0^1 u v\, dx > \int_0^1 u\, dx \int_0^1 v\, dx.$$

Раздѣлимъ промежутокъ интегрированія на $n$ частей, гдѣ $n$ большое цѣлое число. Тогда можно положить

$$dx=\frac{1}{n},$$

и если мы обозначимъ черезъ $u_1, u_2, \ldots u_n, v_1, v_2, \ldots v_n$ значенія функцій въ соотвѣтственныхъ промежуткахъ, то задача приведется къ доказательству неравенства

$$\frac{u_1 v_1+u_2 v_2+\ldots+u_n v_n}{n}>$$
$$>\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}\cdot\frac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{n}$$

при условіи

(1) $$u_1>u_2>\ldots>u_n,$$
$$v_1>v_2>\ldots>v_n.$$

Итакъ, подлежитъ доказательству при условіи (1) неравенство

(2) $$(u_1+u_2+\ldots+u_n)(v_1+v_2+\ldots+v_n)<$$
$$<n(u_1 v_1+u_2 v_2+\ldots+u_n v_n).$$

Докажемъ это неравенство по индукціи.

При $n=2$ неравенство

$$(u_1+u_2)(v_1+v_2)<2(u_1 v_1+u_2 v_2)$$

есть простое слѣдствіе очевиднаго неравенства

$$(u_1-u_2)(v_1-v_2)>0.$$

Допустимъ теперь, что неравенство (2) справедливо при $n-1$, т. е. что будетъ

(3) $$UV<(n-1)W,$$

гдѣ

$$U=u_1+u_2+\ldots+u_{n-1},$$
$$V=v_1+v_2+\ldots+v_{n-1},$$
$$W=u_1 v_1+u_2 v_2+\ldots+u_{n-1} v_{n-1}.$$

На основаніи убыванія функцій $u$ и $v$ мы получаемъ очевидныя неравенства

$$u_n<\frac{U}{n-1},\ v_n<\frac{V}{n-1}.$$

Разсмотримъ еще такое очевидное неравенство:

$$\{U-(n-1)\,u_n\}\,\{V-(n-1)\,v_n\}>0,$$

или, раскрывая,

$$UV-(n-1)\,(V.\,u_n+U.\,v_n)+(n-1)^2\,u_n v_n>0.$$

Примѣняя неравенство (3) и сокращая на $n-1$, получимъ

$$W-(V.\,u_n+U.\,v_n)+(n-1)\,u_n v_n>0. \tag{4}$$

Тождество

$$UV+u_n V+v_n U+u_n v_n=(U+u_n)\,(V+v_n)$$

на основаніи неравенства (3) даетъ

$$(n-1)\,W+u_n V+v_n U+u_n v_n>(U+u_n)\,(V+v_n). \tag{5}$$

Сложеніе неравенствъ (4) и (5) даетъ неравенство

$$(U+u_n)\,(V+v_n)<n\,(W+u_n v_n),$$

доказывающее теорему.

## *Пріемы вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ.*

§ 172. Если мы знаемъ неопредѣленный интегралъ, то величина опредѣленнаго интеграла вычисляется непосредственно по формулѣ

$$\int_b^a f(x)\,dx=F(b)-F(a), \tag{1}$$

гдѣ $F(x)$ есть первообразная функція подинтегральной функціи $f(x)$.

Въ высшей степени важно то обстоятельство, что величину опредѣленнаго интеграла можно вычислить, не умѣя находить неопредѣленный, ибо мы имѣемъ другое происхожденіе опредѣленнаго интеграла, какъ предѣла суммы. Приближенно вычислить такой предѣлъ мы всегда умѣемъ; очень часто, однако, можно указать точныя значенія опредѣленныхъ интеграловъ, не умѣя находить соотвѣтственныхъ неопредѣленныхъ интеграловъ. Примѣромъ такого вычисленія можетъ служить формула

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

тогда какъ неопредѣленный интегралъ

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

не выражается въ конечномъ видѣ.

Въ виду сказаннаго теорія опредѣленныхъ интеграловъ представляетъ большой математическій интересъ по разнообразію пріемовъ вычисленія. Теорія опредѣленныхъ интеграловъ являлась предметомъ лекцій самыхъ выдающихся математиковъ, а именно Dirichlet, Kronecker'a и Thomae. Полное изложеніе этихъ методовъ можно видѣть въ книгѣ Bierens de Haan: „Exposé de la théorie des intégrales définies" (1862). Тотъ же авторъ далъ большое собраніе извѣстныхъ до настоящаго времени формулъ подъ заглавіемъ „Table des intégrales définies" (1867).

§ 173. Покажемъ на простомъ примѣрѣ возможность двоякаго вычисленія опредѣленнаго интеграла. Возьмемъ интегралъ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx.$$

Примѣняя формулу (1) предыдущаго §-а, получимъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Съ другой стороны

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \lim_{n=\infty} \Big\{ \alpha \cos\alpha + \alpha\cos 2\alpha +$$

$$\alpha\cos 3\alpha + \ .\ .\ .\ + \alpha\cos(n-1)\alpha \Big\},$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{\pi}{2n}.$$

Отсюда мы видимъ, что интегралъ представляетъ собою предѣлъ такого выраженія

$$\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \Big\{ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + \ .\ .\ .$$

$$.\ .\ .\ + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(n-1)\alpha \Big\}.$$

По извѣстной формулѣ тригонометріи это выраженіе перепишется такъ:

$$\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left\{\sin\frac{3}{2}\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{5}{2}\alpha-\sin\frac{3}{2}\alpha+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\sin\frac{2n-1}{2}\alpha-\sin\frac{2n-3}{2}\alpha\right\}$$

и, слѣдовательно, интегралъ вычислится такимъ образомъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\lim_{n=\infty}\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left\{\sin\frac{2n-1}{2}\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}\right\}=$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\cdot\lim_{n=\infty}\left\{\sin\left(\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\sin\frac{\pi}{4n}\right\}=$$

$$=1\,.\,(1-0)=1.$$

## Теорія ансамблей.

§ 174. Въ заключеніе главы, трактующей объ анализѣ безконечно малыхъ, мы должны упомянуть еще объ одной теоріи, которая имѣетъ большое приложеніе въ интегральномъ исчисленіи, а именно *о теоріи ансамблей или множествъ* (Mengenlehre).

Основателемъ этой теоріи былъ профессоръ Georg Cantor въ Halle. Здѣсь мы должны оговорить, что не надо смѣшивать Georg'а Cantor'а съ Heidelberg'скимъ профессоромъ Moritz'омъ Cantor'омъ, извѣстнымъ историкомъ математики, написавшимъ очень полезную книгу подъ заглавіемъ „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ (Leipzig 1880).

§ 175. Подъ *ансамблемъ* или *множествомъ* разумѣется совокупность нѣкотораго конечнаго или безконечнаго числа предметовъ. Такими предметами могутъ быть числа, точки, уравненія и т. д. Каждый изъ предметовъ называется *элементомъ* ансамбля. Ансамбль называется *конечнымъ*, если онъ состоитъ изъ конечнаго числа элементовъ и *безконечнымъ*, если онъ состоитъ изъ безконечнаго числа элементовъ.

При разсмотрѣніи безконечныхъ ансамблей явилось желаніе обобщить понятіе о числѣ элементовъ конечнаго ансамбля на случай ансамбля безконечнаго. Cantor вводитъ понятіе о *мощности* безконечнаго ансамбля, причемъ устанавливаетъ слѣдующее понятіе о *равенствѣ мощностей* у двухъ ансамблей.

Сравнивая число рожденій съ числомъ смертныхъ случаевъ въ теченіе указанныхъ въ вышеприведенной таблицѣ лѣтъ, можно видѣть, что среднее число рожденій было почти равно числу смертныхъ случаевъ; и дѣйствительно, ежегодно насчитывали 7.282 рожденія и 7.336 смертныхъ случаевъ. Амстердамъ посѣщали разныя бѣдствія, и постоянно казалось, что его населеніе не ростетъ. Когда средняя продолжительность жизни не достигаетъ значительной величины, то это почти всегда служитъ вѣрнымъ признакомъ утраты благосостоянія.

Если разсмотрѣть смертность по возрастамъ, то получимъ новое доказательство вліянія нашихъ учрежденій и привычекъ на измѣненіе ея величины. Говоря о мертво-рожденныхъ, мы показали, насколько число ихъ способно увеличиться въ городахъ и особенно среди всякаго рода излишествъ, порождающихъ деморализацію; мы показали также, что дѣти, рождающіяся при неблагопріятныхъ обстоятельствахъ, имѣютъ гораздо меньше шансовъ жить, въ особенности если родители живутъ въ нищетѣ. Разныя опасности застигаютъ ихъ въ первые годы и сопровождаютъ на остальномъ жизненномъ пути; такимъ образомъ, не говоря о тѣхъ опасностяхъ, которымъ мы подвержены по своей природѣ, одни связаны съ нашими обычаями, другіе—съ нашими религіозными и политическими учрежденіями. Опасности, связанныя съ нашими обычаями, я уже пытался намѣтить; я показалъ также вліяніе, которое могутъ оказать извѣстные религіозные обряды, напримѣръ крещеніе,—на раннее дѣтство, постъ и воздержаніе на наши воспроизводительныя силы и, вѣроятно, на нашу жизнеспособность, религіозныя церемоніи и приготовленія къ смерти—на состояніе больного. Къ этимъ дѣйствующимъ причинамъ, измѣняющимъ величину населенія, можно еще присоединить целибатъ, накладываемый на цѣлый классъ людей католическаго духовенства, которое было прежде многочисленнѣе, чѣмъ теперь.

Среди политическихъ учрежденій рекрутскіе наборы и войны постоянно являются новыми причинами смертности, что-бы тамъ ни говорили; это тѣмъ печальнѣе, что онѣ падаютъ на самую здоровую и дорогую часть населенія, на человѣка, достигшаго своего физическаго развитія и готовящагося уплатить обществу долгъ, который образовался благодаря заботамъ объ его дѣтствѣ. Въ нѣкоторыхъ-же странахъ, благодаря поспѣшному зачисленію ихъ въ армію, раньше чѣмъ они успѣли даже вполнѣ развиться, ихъ подвергаютъ новой опасности умереть, или по крайней мѣрѣ изнуряютъ новыя поколѣнія непосильными трудами.

Правительства располагаютъ нѣкоторымъ образомъ жизнью людей, которые постоянно находятся подъ ихъ вліяніемъ съ самаго появленія на свѣтъ Божій до тѣхъ поръ, когда они сходятъ въ могилу. Я не стану говорить здѣсь о самой формѣ правленія; слишкомъ извѣстно, насколько формы, благопріятныя для деспотизма, задерживаютъ развитіе человѣческаго рода и, наоборотъ, насколько разумная свобода, содѣйствуя всякой промышленности и всякимъ индивидуальнымъ усиліямъ, даетъ человѣку средства заботиться о своемъ сохраненіи. Я не буду также говорить о неизмѣримомъ разстояніи, существующемъ между степенью смертности раба и господина, несмотря на излишества, которымъ послѣдніе слишкомъ часто предаются; я не могу не бросить бѣглаго взгляда на смертность въ учрежденіяхъ, созданныхъ человѣкомъ для защиты общества, и бѣгло просмотрѣть то, что относится къ прививкѣ оспы, пріютамъ, госпиталямъ, тюрьмамъ и т. п.; моя цѣль не столько изучать вопросъ въ глубину, сколько показать, въ какихъ широкихъ предѣлахъ могутъ измѣняться числа, въ зависимости отъ мѣста, и какъ осторожно ими надо пользоваться.

Въ большинствѣ цивилизованныхъ странъ существуетъ относительно прививки оспы болѣе или менѣе строгія постановленія, которыя соблюдаются болѣе или менѣе строго. По доктору Каспэру и многимъ другимъ ученымъ, писавшимъ объ опустошеніяхъ, произведенныхъ оспой *), оказывалось, что у поколѣній похищалась десятая часть этимъ бичомъ, т. е. $^1/_{10}$ нашего рода погибала подъ ея вліяніемъ. Дювильяръ нашелъ **): 1) что при естественномъ положеніи на 100 человѣкъ 30 лѣтъ насчитываютъ только 4 вовсе не болѣвшихъ оспой; 2) что $^2/_3$ новорожденныхъ болѣло ею рано или поздно; 3) что оспа губитъ въ первые годы послѣ рожденія максимумъ 1 ребенка на 3 больныхъ; 4) что на 7—8 больныхъ оспой одного какого-либо возраста, умираетъ одинъ. Таково было положеніе вещей до изобрѣтенія прививки; съ тѣхъ поръ положеніе значительно улучшилось; однако въ 1817 году, 745 человѣкъ умерло въ Парижѣ отъ оспы; въ 1818 году—993;

---

*) *Beiträge*, etc. 193 стр. Нѣкоторыя детали, данныя мною по вопросу объ оспѣ, взяты у г. Каспера.

**) Analyse et tableaux de l'influence de la petite vérole.

а въ 1822 дошло даже до 1,084. Въ С.-Петербургѣ насчитывали такъ-же точно, въ 1821 году 408 смертныхъ случаевъ отъ оспы; а въ Вѣнѣ 238 въ 1822 г.; между тѣмъ какъ въ Лондонѣ этотъ послѣдній годъ далъ 712. Пруссія находилась въ этомъ отношеніи въ лучшемъ положеніи, чѣмъ другія страны: въ теченіе двухъ лѣтъ 1820—1821, взятыхъ вмѣстѣ, она теряла отъ оспы только 1 на 7,204, между тѣмъ какъ Франція теряла 1 на 4,218, въ теченіе двухъ предыдущихъ лѣтъ. Вотъ результаты, данные однимъ Берлиномъ почти въ теченіе полустолѣтія:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Отъ 1782 до 1791 | включит. | 4,453 | смерт. | случаевъ. |
| „ 1792 „ 1801 | „ | 4,999 | „ | „ |
| „ 1802 „ 1811 | „ | 2,955 | „ | „ |
| „ 1812 „ 1822 | „ | 555 | „ | „ |

Число смертныхъ случаевъ послѣдняго періода, чрезвычайно незначительное сравнительно съ предыдущими годами, было-бы еще меньше, если бы мы исключили числа за 1814 и 1815 годы, въ теченіе которыхъ прививкой безъ сомнѣнія пренебрегали. Дѣйствительно, эти два года дали 411 случаевъ смерти вслѣдствіе оспы, такъ что число смертныхъ случаевъ за 8 другихъ лѣтъ доходило только до 144.

Впрочемъ, какъ правильно замѣчаетъ Виллермэ *), считать пріобрѣтенными для населенія всѣхъ, кому привили оспу, которыхъ она все-же уноситъ, и всѣхъ, умершихъ отъ какой-нибудь болѣзни, отъ которой ихъ охраняли, значитъ впасть въ ошибку. „Эпидемія или всякая другая болѣзнь, отъ которой предохраняютъ себя, говоритъ этотъ ученый, уничтожаетъ, конечно, одну причину смерти, но тѣмъ самымъ увеличивается вѣроятность смерти отъ другихъ болѣзней. Другими словами, закрывая передъ смертью однѣ двери, предохранительное средство отъ какой-нибудь болѣзни открываетъ шире другія, въ томъ смыслѣ, что, если можно такъ выразиться, большее число людей проходитъ черезъ эти послѣднія; этимъ не сказано, что смертность должна быть одинаково сильной... Слѣдовательно, прививка оспы, какъ и всякое предохранительное средство отъ эпидемическихъ болѣзней, даже одной какой-либо болѣзни, не увеличиваетъ населенія нашей старой Европы, *по крайней мѣрѣ непосредственно;* но, что еще лучше,

*) *Des épidémies*, январь 1833 года.

она улучшаетъ судьбу тѣхъ, которыхъ она предохраняетъ отъ оспы: она уменьшаетъ число слѣпыхъ, сохраняетъ людямъ ихъ естественную красоту и увеличиваетъ среднюю продолжительность жизни.

Драгоцѣнное изобрѣтеніе Дженнэра можно слѣдовательно разсматривать, какъ истинное завоеваніе знанія. Прогрессъ цивилизаціи узнается въ особенности по той заботливости, съ какой сумѣли избѣжать всего, что есть въ обществѣ самаго ужаснаго и жалкаго: даже мало просвѣщенная филантропія ушла слишкомъ далеко въ своемъ усердіи: стараясь избѣжать извѣстныхъ бѣдствій, она порождаетъ другія. Ничто не возбуждаетъ въ насъ большаго сочувствія, какъ слабое дитя, оставленное матерью въ нуждѣ на попеченіе общественной благотворительности; однако, излишнее сочувствіе можетъ превратиться въ поощреніе порока и въ увеличеніе все растущаго бремени для общества.

Очевидно, вслѣдствіе этого опасенія не устраивали въ Эдинбургѣ пріютовъ для подкидышей *). Узнали, какая ужасная смертность царитъ въ этихъ учрежденіяхъ, несмотря на усилія науки, которой все же удается бороться съ ней съ успѣхомъ. Гоукинсъ говоритъ въ своихъ „*Elements de statistique medicale*" **), что смертность въ Дублинскихъ пріютахъ для подкидышей была такъ велика, что она стала предметомъ парламентской анкеты: изъ 10.272 больныхъ дѣтей, посланныхъ въ больницу при пріютѣ, въ теченіе 21 года, къ концу 1796 года, осталось въ живыхъ только 45; 10,201 изъ этихъ несчастныхъ дѣтей были заражены сифилисомъ, между тѣмъ какъ въ послѣднее время такихъ зараженныхъ насчитывали только 1 на 30. Мы показали также, какъ удалось наукѣ, при помощи хорошей администраціи, уменьшить смертность въ родильныхъ пріютахъ. Говоря объ этихъ учрежденіяхъ, я не могу конечно дать полной картины; я долженъ показать, какъ могутъ измѣнить степень смертности наши политическія и филантропическія учрежденія, каковы бы ни были впрочемъ причины этихъ крупныхъ перемѣнъ. По той-же причинѣ я считаю нужнымъ бросить взглядъ на смертность въ госпиталяхъ разныхъ

---

*) *Hawkins, Elements of medical statistics,* 132 стр: „In Edinburgh an attempt has been occasionally made to form a foundling hospital, but has failed from the opinion of its injury to morality".

**) 130 стр.

странъ. Этотъ трудный вопросъ можетъ привести къ большимъ ошибкамъ, такъ какъ не всѣ госпитали принимаютъ больныхъ одинаково тяжкими болѣзнями и находящимися въ одинаковомъ періодѣ. Слѣдовательно, надо быть чрезвычайно осторожнымъ и въ особенности сравнивать между собою только такіе госпитали, которые принимаютъ больныхъ одного рода. Въ этомъ отношеніи я буду слѣдовать за Гоукинсомъ и позаимствую у него числа, приведенныя имъ въ его „*Elements de statistique médicale*".

| | | |
|---|---|---|
| Въ 1685 г. въ госпиталяхъ Св. Варѳоломея и св. Ѳомы смертность была | 1 на | 7 |
| „ 1689 „ въ госпиталѣ св. Ѳомы было | 1 „ | 10 |
| „ 1741 „ | 1 „ | 10 |
| Отъ 1773 до 1783 | 1 „ | 14 |
| „ 1783 „ 1793 | 1 „ | 15 |
| „ 1803 „ 1813 | 1 „ | 16 |

Согласно первому отчету госпиталя Св. Георгія, опубликованному въ 1734 году, смертность равнялась 1 на 8; для 1825—1827 она равнялась 1 на 9.

Смертность въ Эдинбургскомъ королевскомъ госпиталѣ, по 10-лѣтнему періоду, кончившемуся въ 1818 году, равнялась 1 на 16, какъ и въ госпиталѣ Св. Ѳомы въ Лондонѣ.

Г. Casper привелъ въ спеціальныхъ изслѣдованіяхъ о положеніи бѣдныхъ въ Парижѣ *) таблицу, охватывающую относительную смертность и продолжительность пребыванія въ Парижскихъ госпиталяхъ и пріютахъ. Такъ какъ данныя этого ученаго заслуживаютъ довѣрія и по источнику, откуда онъ ихъ взялъ, и потому что онъ могъ ихъ провѣрить лично на мѣстахъ, я считалъ нужнымъ заимствовать у него слѣдующія числа.

Впрочемъ, надо помнить, что большая часть чиселъ, приводимыхъ нами въ этой главѣ, должна разсматриваться скорѣе, какъ *болѣе или менѣе возможныя* числа, нежели какъ *статистическія* данныя: обыкновенно, сравниваемыя числа слишкомъ незначительны или собраны съ слишкомъ недостаточной осторожностью; иногда возможно только привести отношеніе величинъ, но дѣйствительное значеніе ихъ остается неизвѣстнымъ. Это смѣшеніе приводитъ къ столькимъ досаднымъ ошибкамъ въ оцѣнкѣ статистическихъ

---

*) *Beiträge*, das Armen und Armen kranken-wesen in Paris.

данныхъ, особенно лицъ, незнакомыхъ съ теоріей вѣроятностей *).

Оказывается, что смертность въ госпиталяхъ остальной части Франціи не столь велика, какъ въ Парижѣ. Если отдѣлить венерическія больницы, пріюты родильные и сиротскіе, то число

| Парижскія госпитали 1822 г. | Смертность. | Средняя продолжительность пребыванія. |
|---|---|---|
| Hôtel-Dieu | 1 на 6,8 | 25,2 дня |
| Pitié | „ 8,2 | 28,0 „ |
| Charité | „ 5,5 | 30,6 „ |
| Saint Antoine | „ 6,7 | 31,6 „ |
| Necker | „ 5,6 | 33,6 „ |
| Cochin | „ 8,3 | 25,8 „ |
| Beaujon | „ 6,2 | 30,8 „ |
| Saint Louis | „ 14,4 | 60,3 „ |
| Vénériens | „ 33,2 | 66,4 „ |
| Enfants malades | „ 4,4 | 51,3 „ |
| Maisons d'accouchements | „ 28,0 | 21,1 „ |
| Enfants trouvés. Service intérieur | „ 4,3 | 11,2 „ |
| „ „ „ extérieur | „ 6,2 | — |
| Maison royale de santé | „ 5,8 | 24,7 „ |
| Maison de santé (Vénériens) | „ 113,0 | 41,0 „ |
| **Парижскія богадѣльни 1822 г.** | | |
| Salpêtrière | „ 8,4 | — |
| Bicêtre | „ 7,6 | — |
| Incurables, hommes | „ 6,7 | — |
| Incurables, femmes | „ 11,1 | 64,0 „ |
| Hospice des ménages | „ 11,8 | 31,5 „ |
| „ „ orphelins | „ 75,3 | — |
| „ de la Rochefoucauld | „ 8,4 | — |
| Institut de Sainte-Périne | „ 9,1 | 302,0 „ |

смертныхъ случаевъ становится почти такимъ-же, какъ и во всемъ королевствѣ. Вотъ списокъ смертности въ главныхъ европейскихъ

*) Изслѣдуя смертность въ пріютахъ для подкидышей и въ госпиталяхъ разныхъ странъ, оставляя даже тѣ, которые даютъ необыкновенное число смертн. случаевъ, мы можемъ только повторить вышесказанное о смертности, вызываемой извѣстнымъ состояніемъ и извѣстными профессіями. Эта часть относится безъ сомнѣнія къ статистикѣ, но она еще больше касается изслѣдованій медицины, которая, занимаясь болѣе непосредственно вліяніемъ природы, можетъ исторически намѣтить главныя уклоненія, опредѣлить ихъ нужды и найти истинное леченіе.

госпиталяхъ *); ихъ можно будетъ сравнить съ предыдущими данными:

| | Смертность приблизительно на 1 |
|---|---|
| Берлинъ, госпиталь Charité, съ 1796 по 1817 . . | 6 |
| Вѣна, большой госпиталь . . . . . . . . . . . | 6 |
| Пештъ, въ Венгріи, гражд. госпиталь, 1826 . . . | 6 |
| Дрезденъ, городской госпиталь, 1816 . . . . . . | 7 |
| Мюнхенъ, новый госпиталь, 1819 . . . . . . . | 9 |
| С.-Петербургъ, императорск. госпиталь, 1817 **) . | 4,5 |
| Женева, госпиталь, 1823 . . . . . . . . . . . | 1 |
| Брюссель, госпиталь Св. Петра, 1823 . . . . . | 9 |
| Амстердамъ " " 1798—1817 . . | 8 |
| Туринъ и Генуя, 1821 . . . . . . . . . . . . | 7 |
| Миланъ, большой госпиталь, 1812—1814 . . . . | 6 |
| Павія, San-Matheo della Pietá 1823 ***) . . . . . | 10,7 |
| Болонья, клиника Томмазини 1816—1819 . . . . | 7,7 |
| Ливорно, 1818—1825 . . . . . . . . . . . . | 7,3 |
| Палермо, большой госпиталь, 1823 . . . . . . . | 8,2 |

Согласно всѣмъ этимъ даннымъ оказывается, что смертность въ главныхъ госпиталяхъ континента была, до 1833 года, въ общемъ больше, чѣмъ въ Англіи. Впрочемъ, можно удивляться тому, что, сравнивая главныя европейскія государства, не находимъ болѣе значительныхъ неравенствъ, въ особенности если принять во вниманіе, какое вліяніе должны оказать помѣщеніе и средства, которыми могутъ располагать госпитали, не говоря уже о различныхъ медицинскихъ системахъ, которымъ тамъ слѣдуютъ. Гоукинсъ сдѣлалъ довольно любопытное замѣчаніе, въ этомъ отношеніи. „*Рѣдко*, говоритъ онъ, можно приписать смертность вліянію плохого пользованія, которое рѣдко *губитъ* жизнь. Одинъ пріятель дѣлалъ частныя наблюденія надъ сравнительной смертностью въ одномъ и томъ-же госпиталѣ при трехъ докторахъ. Одинъ былъ *эклектикомъ*, второй склонялся къ *выжидающей* системѣ и третій—сторонникъ *тонической* діэты. Смертность была одинако-

---

*) Elements of medical Statistics.

**) Въ главныхъ Россійскихъ госпиталяхъ въ 1811 г., смертность въ учрежденіяхъ, содержащихъ больше 30 больныхъ, была равна 1 на 9, а въ содержащихъ меньше 30—1 на 10.

***) Тамъ принимаютъ женщинъ для родовъ.

вой, но продолжительность болѣзни, характеръ выздоровленія и возможность возврата болѣзни были весьма различны“.

Здѣсь не мѣсто говорить о домахъ для умалишенныхъ, о смертности въ которыхъ у насъ еще мало достовѣрныхъ данныхъ; я буду имѣть случай говорить объ этомъ позже въ другомъ мѣстѣ, когда будетъ рѣчь о развитіи нравственныхъ и интеллектуальныхъ способностей человѣка и о болѣзняхъ, которымъ подвержены эти способности. Я не буду также останавливаться на изслѣдованіи смертности въ домахъ призрѣнія нищихъ, такъ какъ эти учрежденія мало распространены и отличаются слишкомъ разнообразнымъ устройствомъ, чтобы допускать сравненія. Однако я не могу не указать на большую смертность, наблюдаемую въ этихъ учрежденіяхъ древняго Нидерландскаго королевства: она вполнѣ пригодна для того, чтобы наглядно представить несчастное положеніе бѣдняка. Въ семи такихъ домахъ, которые были расположены въ разныхъ пунктахъ королевства, въ теченіе 1811—1822 года умиралъ ежегодно 1 человѣкъ на 8,9 средняго населенія, т. е. столько-же сколько въ госпиталяхъ; между тѣмъ для всего королевства это отношеніе доходило до 1 на 43,8 ч. „Смертность въ домахъ призрѣнія нищихъ дѣйствительно тѣмъ ужаснѣе, что населеніе этихъ домовъ исключаетъ такіе возрасты. Не слѣдуетъ упускать изъ виду, что въ эти дома поступаетъ огромное число стариковъ и всякаго рода немощныхъ, что состояніе абсолютнаго истощенія, до котораго они чаще всего доведены, прибывая туда, несетъ уже въ себѣ развитое сѣмя скорой гибели и должно быть несомнѣнно отнесено къ числу причинъ, которымъ можно приписать этотъ печальный результатъ. Это послѣднее обстоятельство особенно замѣтно было въ злополучномъ 1816 году. Множество несчастныхъ вступило тогда въ эти дома только для того, чтобы умереть черезъ нѣсколько дней послѣ своего прихода, а большая часть другихъ погибла отъ разныхъ изнурительныхъ болѣзней въ слѣдующіе два года. Съ другой стороны, весьма возможно, что внезапный переходъ отъ самыхъ ужасныхъ лишеній къ питанію, которое должно было казаться сравнительно преизобильнымъ, оказываетъ здѣсь тѣмъ болѣе прискорбное вліяніе, что при нѣкоторой предосторожности его можно было-бы избѣжать. Третье наблюденіе, котораго нельзя обойти молчаніемъ, заключается въ томъ, что для того, чтобы найти законы смертности въ учрежденіяхъ, населеніе которыхъ подвижно, недостаточно сравнить число смертныхъ случаевъ съ числомъ проведенныхъ въ нихъ дней; надо также принять во вниманіе число лицъ, между которыми должно быть распредѣлено это число дней. Чѣмъ больше это послѣднее число, въ особенности въ домахъ для нищихъ и хворыхъ, тѣмъ больше кажется шансовъ на смерть *)".

Отмѣченная сейчасъ смертность безъ сомнѣнія довольно значительна, но я не думаю, чтобы она достигла въ какомъ-нибудь бельгійскомъ домѣ призрѣнія нищихъ большей величины, чѣмъ она была около начала XIX столѣтія въ домахъ призрѣнія нищихъ во Франціи. Дѣйствительно, согласно Виллермэ **), смертность въ Лаонѣ равнялась въ теченіе 13-лѣтняго періода, окончившагося въ 1826 году—1 человѣку на 4,32; въ Нанси въ 1789,—1 на 5; а въ 1801 г.—1 на 3,2; въ Ошѣ въ теченіе пятилѣтняго періода меньше чѣмъ 1 на 3; въ Мецѣ—1 на 8,1 въ 1789 г., и на 2,2 въ 1801 году. Эта ужасающая смертность можетъ сравниться только съ тѣмъ, что происходило въ одной изъ главныхъ бельгійскихъ тюремъ приблизительно въ началѣ XIX столѣтія: трудно даже повѣрить, что въ Вильвордской тюрьмѣ умирало:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Въ 1802 году . . . | 1 арестантъ | на | 1,27 | средняго | населенія |
| „ 1803 „ . . . | „ | „ | 1,67 | „ | „ |
| „ 1804 „ . . . | „ | „ | 1,91 | „ | „ |
| „ 1805 „ . . . | „ | „ | 7,77 | „ | „ |
| „ 1806 „ . . . | „ | „ | 20,31 | „ | „ |
| „ 1807 „ . . . | „ | „ | 30,36 | „ | „ |

Въ 1801 году этого бѣдствія еще не существовало; въ 1802 г. оно достигло своей величайшей интенсивности; въ 1805 году Шабанъ, префектъ стараго департамента Диля, и Руппъ, главный тюремный инспекторъ, начали вводить улучшенія, которыя могли быть закончены только въ 1807 г. ***). Виллермэ, позаботившійся отмѣтить также и это замѣчательное бѣдствіе въ своей работѣ „*О смертности въ тюрьмахъ*", прибавляетъ слѣдующія соображенія. „Послѣ приведенныхъ фактовъ, что мнѣ остается сказать,

*) Эти справедливыя замѣчанія взяты изъ замѣчаній барона Кэвэрбэрга, которыми онъ снабдилъ мои: „*Recherches sur les populations, les naissances, etc.*

**) *Mortalité dans les prisons (Annales d'Hygiène*, I т., 9 стр.).

***) *Tableau statistique de la maison de détension de Vilvorde*, par Rouppe.

для того, чтобы доказать силу администраціи: я вовсе не думаю, что заключеніе въ тюрьму всегда—жестокость, но плохое содержаніе почти всегда дѣлаетъ его жестокостью. Все, что говорили тѣ, кто заботился о заключенныхъ, не занимаясь никогда изслѣдованіями такого рода, часто оказывалось продиктованнымъ декламаторской чувствительностью. Но, когда считаютъ людей и опредѣляютъ годовое отношеніе смертныхъ случаевъ, все сводится тогда къ простому вычисленію, элементы котораго нужно провѣрить. Если оно вѣрно, то зло или благо, выраженное числомъ, дѣйствительно.

Чтобы понять, до чего доходило бѣдствіе въ Вильвордской тюрьмѣ и на сколько должна была быть неисправна тамъ администрація, достаточно будетъ указать на то, какова была тамъ смертность съ тѣхъ поръ. Я укажу вмѣстѣ съ тѣмъ смертность двухъ другихъ большихъ тюремъ Бельгіи *).

| Годы. | 1 смерт. случай на средн. число населенія. | | |
|---|---|---|---|
| | Vilvorde. Смирит. домъ. | Saint—Bernard. Исправит. домъ. | Gand. Смирит. домъ. |
| 1825 | 29,00 | 18,71 | 31,60 |
| 1826 | 29,00 | 22,08 | 45,80 |
| 1827 | 29,62 | 17,81 | 77,53 |
| 1828 | 48,14 | 17,99 | 51,35 |
| 1829 | 29,74 | 15,06 | 101,67 |
| 1830 | 36,66 | 11,93 | 101,08 |
| 1831 | 39,78 | 30,51 | 57,90 |

Теперь можно судить о томъ, можетъ-ли человѣкъ, предоставленный самому себѣ и предающійся величайшимъ излишествамъ, можетъ-ли онъ при какомъ-бы то ни было состояніи общества увеличить свою смертность больше, чѣмъ это дѣлаетъ небрежная и мало-просвѣщенная администрація при извѣстныхъ обстоятельствахъ? Никогда люди и при самой ужасной чумѣ, ни солдаты во время самыхъ разрушительныхъ войнъ не подвергались такой смертности, какая наблюдалась среди Вильвордскихъ заключенныхъ въ теченіе первыхъ лѣтъ XIX го столѣтія.

---

*) *Rapport sur l'état actuel des prisons en Belgique*, etc., par Ed Ducpétiaux.

Около того-же времени, это зло было далеко не такъ велико въ смирительномъ домѣ въ Гентѣ (Gand); въ 1801 году насчитывали только 1 смертный случай на 20,4 заключенныхъ; и только на 25,8 въ 1789 году. По Виллермэ годовая смертностъ въ тюрьмахъ Сенскаго округа была въ теченіе 1815,1816,1817 и 1818 годовъ такова:

| | | |
|---|---|---|
| Въ Grande Force | 1 на 40,88 | закл. |
| „ Madelonnettes | „ „ 38,03 | „ |
| „ Conciergerie | „ „ 32,06 | „ |
| „ Petite Force | „ „ 26,63 | „ |
| „ Saint-Lazare | „ „ 24,48 | „ |
| „ Bicêtre | „ „ 18,75 | „ |
| „ Sainte—Pélagie | „ „ 17,92 | „ |
| „ dépôt de mendicité à Saint Denis | „ „ 3,97 | „ |

Ясно, что въ Сенскомъ департаментѣ смертность въ домахъ призрѣнія нищихъ такъ-же велика, какъ и въ тюрьмахъ, и она такъ-же хранитъ свои зародыши въ организмѣ бѣдныхъ, часто поврежденномъ лишеніями и нищетой, предшествовавшей вступленію въ тюрьму, и невозможностью добиться нѣкоторыхъ удобствъ въ жизни *).

Тюрьмы нѣкоторыхъ департаментовъ Франціи далеко не представляли столь-же благопріятныхъ результатовъ, какъ тюрьмы Сенскаго департамента: смертность въ центральныхъ тюрьмахъ, maisons de justice и исправительныхъ домахъ въ дѣйствительности была:

| | | |
|---|---|---|
| Въ Монпелье | 1822 | 1 на 9,33 |
| „ Ріонѣ | 1821—1827 | „ 9,87 |
| „ Больё близъ Каэна | 1814—1825 | „ 11,59 |
| „ Меленъ | 1817—1825 | „ 14,81 |
| „ Гальонъ | 1817—1825 | „ 11,86 |
| „ Мецѣ | 1801 | „ 18,43 |
| „ Тулузѣ | 1822—1824 | „ 35,07**). |
| „ Ліонѣ | 1820—1825 | „ 43,00***). |
| „ Сенъ-Флурѣ | 1813—1826 | „ 47,00 |

*) *Mortalité dans les prisons*, 5 стр.

**) Въ 1814 г., отличавшемся переполненіемъ и нищетой умиралъ 1 заключенный на 7,95.

***) Отъ 1800 до 1805 г. включительно—1 на 19; 1 на 31 съ 1806 по 1812 г.; 1 на 34 съ 1813 по 1819 г.

Въ Руанѣ, 1815—1826, maison de justice „ 51,18 *).
„ „ . . . . . . 1820—1825, Bicêtre „ 59,07 **).

Въ 1827 году насчитывали въ среднемъ 1 смертный случай на 22 осужденныхъ въ центральныхъ тюрьмахъ Франціи; а среднее отношеніе для мужчинъ было 1 на 16 и 1 на 26 для женщинъ. Виллермэ, у котораго я заимствовалъ предыдущія данныя, опредѣляетъ смертность каторжныхъ тюремъ такъ:

| | |
|---|---|
| Въ Рошфорѣ съ 1816 по 1828 г. . . . . | 1 на 11,51 |
| „ Тулонѣ „ „ „ „ „ . . . . | „ 20,55 |
| „ Брестѣ „ „ „ „ „ . . . . | „ 27,06 |
| „ Лорьянѣ „ „ „ „ „ . . . . | „ 39,17 |

Тюрьмы Швейцаріи и Соединен. Штатовъ часто принимали за лучшія; поэтому любопытно можетъ быть знать царившую тамъ смертность ***).

| | |
|---|---|
| Исправительный домъ въ Бернѣ, 1831 . . . . . . . . . . | 1 на 25,00 |
| „ „ „ Лозаннѣ, 1808—1825, старая система | „ 21,49 |
| „ „ „ „ 1826—1829, новая „ | „ 12,25 |
| „ „ „ „ 1830—1831 „ „ | „ 36,00 |
| „ „ „ Женевѣ, 1825—1831 „ „ | „ 49,00 |
| Тюрьма въ Филадельфіи (Пенсильванія) . . . . . . . | 16,66 |
| „ „ Ньюгатѣ (Нью-Іоркъ) . . . . . . . . . . . | 18,80 |
| Исправительный домъ въ Зингзингѣ (Нью-Іоркъ) 12 лѣтъ | 36,58 |
| „ „ „ Ведерфильдѣ (Коннэктикутъ) . . | 44,40 |
| „ „ „ Балтиморѣ (Мэрилэндъ) . . . . . | 48,57 |
| „ „ „ Обурнѣ (Нью-Іоркъ) . . . . . . | 55,95 |
| „ „ „ Чарлстоунѣ (Масэчузетцъ) . . . | 58,40 |

Досадно, что намъ недостаетъ свѣдѣній относительно смертности въ англійскихъ тюрьмахъ; кажется только, что она тамъ очень незначительна. Этотъ вопросъ заслуживаетъ можетъ быть вниманія статистиковъ больше всякаго другого, такъ какъ мало такихъ подверженныхъ измѣненіямъ чиселъ, а слѣдовательно и такихъ, относительно которыхъ правительства должны быть болѣе

---

*) Больницы были хорошо устроены, и уходъ хорошо организованъ. Смертность въ 1812, 1813 и 1814 год. равнялась 1 на 4,06!

**) Съ 1811 по 1814 г. смертность была 1 на 8,46, 1 на 21,70, съ 1816 по 1820 г.; послѣ этого времени присужденные къ 1 году заключенія и болѣе были оттуда взяты.

***) *Rapport annuel sur l'état des prisons en Belgique* (до 1833 г.).

освѣдомлены. Дѣйствительно, мы видѣли, что въ зависимости отъ небрежности или усердія тюремной администраціи, смертность въ одномъ и томъ-же учрежденіи можетъ не превосходить смертности обыкновеннаго состоянія общества или стать страшнѣе, чѣмъ во время самыхъ разрушительныхъ бѣдствій. Лишеніе свободы и униженія, связанныя съ судьбой осужденныхъ, достаточно тяжелыя наказанія, чтобы не отягчать ихъ еще смертностью, безпримѣрной среди бѣдствій, которымъ подверженъ нашъ родъ. Можно сказать съ удовлетвореніемъ, что съ тѣхъ поръ какъ стали больше заниматься судьбой заключенныхъ, ихъ смертность уменьшилась почти во всѣхъ учрежденіяхъ безъ исключенія; это новое благодѣяніе распространенія просвѣщенія, и, осмѣливаюсь сказать, дорогихъ заботъ, благодаря которымъ статистика сдѣлала очевидными выводы, относительно которыхъ не обладали никакими точными данными, и которые сами по себѣ производили слабое впечатлѣніе, такъ какъ легко ошибались относительно самой природы зла *). Вотъ главные выводы, къ которымъ пришелъ Виллермэ, одинъ изъ ученыхъ, бросившій свѣтъ на этотъ важный вопросъ **).

1) Смертность заключенныхъ вообще значительно сильнѣе смертности свободныхъ людей.

2) Она находится въ прямой зависимости отъ дурного содержанія тюремъ, отъ современнаго состоянія нищеты, бѣдности арестантовъ и лишеній и страданій, перенесенныхъ ими до заключенія въ тюрьму.

3) Если администрація почти безсильна противъ послѣднихъ причинъ, то она всегда можетъ удачно и заботливо предупредить первыя или по крайней мѣрѣ значительно ослабить ихъ.

4) Если, отвлекаясь отъ различій, связанныхъ съ мѣстностью и хорошей или плохой администраціей, мы размѣстимъ заключенныхъ въ порядкѣ возрастающей смертности, то они будутъ размѣщены слѣдующимъ образомъ: „Подсудимые и слѣдственные;

Осужденные;

Содержащіеся въ домахъ призрѣнія нищихъ.

---

*) *Mortalité des prisons, etc.*

**) Vorlesungen über die Gefängniss-Kunde in 8⁰, Berlin, Julius—одно изъ самыхъ замѣчательныхъ сочиненій, написанныхъ объ улучшеніи тюремъ и моральной реформѣ мѣстъ заключенія. Эта работа была переведена на французскій. См. также работы Люка, члена французскаго Института.

5) Чтобы оцѣнить дѣйствіе здоровыхъ и нездоровыхъ помѣщеній, хорошаго или дурного содержанія каждаго и шансы жизни разныхъ классовъ заключенныхъ, лучше всего опредѣлить годовую пропорцію смертныхъ случаевъ, относя это не къ общему числу содержащихся, а къ ихъ среднему годовому тюремному населенію.

6) Незнакомство съ участью заключенныхъ, ихъ нуждами и судьбою самыхъ бѣдныхъ изъ нихъ—первая причина, которой надо объяснить чрезвычайную смертность, примѣры которой были приведены".

Изъ чрезмѣрныхъ измѣненій чиселъ для тюремъ, госпиталей, пріютовъ для подкидышей и богадѣленъ для нищихъ, видно, что смертность измѣняется отъ одного года къ другому съ величайшей быстротой, и общіе законы смертности человѣчества не приложимы къ нимъ.

## О примѣненіи статистики въ медицинскихъ наукахъ.

Ничто не оспаривалось такъ сильно, какъ польза статистики въ медицинскихъ наукахъ; а это зависитъ отъ того, какъ ею пользуются.

Когда появляется одинъ изъ тѣхъ бичей, которые производятъ среди людей опустошенія и которые предназначены кажется для того, чтобы вызвать смятеніе въ медицинскихъ обществахъ, среди которыхъ они проявляютъ послѣдніе отголоски своихъ опустошеній, одни врачи послушно слѣдуютъ урокамъ своихъ предшественниковъ, а другіе смѣло прокладываютъ новые пути, имѣя въ виду общую пользу или только частную выгоду и привлеченіе общественнаго вниманія. Въ общемъ всѣ создаютъ статистику, но одни довѣряютъ свои выводы памяти, другіе—бумагѣ. Тотъ, кто имѣлъ малый успѣхъ, воздерживается отъ разсказа о своихъ неудачахъ; остаются стало быть тѣ, кто успѣвалъ или кто полагаетъ, что онъ успѣлъ больше своихъ сотоварищей.

Среди нихъ многіе обязаны своимъ успѣхомъ только случайнымъ причинамъ, и они весьма вѣроятно меньше кичились-бы имъ, если-бъ имъ пришлось чаще лѣчить. Но среди нихъ есть и такіе, которые обязаны своими успѣхами только своему знанію и своей проницательности.

Одинъ докторъ объясняетъ болѣзнь такой-то причиной, и онъ правъ въ отношеніи пользуемыхъ имъ больныхъ; другой приписываетъ болѣзнь другой причинѣ и такъ-же точно правъ; но и тотъ и другой неправы, такъ какъ каждый изъ нихъ узнаетъ одну только причину, въ то время какъ въ дѣйствительности существуетъ можетъ быть много причинъ. Они не должны были сообщать того, что было только результатомъ частныхъ случаевъ; каждый наблюдалъ нѣсколько разъ кряду проявленія одной только стороны явленія, и онъ не могъ познать всѣхъ другихъ сторонъ за недостаткомъ достаточнаго числа наблюденій. Ихъ противорѣчія вытекаютъ изъ неполнаго знанія.

Эти противорѣчія поражаютъ массу, которая поэтому и осуждаетъ числа, изъ которыхъ дѣлаютъ исключающіе другъ друга выводы или такіе, которые кажутся противорѣчивыми. Чтобы быть справедливымъ, прибавлю, что желаніе похвастать успѣхомъ часто обманываетъ память при запоминаніи несчастныхъ случаевъ; ихъ часто обходятъ подъ какимъ-нибудь предлогомъ, считая себя вполнѣ искреннимъ.

Однако, оставимъ сужденія массы и вернемся къ нашему примѣру. Если я предположу, что доктора лѣчатъ наугадъ и не дѣлая ни добра ни зла, то согласно закону возможности окажется, что наибольшая часть губитъ мало больныхъ; нѣкоторые будутъ губить многихъ и хранить молчаніе, другіе будутъ многихъ спасать, и это главнымъ образомъ тѣ, которые возвышаютъ свой голосъ. Констатируя выводы изъ ихъ практики (я считаю ихъ искренними), они будутъ только устанавливать фактъ, который я охотно принимаю. Откуда стало быть зло? Я его вижу въ томъ, что сразу оставляютъ статистику и бросаются въ область догадокъ.

Не ограничиваются тѣмъ, что говорятъ: „я спасъ много больныхъ“, а прибавляютъ: „это потому, что я узналъ истинную причину болѣзни, и потому что я сумѣлъ примѣнить истинное средство“. Но никакъ не доказываютъ связи, существующей между дѣйствіемъ и мнимой причиной; а это именно и слѣдовало сдѣлать.

Идутъ даже дальше; и, указавъ мнимую причину какой-нибудь болѣзни, лѣчатъ на основаніи этого встрѣчающіяся новыя заболѣванія, и въ большинствѣ случаевъ не считаясь ни съ организмомъ, ни съ возрастомъ, ни съ поломъ. Въ этомъ заключается злоупотребленіе статистикой, *если тутъ есть какая-нибудь статистика*.

Замедляетъ и дѣлаетъ мало увѣреннымъ развитіе медицины то, что наблюдаемыя явленія почти всегда зависятъ отъ множества причинъ, и что вслѣдствіе этого они почти никогда не могутъ вполнѣ быть сравниваемы другъ съ другомъ. Ничто не указываетъ лучше на трудности этой науки, какъ испытанныя ею замедленія въ развитіи, несмотря на постоянные труды и высокія дарованія множества людей, занимавшихся ими съ самой глубокой древности.

Въ самомъ дѣлѣ, докторъ пользуетъ больного и исцѣляетъ его. Затѣмъ его приглашаютъ къ другому больному, находящемуся въ точно такомъ-же положеніи, какъ и первый, съ такимъ же организмомъ, такого-же возраста, наконецъ къ такому, котораго можно вполнѣ сравнить съ нимъ во всѣхъ отношеніяхъ. Естественно, что онъ примѣнитъ къ нему тѣ терапевтическія средства, которыя уже привели къ успѣху, и онъ будетъ увѣренно ждать выздоровленія, если вѣрно только, что одинаковыя причины порождаютъ одинаковыя слѣдствія.

Если-бы между всѣми людьми существовало строгое сходство, то достаточно было бы слѣдовательно одного хорошо наблюденнаго случая болѣзни, кончившагося выздоровленіемъ, для того чтобы добиться того-же успѣха всякій разъ, когда та-же болѣзнь повторится у другихъ людей. Но этого полнаго сходства не будетъ, можетъ быть, никогда; такъ нужно полагать по крайней мѣрѣ если принять во вниманіе, какъ отличаются одинъ отъ другого люди по возрасту, полу, тѣлосложенію, по предыдущимъ болѣзнямъ и по множеству другихъ причинъ. Въ теченіе всей своей жизни докторъ не дѣйствуетъ два раза при абсолютно сходныхъ обстоятельствахъ.

Для того, чтобы не слишкомъ уклониться отъ своего перваго предположенія, я предполагаю, что въ человѣческомъ родѣ нѣтъ другого различія кромѣ того, которое вноситъ полъ. И тогда уже докторъ будетъ менѣе увѣренъ въ своихъ дѣйствіяхъ; а если ему удалось сперва излѣчить мужчину, то онъ потерпитъ можетъ быть неудачу, когда придется лѣчить женщину. Надо будетъ вновь прибѣгнуть къ опыту и установить, приведутъ-ли снова къ успѣху средства, употребленныя въ первый разъ; слѣдовательно, нужны по крайней мѣрѣ два наблюденія.

Если-бъ существовало не одно только различіе половъ, но и неравенство возрастовъ, то число наблюденій надо было-бы еще увеличить. Такимъ образомъ, предполагая для простоты, что существуетъ 3 класса, состоящихъ изъ лицъ однаковаго возраста, дѣтей, юношей и стариковъ, то существовало-бы шесть родовъ людей, и надо было-бы имѣть по крайней мѣрѣ по одному наблюденію для каждаго изъ шести различныхъ случаевъ, которые могли-бы встрѣтиться. Однако, такъ какъ возрасты могутъ измѣняться съ самыми различными оттѣнками, то нужно было-бы столько-же наблюденій, сколько существуетъ возможныхъ возрастовъ. Число ихъ было-бы безконечно велико.

Что-же сказать, если нужно принять во вниманіе не только полъ и возрастъ, но и всякія индивидуальныя особенности? Повторяю, всей жизни доктора недостаточно было-бы, для того чтобы имѣть случай наблюдать двухъ больныхъ при абсолютно подобныхъ обстоятельствахъ.

Таково, кажется мнѣ, самое сильное возраженіе, которое можно сдѣлать противъ примѣненія статистики въ медицинскихъ наукахъ. Если-бы нужно было предвидѣть всѣ случаи, которые могутъ встрѣтиться, собрать достаточное число наблюденій и записать всевозможныя комбинаціи, то надо было-бы отчаяться въ томъ, чтобъ прійти когда-нибудь къ чему-нибудь удовлетворительному; надо было-бы отказаться не только отъ примѣненія статистики, но и отъ самаго наблюденія. И дѣйствительно, опытъ будетъ только пустымъ словомъ, такъ какъ одна болѣзнь могла-бы претерпѣть безконечное число измѣненій подъ вліяніемъ всѣхъ причинъ, порождающихъ ее.

Посмотримъ однако, почему доктора, тѣ самые, которые энергичнѣе всего отвергаютъ статистику, не отчаялись всецѣло въ будущемъ своей науки. Они то и поняли, что не существуетъ большого числа существенно различныхъ случаевъ, хотя причины, которыя могутъ вліять на одну и ту-же болѣзнь, въ общемъ очень многочисленны и подвержены измѣненіямъ съ множествомъ оттѣнковъ. При многихъ болѣзняхъ, напримѣръ, разность половъ не производитъ ощутительнаго дѣйствія такъ-же какъ и незамѣтная разница возрастовъ; такимъ, образомъ, эти причины могутъ разсматриваться, какъ оказывающія почти одинаковое вліяніе. Тогда остается только узнать причины, оказывающія индивидуальное рѣзко выраженное вліяніе и установить на основаніи произведеннаго наблюденія ту относительную часть силы, которая принадлежитъ каждой изъ причинъ. Это изслѣдованіе можетъ быть произведено только людьми, отличающимися отмѣннымъ тактомъ и вѣрнымъ сужденіемъ, наблюдателями, одаренными той способностью и терпѣніемъ, которыя Бюффонъ называлъ геніемъ. Думаютъ-ли, что столь благоразумные люди не ведутъ счета своимъ наблюденіямъ, и что, подсчитывая всѣ случаи для сравненія ихъ впослѣдствіи, они предпочитаютъ довѣрять ихъ памяти скорѣе, нежели бумагѣ? Но какъ только эти наблюденія собираютъ для того, чтобы сдѣлать ихъ сравнимыми и дѣлать изъ нихъ выводы, создаютъ статистику, какъ-бы тамъ они не отговаривались. Единственная разница между тѣми, кто записываетъ результаты своихъ наблюденій, и тѣми, кто довѣряетъ ихъ своей памяти, заключается въ томъ, что первые сообразуются съ научными принципами, а вторые грубо нарушаютъ ихъ.

Кромѣ того, въ медицинскихъ наукахъ, и въ общественной гигіенѣ въ частности, явленія неодинаково сложны, и слѣдовательно не поддаются съ одинаковой трудностью статистическому анализу. Когда-же наблюдатель узналъ ихъ, то можно несомнѣнно съ успѣхомъ примѣнить методъ, основанный на вычисленіи вѣроятностей.

Когда Дженнеръ обогатилъ человѣчество своимъ важнымъ открытіемъ, то прежде всего поняли, что для опредѣленія цѣнности прививки надо записывать факты и тщательно сравнивать ихъ, принимая во вниманіе всѣ причины, могущія препятствовать дѣйствію прививки. Этотъ чисто статистическій методъ показалъ несомнѣнность благодѣянія прививки. Онъ-же констатировалъ позже, что это драгоцѣнное предохранительное средство оказываетъ при извѣстныхъ обстоятельствахъ только временное дѣйствіе.

Возьмемъ другой примѣръ, который покажетъ намъ, какъ долго можно ошибаться, вслѣдствіе отвращенія къ вычисленіямъ въ вопросахъ, принадлежащихъ исключительно области чиселъ. Еще раньше чѣмъ она получила свое названіе, статистика примѣнялась въ медицинскихъ вопросахъ. Опредѣлили біеніе пульса въ разные возрасты и узнали, сколько надо присвоить каждому полу. Только плохія или слишкомъ малочисленныя наблюденія вводили въ заблужденіе относительно числа ударовъ пульса у стариковъ. Ошибка послѣдовательно повторялась во всѣхъ физіологическихъ трактатахъ, и хотя доктора имѣли возможность ежедневно ощупывать пульсъ больныхъ и руководствоваться своими наблюденіями, они не полюбопытствовали провѣрить этотъ фактъ. Только въ послѣднее время, согласно новымъ наблюденіямъ, установили, что вопреки принятому мнѣнію, вообще пульсъ стариковъ болѣе ускоренный нежели у людей зрѣлаго возраста. Вмѣсто того чтобы съ негодованіемъ отвергать помощь статистики, не лучше-ли воспользоваться ею, для того чтобы совершенно разрушить ошибки, существующія въ трудахъ, посвященныхъ медицинѣ? Большая часть встрѣчающихся тамъ чиселъ требуетъ строгой повѣрки, и можетъ быть удивятся ошибкамъ, которыя придется тамъ исправить *).

Нѣтъ сомнѣнія, статистическія данныя принесли-бы величайшую пользу, если-бъ они всегда собирались безпристрастно и безъ желанія выдвинуть какую нибудь предвзятую идею. Когда хирургъ предпочитаетъ одну операцію какой-нибудь другой, то это потому, что онъ видитъ въ ней больше шансовъ на успѣхъ. Для того-же чтобы прійти къ такому выводу, надо было считать и сравнивать: надо было прибѣгнуть къ статистикѣ. Печальныя злоупотребленія этой наукой часто заставляли полагать, что невозможно пользоваться ею. У какого-нибудь человѣка констатировали присутствіе камня; существуютъ разные методы лѣченія его. Какому отдать предпочтеніе? Очевидно, что этотъ вопросъ можно рѣшить только собирая добросовѣстно и со знаніемъ дѣла произведенныя наблюденія. Если при равныхъ условіяхъ камнедробленіе спасаетъ больше людей, чѣмъ чревосѣченіе, то должно выбрать камнедробленіе. Умышленно повторяю *при равныхъ условіяхъ*, т. е. если операторы отличаются одинаковой ловкостью, если инструменты одинаково хороши, и всѣ наблюденные случаи допускаютъ точныя сравненія. Въ этомъ и заключается трудность: я оставляю даже въ сторонѣ оцѣнку страданій пацiента, которыя могутъ явиться результатомъ примѣненія того или иного метода. Надо опредѣлить *вліянія* пола, возраста, тѣлосложенія больного, періода болѣзни и т. д. Чтобы принять во вниманіе эти вліянія, нужно было-бы значительное число наблюденій, вѣрно собранныхъ и обсужденныхъ со знаніемъ дѣла. Вотъ это то изслѣдованіе можетъ быть произведено только при помощи статистическаго метода, который и является методомъ всѣхъ опытныхъ наукъ; отказаться отъ него значитъ — броситься въ слѣпую рутину и отказаться отъ свѣта опыта.

---

*) Это именно и дѣлали въ послѣднее время образованные медики самыхъ просвѣщенныхъ народовъ; чтобы говорить объ одной только медицинѣ, достаточно будетъ назвать нѣсколько замѣчательныхъ трудовъ, опубликованныхъ въ послѣднее время.

Разумное изслѣдованіе фактовъ учитъ, какая изъ двухъ сравниваемыхъ операцій привела къ бо́льшему успѣху; добились-ли этого успѣха общимъ способомъ или болѣе спеціальнымъ для какого-нибудь пола, возраста или при какомъ-нибудь особенномъ обстоятельствѣ. Я думаю, всѣ разумные люди согласятся съ тѣмъ, что раньше надо наблюдать, собирать вполнѣ установленные факты и сдѣлать ихъ строго сравнимыми, а затѣмъ попытаться изслѣдовать ихъ и выводить отношенія и методически оцѣнить ихъ причины. Что-же мы видимъ вмѣсто этого? Неполныя, недопускающія сравненія и подозрительныя наблюденія, безпорядочно собранныя, представленныя безъ различій или расположенныя такъ, чтобы заставить вѣрить въ фактъ, который хотятъ установить; но почти всегда не изслѣдуютъ, достаточно-ли число наблюденій, для того чтобы питать къ нимъ довѣріе.

Я особенно настаиваю на этомъ пунктѣ, такъ какъ со способомъ лѣченія связаны вопросы, находящіеся подъ вліяніемъ стольких различныхъ причинъ, что никогда можетъ быть невозможно будетъ добиться удовлетворительнаго рѣшенія. Я иду дальше; предполагая даже, что мы имѣемъ точныя рѣшенія для всѣхъ самыхъ сложныхъ случаевъ, я говорю, что они не будутъ имѣть никакого примѣненія, хотя-бы они были очень полезны для общественной гигіены. Они имѣютъ только общее значеніе, и было-бы нелѣпо примѣнять ихъ къ отдѣльнымъ лицамъ, такъ какъ невозможно будетъ принять въ разсчетъ всѣ присущія имъ особенности. Такъ-же точно, какъ если-бъ захотѣли опредѣлить по таблицѣ смертности, въ какомъ возрастѣ должно умереть опредѣленное лицо. Однако никто не подвергаетъ сомнѣнію пользу таблицъ смертности въ медицинскихъ изслѣдованіяхъ и вычисленіяхъ продолжительности жизни. Статистика, или вѣрнѣе опытный методъ, основанный на вычисленіи, оказалъ-бы уже дѣйствительную услугу, если-бъ изслѣдовали самые простые случаи, когда вліяютъ немногія причины.

Была-ли статистика дѣйствительно тамъ мало полезна, знакомя насъ съ вліяніемъ, оказываемымъ на смертные случаи по возрастамъ, поламъ, профессіямъ и въ зависимости отъ атмосферныхъ явленій? или при изученіи того, что относится къ рождаемости, числу родовъ, мертворожденныхъ и брачности? Среди констатированныхъ ею фактовъ, тѣ многіе имѣютъ высокое значеніе,— и тѣ, которые она подвергла научному изслѣдованію и тѣ, которые остались безъ объясненія. Въ частности я укажу на бо́льшую смертность дѣтей мужескаго пола около времени рожденія. Отчего это происходитъ? Старались-ли отдать себѣ отчетъ въ особенностяхъ, касающихся мертворожденныхъ, и боролись-ли съ причинами столь прискорбнымъ образомъ увеличивающими смертность при извѣстныхъ обстоятельствахъ?

Въ общемъ, къ статистическимъ вопросамъ, относящимся къ хирургіи, легче подойти чѣмъ къ медицинскимъ: съ одной стороны, почти всегда наблюдаютъ болѣзнь, а съ другой стороны ее почти всегда приходится угадывать. Докторъ долженъ вести извѣстнаго рода слѣдствіе и, предлагая больному вопросы, долженъ принимать такія-же предосторожности, какія употребляетъ судья по отношенію къ виновному, у котораго онъ хочетъ вырвать его тайну. Существуютъ двоякаго рода трудности: въ вопросахъ терапевтики они заключаются въ діагнозѣ. Выздоровленіе больного зависитъ отъ сложныхъ условій: 1) докторъ долженъ узнать болѣзнь и 2) сумѣть опредѣлить способъ лѣченія, которому должно слѣдовать. И вотъ, первымъ вопросомъ занимались въ общемъ гораздо больше чѣмъ вторымъ, и я думаю—неправильно. Я себѣ позволю привести нѣсколько очень правильныхъ соображеній по этому вопросу; я ихъ беру изъ одного сочиненьица, присланнаго мнѣ однимъ пріятелемъ, который сумѣлъ охватить съ философской точки зрѣнія сразу нѣсколько опытныхъ наукъ, которыми онъ занимается съ одинаковымъ успѣхомъ. „Начать“, говоритъ онъ, „должно вовсе не съ терапевтическихъ вопросовъ. Я желалъ-бы, чтобы вычисленія были сперва примѣнены къ вопросамъ діагностики и симптоматологіи. Если даны такіе-же симптомы, то какова вѣроятность того, что больной болѣе подверженъ одной болѣзни чѣмъ другой, какова ея вѣроятная продолжительность, возвращеніе и ея теченіе при хроническомъ состояніи, когда она предоставлена однимъ силамъ природы? Когда эти различные вопросы и многіе другіе будутъ однажды рѣшены, я перейду къ изученію вліянія врачебнаго пользованія.“

При этомъ послѣднемъ изслѣдованіи, для того чтобы судить, со знаніемъ причинъ, о выгодахъ, которыя можетъ представлять терапевтика, надо было-бы начать съ изслѣдованія того, что сталобы съ человѣкомъ, подверженнымъ такой-то болѣзни и предоставленнымъ однимъ силамъ природы, И въ сомнительныхъ и трудныхъ случаяхъ, прійдутъ можетъ быть къ заключенію, что лучше предоставить больного силамъ природы, чѣмъ пользовать научными средствами, ограничиваясь установленіемъ діэты? Разные способы лѣченія оказываютъ на смертность меньшее вліяніе, чѣмъ думаютъ. Вотъ что говоритъ по этому вопросу одинъ уважаемый ученый, докторъ Гоукинсъ: „Одинъ пріятель дѣлалъ частныя наблюденія надъ сравнительной смертностью въ одномъ и томъ же госпиталѣ при трехъ докторахъ. Одинъ былъ *эклектикомъ*, второй склонялся къ *выжидающей системѣ* и третій—сторонникъ *тонической* діэты. Смертность была одинаковой, но продолжительность болѣзни, характеръ выздоровленія и возможность возврата болѣзни, весьма различны.“ Такимъ образомъ, смертность была одинаковой. Подобные-же выводы мы можемъ дѣлать изъ данныхъ главныхъ госпиталей Европы; смертность измѣняется тамъ въ довольно узкихъ предѣлахъ и гораздо больше зависитъ отъ содержанія госпиталей, чѣмъ отъ пользованія терапевтическими средствами. Отсюда казалось слѣдуетъ, что административная наука оказываетъ, по крайней мѣрѣ, такое-же вліяніе, какъ и медицина, и понятно, что такъ и должно быть. Зачѣмъ приглашать самыхъ опытныхъ врачей, если не слѣдуютъ ихъ предписаніямъ и если въ ихъ отсутствіи уничтожаютъ плохо понятыми или неразумными заботами и ту пользу, которую они могли-бы принести?

Если-бъ я не боялся обвиненій въ преувеличеніи, я сказалъ-бы, что хорошая администрація спасаетъ въ госпиталяхъ можетъ быть бо́льше больныхъ, чѣмъ наука самыхъ опытныхъ врачей. Для того чтобы судить о ея вліяніи на здоровье людей, собранныхъ въ обширныхъ учрежденіяхъ, пусть изслѣдуютъ то, что происходитъ въ тюрьмахъ; тамъ увидятъ, что смертность измѣняется въ самыхъ широкихъ предѣлахъ. Не выходя даже за предѣлы Бельгіи, я нахожу, что въ смирительномъ домѣ въ Гентѣ смертные случаи пропорціонально меньше, чѣмъ среди привилегированныхъ классовъ общества, между тѣмъ какъ въ Вильвордской тюрьмѣ въ теченіе 1802,1803 и 1804 года царила такая смертность, какой никогда не подвергались люди въ время самыхъ ужасныхъ эпидемій, ни солдаты во время самыхъ разорительныхъ войнъ. Изъ 4 заключенныхъ умирало ежегодно трое! Это бѣдствіе, вызванное плохой администраціей, начало свирѣпствовать съ меньшей силой въ 1805 году, благодаря полезнымъ реформамъ, а два года спустя пришло въ почти нормальное состояніе.

## Правительственныя распоряженія.

Статистическіе документы представляютъ двоякій интересъ: они полезны одновременно и для наукъ и для администраціи. Только изучая элементы прошлаго, государственный человѣкъ можетъ составить себѣ правильное представленіе о будущемъ, узнать, содержитъ ли страна элементы, необходимые для успѣшной реализаціи предположенныхъ плановъ, оцѣнить, какіе законы требуютъ реформъ и внести свѣтъ въ цѣлый рядъ важныхъ вопросовъ.

Вслѣдствіе огромнаго распространенія желѣзныхъ дорогъ и электрическаго телеграфа, появляется много политическихъ проблемъ, необходимыми элементами рѣшенія которыхъ мы далеко не обладаемъ. Трудно было-бы предвидѣть отнынѣ измѣненія, которыя произойдутъ въ населеніи городовъ, въ цѣнѣ земли, въ главныхъ центрахъ разныхъ отраслей промышленности и вообще во всѣхъ соціальныхъ отношеніяхъ. Трудно будетъ можетъ быть повѣрить когда-нибудь, чтобы простое ускореніе перевозки людей и товаровъ и бóльшая скорость электрическихъ сообщеній могли вызвать подобныя послѣдствія. Продолжительность человѣческой жизни увеличилась; даже земной шаръ какъ будто кажется измѣнилъ свои размѣры: города сблизились, вся страна сжалась какъ бы въ одинъ пригородъ своей столицы. Цивилизація распространяетъ свой уровень отъ одного края Европы до другого; все характерное и живое стирается въ каждомъ народѣ, между тѣмъ какъ локомотивы и электрическій телеграфъ каждый день пробиваютъ новыя бреши въ таможенныхъ барьерахъ, пока они ихъ всецѣло не разрушатъ *).

---

*) Эти строки были написаны треть вѣка тому назадъ: вотъ вполнѣ убѣдительное доказательство ихъ значенія, выраженное въ письмѣ Барраля къ Леону Де-Лаверню (*Journal de l'Agriculture*, № 20, мартъ 1868 г). „Вы обратились ко мнѣ съ поразительнымъ доказательствомъ очень печальнаго факта уменьшенія населенія за время съ 1846 по 1866 г., въ большей части округовъ, на которые раздѣлена Франція. Въ 185 округахъ произошло уменьшеніе, и увеличеніе его наблюдалось только въ 178. Вы отмѣтили, что при естественномъ теченіи вещей населеніе должно было-бы болѣе или менѣе возрастать во всѣхъ частяхъ территоріи, и вы прибавили, что кромѣ очень небольшого числа мѣстъ увеличеніе происходило всюду до 1847 года. Мнѣ казалось полезнымъ развить это положеніе и составить, въ такой же формѣ какъ и Вы, таблицу, сравнивающую населеніе по округамъ съ 1826 по 1846 г. Такимъ образомъ увидимъ, что происходило въ теченіе 20 лѣтъ до 1847 г. и въ теченіе истекшихъ

Статистика должна отнынѣ стараться записывать все, что можетъ служить для изученія этихъ огромныхъ измѣненій, происходящихъ въ соціальномъ тѣлѣ. Никто не можетъ вполнѣ предвидѣть ихъ послѣдствій, а однакожъ всѣ стараются опредѣлить ихъ.

Даже и не задаваясь такой широкой точкой зрѣнія при разсмотрѣніи этого предмета, мы видимъ дѣйствительно много интересныхъ статистическихъ вопросовъ, связанныхъ съ проведеніемъ желѣзныхъ дорогъ. Вопросы относительно дохода и расхода, прочности матеріаловъ, цѣнъ мѣстамъ, тарифа для товаровъ и т. д. столь многочисленны и важны, что просвѣщенному правительству интересно было-бы для полученія ихъ рѣшенія предоставить ихъ нѣсколькимъ образованнымъ людямъ, которые сдѣлаютъ ихъ исключительнымъ предметомъ своихъ изслѣдованій.

Приведу одинъ только примѣръ. Существуетъ зависимость между числомъ перевозимыхъ ежедневно пассажировъ и платой, которую имъ приходится вносить; эта зависимость такова, что доходъ увеличивается или уменьшается въ зависимости отъ цѣны мѣстъ. Въ самомъ дѣлѣ, для всякаго понятно, что если-бы цѣна была слишкомъ низка, то какъ-бы значительно ни было число пассажировъ, ихъ не достаточно было-бы для возмѣщенія расходовъ предпріятія; наоборотъ, если-бъ они были слишкомъ высоки, число пассажировъ уменьшилось-бы и администраціи снова угрожала-бы опасность остаться въ убыткѣ. Есть стало быть maximum, до котораго можно дойти, и который можно опредѣлить только при помощи статистическихъ данныхъ.

Однако, этотъ вопросъ гораздо сложнѣе, чѣмъ можно думать, такъ какъ правительство взимаетъ не только прямой налогъ въ

---

20 лѣтъ, представлявшихъ, какъ Вы говорите, одновременно замедленіе въ общемъ прогрессѣ и перемѣщеніе земледѣльческаго населенія... Какъ показываютъ неоспоримо предыдущія числа, въ теченіе цѣлаго вѣка населеніе Франціи возрасло въ отношеніи 4-хъ къ 7; но приростъ не происходилъ правильно, такъ какъ онъ испыталъ двѣ различныхъ остановки: 1-й разъ при первой имперіи и въ 1-й годъ реставраціи, 2-й разъ—съ 1846 по 1856 г.; движеніе возобновилось съ 1856 по 1861 г., и затѣмъ опять ослабѣло между 1861 и 1866 годомъ... Здѣсь вполнѣ ясно, что въ противовѣсъ выводу предыдущей таблицы, въ пользу этого вывода объ увеличеніи населенія особенно говорятъ самые промышленные округа и въ частности тѣ, въ которыхъ есть очень большіе города, гдѣ уже нѣсколько лѣтъ дѣлаютъ огромные расходы на общественныя работы. Итакъ, перемѣщеніе сельскаго населенія къ городамъ доказано слишкомъ ясно!

кассахъ желѣзныхъ дорогъ; оно еще взымаетъ предварительно особаго рода косвенный налогъ на расходы и всякіе убытки, вызванныя путешествіями. Эта общая дѣятельность, это возрастающее оживленіе всей страны даетъ новый толчекъ торговлѣ и промышленности, которыя вмѣстѣ зъ земледѣліемъ являются главными опорами государства.

Опытъ, связанный съ такого рода вопросами, былъ недавно произведенъ въ Англіи. Правительство вдругъ значительно понизило таксу на письма. Что изъ этого вышло? Дефицитъ почтовыхъ доходовъ былъ сперва значительный; но затѣмъ число писемъ прогрессивно увеличивалось, и въ концѣ концовъ доходы достигли своей обычной величины; недоборъ, существующій еще и теперь, безъ сомнѣнія болѣе чѣмъ компенсировался косвенными преимуществами, которыя извлекло изъ этого правительство и частныя лица. Результаты, этой столь удачно разсчитанной административной мѣры, могли быть непосредственно констатированы тщательно собранными статистическими данными *).

Впрочемъ, недостаточно оцѣнить матеріальныя выгоды какого-нибудь нововведенія. Моральныя выгоды имѣютъ иногда гораздо большее значеніе; это слишкомъ часто упускаютъ изъ виду. Бельгія нашла въ проведеніи желѣзныхъ дорогъ нравственную силу, значительно превосходящую денежныя выгоды, которыя могли получить отъ этого огромнаго предпріятія. Правительство, пережившее революціонный кризисъ, сумѣло дать умамъ новое направленіе и пріучить ихъ къ порядку и труду; а иностранцы, плохо судившіе о насъ раньше и считавшіе насъ впавшими въ анархію, повѣрили въ наше будущее; они не могли отказать въ довѣріи и уваженіи народу, который храбро предпринялъ на слѣдующій день послѣ революціи такія гигантскія работы, передъ которыми отступило большинство болѣе солидныхъ государствъ.

Измѣняя свои законы, въ особенности финансовые, правительство должно заботливо собирать данныя, могущія позже установить, отвѣчаютъ-ли полученные результаты ожиданіямъ. Законы создаются и упраздняются съ такой поспѣшностью, что въ большинствѣ случаевъ невозможно изучить ихъ вліянія; законы о ввоз-

---

*) Эти разсужденія были изложены больше четверти вѣка тому назадъ; а извѣстно, что цѣны на провозъ пассажировъ и товара все болѣе и болѣе понижаются.

ныхъ и вывозныхъ пошлинахъ представляютъ печальные примѣры. Здѣсь то-же, что съ почтовымъ тарифомъ въ Англіи; нужно только съумѣть назначить такія цѣны, которыя удовлетворятъ всѣ интересы.

Когда пошлины повышаются, прибѣгаютъ къ контрабандѣ, и слѣдовательно доходы уменьшаются. Напротивъ того, существуетъ множество примѣровъ, которые показываютъ, что при пониженіи таможенныхъ пошлинъ и пошлинъ съ съѣстныхъ припасовъ, доходы казны значительно увеличиваются.

Большая часть цивилизованныхъ народовъ имѣетъ еще очень неточныя представленія о вещахъ, которыя имъ важнѣе всего знать. Въ частности я укажу на статистику урожаевъ и главныхъ предметовъ потребленія. Вѣдь при изданіи законовъ необходимо знать, можетъ-ли страна довольствоваться своими средствами и нужно-ли въ ожиданіи кризиса пріобрѣтать запасы за границей.

Благоразумное правительство должно также ввести въ свою статистику свѣдѣнія, въ которыхъ вдругъ можетъ оказаться нужда, при необыкновенныхъ обстоятельствахъ, какъ напримѣръ, при объявленіи войны. Важно знать, гдѣ можно достать въ предназначенное время провіантъ для людей и лошадей; гдѣ можно найти квартиры; гдѣ можно достать лошадей и повозки, необходимыя для транспорта.

Я не считаю больше нужнымъ настаивать на важности хорошей переписи и хорошаго веденія гражданскихъ записей; я объ этомъ достаточно говорилъ. Всѣ вопросы, связанные съ населеніемъ, заслуживаютъ въ общемъ величайшаго вниманія со стороны правительства. Есть одинъ вопросъ, представляющій со дня на день все бóльшій и бóльшій интересъ и остающійся еще кажется въ тѣни, хотя онъ и возбуждалъ уже сильное безпокойство въ нѣкоторыхъ государствахъ: я говорю о законности рожденій.

Согласно извѣстному закону, подъ вліяніемъ одинаковыхъ причинъ и слѣдствія получаются одинаковыя. Если напр. незаконныя рожденія прогрессивно увеличиваются, то нужно искать въ чемъ-нибудь причины. Во многихъ большихъ городахъ, какъ Парижъ и Брюссель, треть рожденій составляютъ незаконнорожденные; въ Мюнхенѣ это отношеніе еще больше, и законнорожденныхъ тамъ насчитываютъ столько-же, сколько незаконнорожденныхъ. Какова-же можетъ быть причина подобнаго положенія вещей? Должно-ли приписать это законодательной мѣрѣ, введенной съ цѣлью избѣгнуть нѣкоторыхъ бѣдствій, и сказать, что запрещеніе вступать въ бракъ, при невозможности обезпечить женѣ настоящее и будущее, толкаетъ на конкубинатъ? Одно только полное знаніе вещей можетъ рѣшить этотъ важный вопросъ.

Уголовная статистика, хотя и нарождающаяся, успѣла уже ввести полезныя реформы въ законодательствѣ. Она напр. показала, что когда наказаніе несоразмѣрно съ преступленіемъ, то оно не достигаетъ цѣли и остается вслѣдствіе этого недѣйствующимъ. Вотъ почему смертная казнь, налагаемая за дѣтоубійство, примѣняется рѣдко: чтобъ законъ сталъ дѣйствительнымъ, надо было-бы смягчить его суровость.

Когда измѣняется какой-нибудь уголовный законъ, то его вліяніе должно дать себя чувствовать; если-же его вліяніе не оставляетъ никакого слѣда, а результаты прежнихъ лѣтъ продолжаютъ повторяться, то это измѣненіе останется безъ послѣдствій и слѣдовательно призрачно. Наоборотъ, когда произведенное дѣйствіе замѣтно, то узнаютъ, выгодное-ли это измѣненіе или вредное.

Но именно въ этомъ постоянномъ повтореніи однихъ и тѣхъ же слѣдствій подъ вліяніемъ тѣхъ же причинъ, законодатель находитъ самую утѣшительную мысль и доказательство того, что при выгодномъ измѣненіи закона, необходимо произойдетъ полезное измѣненіе въ будущемъ націи. Зачѣмъ проводить реформы, если не увѣрены въ томъ, что онѣ принесутъ плоды, и что эти плоды будутъ долговременны? Конечно, нельзя надѣяться на уничтоженіе всѣхъ преступленій, оскверняющихъ общество; но понятно, что существуетъ такая совокупность законовъ, просвѣщенная администрація и такой соціальный строй, при которыхъ число преступленій будетъ сокращено насколько возможно. Это послѣднее число зависитъ отъ внутренней организаціи человѣка, а остальное является такъ сказать продуктомъ соціальной организаціи.

Повторяю, статистики предлагаютъ одно изъ самыхъ вѣрныхъ средствъ для оцѣнки силы законовъ. Въ извѣстное время осужденія за поддѣлку банковыхъ билетовъ были очень многочисленны и влекли за собою смертную казнь. Вмѣсто того чтобы продолжать свирѣпствовать противъ виновныхъ, государство догадалось ввести реформу въ фабрикацію билетовъ, и сейчасъ же вслѣдъ за этимъ нашли, что число осужденныхъ значительно сократилось.

Подобная мѣра, примѣненная нѣсколькими годами раньше, можетъ быть спасла-бы жизнь и честь многихъ несчастныхъ.

Нужны ли другія доказательства, для того чтобы показать, какой разумной осторожностью долженъ отличаться законодатель, и какіе полезные уроки онъ можетъ почерпнуть изъ статистическихъ документовъ?

Эту науку встрѣчали до послѣдняго времени съ большой благосклонностью. Многіе ученые показали, какую пользу можно изъ нея извлечь, и предлагали рѣшенія вопросовъ, столь же новыя сколько и поучительныя. Но такъ какъ воображеніе и мало просвѣщенное усердіе разныхъ писателей выходило за тѣ предѣлы, которые предписывали имъ малочисленныя и въ особенности неточныя наблюденія, то недовѣріе смѣнило первое увлеченіе.

Удивительно однако то, что тѣми немногими средствами, которыми обладала эта наука, она уже сумѣла установить такое большое число интересныхъ для общества фактовъ. Правда, впадали въ частыя ошибки; но ихъ вслѣдъ за тѣмъ и обнаруживали; и эти самыя ошибки имѣли можетъ быть свою полезную сторону.

Въ нѣкоторыхъ странахъ собирали числа вслѣдствіе какого то неумѣреннаго желанія содѣйствовать прогрессу статистики и бросить свѣтъ на разныя стороны государственнаго строя. Изобиліе числовыхъ таблицъ, большей частью неточныхъ, только загромоздило науку неудобнымъ и часто вреднымъ матеріаломъ.

Прежде всего важно, чтобы публикуемыя статистическія данныя были точны, сравнимы и представляли всѣ необходимыя гарантіи. При современномъ же положеніи вещей сравненія невозможны даже въ узкихъ предѣлахъ одного государства. Каждое правительство публикуетъ свои данныя, не сообразуясь съ сосѣдними правительствами. Часто находятъ разныя числа для выраженія однѣхъ и тѣхъ-же вещей, и почти всегда различныя классификаціи, когда нужно было бы самое строгое однообразіе; это особенно замѣтно при классификаціяхъ по возрастамъ, при раздѣленіи населенія по профессіямъ, въ номенклатурѣ болѣзней и преступленій, доведенныхъ до свѣдѣнія суда. Во Франціи въ то время, какъ министръ торговли исчисляетъ зерновые хлѣба въ гектолитрахъ, таможенная администрація считаетъ метрическими центнерами и килограммами *).

Эти-то несообразности и представляютъ столько препятствій развитію статистики: онѣ поражали всѣхъ практически занимавшихся этой наукой. Извѣстный Мальтусъ выразилъ мнѣ однажды сожалѣніе о томъ, что въ Европѣ не существуетъ ни одной страны, гдѣ статистика была-бы организована такъ, чтобъ отвѣчать всѣмъ требованіямъ науки. Жертвы, которыя были-бы принесены для достиженія столь желательной цѣли, были-бы конечно вполнѣ вознаграждены трудами, которые они вызвали-бы со стороны самыхъ просвѣщенныхъ людей: средства, необходимыя на такія улучшенія, если-бъ существовала такая страна, стали-бы предметомъ ихъ постоянныхъ размышленій. Въ глазахъ знаменитаго англійскаго экономиста Бельгія соединяла казалось самыя благопріятныя для этого условія; находясь между тремя главными европейскими государствами,—Франціей, Англіей и Германіей, постоянно посѣщаемая путешественниками разныхъ странъ, она даетъ каждой изъ нихъ возможность лично знакомиться съ мѣстами и провѣрять статистическія данныя. Ея небольшое пространство облегчаетъ возможность полученія точныхъ данныхъ; впрочемъ, точность обезпечивается и прекраснымъ веденіемъ гражданскихъ записей и управленіемъ, основаннымъ на хорошихъ принципахъ; въ ней есть одновременно и земледѣльческія и чисто промышленныя области, и гористыя мѣста и равнины. Организація королевства приспособлена ко всякаго рода изслѣдованіямъ.

Мальтусъ согласился, по моей просьбѣ, составить записку, которую я позаботился лично передать бельгійскому правительству, но эта рукопись была вѣроятно упущена изъ виду и подверглась судьбѣ многихъ проектовъ, лежащихъ въ министерскихъ папкахъ, ожидая дня, когда возможно будетъ осуществленіе ея пожеланій.

Нѣкоторыя правительства поняли однако невыгодность такого положенія вещей и пытались прекратить его. Бельгія и Сардинія—первыя вступили на этотъ новый путь; другія цивилизован-

*) Учрежденіе *интернаціональныхъ статистическихъ конгресовъ* и единообразіе, которое стремятся установить въ законодательствѣ разныхъ государствъ, являются могущественными причинами, способными послѣдовательно разрушить эти національныя различія, столь вредныя для общихъ интересовъ.

ныя государства безъ сомнѣнія тоже послѣдуютъ ихъ примѣру. Франціи и Англіи мы обязаны спеціальной статистикой огромнаго интереса: не слѣдуетъ-ли жалѣть о томъ, что эти два центра цивилизаціи не выработали еще необходимыхъ мѣръ для однообразной публикаціи всѣхъ оглашаемыхъ документовъ во избѣжаніе такъ часто встрѣчающихся двусмысленныхъ толкованій?

Когда будетъ выработанъ однообразный способъ собиранія свѣдѣній во всѣхъ государствахъ, останется еще послѣдній шагъ, а именно, ввести однообразіе въ разныхъ изданіяхъ, по скольку это будетъ по крайней мѣрѣ удаваться, примиряя общіе интересы науки съ частными интересами каждой страны.

Это желательное однообразіе, правда, мало по малу устанавливается, ежедневно, силой самихъ вещей. Ибо, если какая-нибудь классификація статистическихъ данныхъ какой-нибудь страны признана хорошей, то въ другихъ мѣстахъ естественно стремятся возможно меньше уклоняться отъ нея. Но эта желательная цѣль была-бы достигнута болѣе вѣрнымъ и болѣе быстрымъ способомъ при помощи учрежденія крупныхъ центровъ, которые вступали-бы въ непосредственныя сношенія.

На подобной организаціи и покоится будущее статистики. Существенно недостаютъ хорошія, допускающія между собою сравненія наблюденія. Я полагаю, что я показалъ, что недостатка въ научныхъ методахъ не было. Изолированный человѣкъ видѣлъ свою дѣятельность, ограниченной слишкомъ узкимъ кругомъ, для того чтобы подумать о собраніи всѣхъ матеріаловъ, нужныхъ для всего построенія; необходимо было прибѣгнуть къ вмѣшательству правительствъ *).

---

*) Предыдущія мысли были выражены точно такими-же словами, какъ это доказываетъ первое изданіе „*Théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques*“, появившейся въ 1846 году, т. е. за 7 лѣтъ до учрежденія *интернаціональнаго конгресса* народовъ. Трудъ былъ посвященъ принцу Альбэрту, бывшему впослѣдствіи президентомъ этого самаго статистическаго конгресса, собравшагося въ Лондонѣ. Да будетъ мнѣ позволено въ то-же время вспомнить слова, которыми я закончилъ свой трудъ: „я счастливъ, говорилъ я, тѣмъ, что могу защищать дорогую мнѣ науку, которая нуждается въ поддержкѣ, для осуществленія всего, чего мы вправѣ ждать отъ нея. Я не могу найти ей лучшихъ покровителей, ибо принцы дома Вашего Высочества всегда были покровителями наукъ и друзьями просвѣщенія; и я имѣлъ счастье видѣть, что эти наслѣдственныя качества не исчезли“.

## Глава 7-я.

## О НАСЕЛЕНІИ И ЕГО ПРИРАЩЕНІЯХЪ.

До сихъ поръ я занимался главными фактами, относящимися къ рождаемости, жизни, воспроизведенію и смертности человѣка, не изслѣдуя ихъ вліянія на соціальный организмъ. Это изслѣдованіе является однако философской цѣлью, къ которой должны быть направлены всѣ наши усилія; не сумѣли выяснить себѣ тѣхъ огромныхъ трудностей, которыя встрѣчаются на пути къ достиженію этой цѣли, хотя она занимала умы многихъ весьма заслуженныхъ писателей; да развѣ и я не съ сомнѣніемъ излагаю взгляды, которые считаю способными найти полезное примѣненіе?

Народы нарождаются незамѣтно; только тогда, когда они достигаютъ извѣстнаго развитія, начинаютъ интересоваться своимъ существованіемъ. Это приращеніе бываетъ болѣе или менѣе быстрымъ и происходитъ или вслѣдствіе избытка рожденій надъ смертными случаями или вслѣдствіе иммиграціи. Оно указываетъ на достаточную степень благосостоянія и на то, что средства къ существованію превышаютъ нужды существующаго населенія. Если оно приближается къ этому предѣлу или переходитъ его, то ростъ населенія прекращается и уступаетъ мѣсто обратному. Интересно стало быть изслѣдовать, сколько жителей въ каждой странѣ, каковы ихъ средства къ существованію, какова сила прироста и вмѣстѣ съ тѣмъ предѣлы, которыхъ оно можетъ безопасно достигнуть.

Затѣмъ является вопросъ, какъ слагаются народы, выгодно-ли распредѣлены ихъ составныя части и содѣйствуютъ-ли они болѣе или менѣе сильно благосостоянію всего цѣлаго? Но прежде всего слѣдуетъ приступить къ самымъ важнымъ вопросамъ и вкратцѣ и ясно изложить мысли, высказанныя относительно населенія самыми выдающимися экономистами. По ихъ мнѣнію, населеніе растетъ въ геометрической прогрессіи, если нѣтъ никакого препятствія его развитію.

---

Когда я писалъ эти слова, я былъ безъ сомнѣнія далекъ отъ мысли, что эти надежды будутъ вскорѣ похищены.

Ostendent terris hunc tantúm fata neque ultra esse sinent . . . .

Virg. Aeneidos, lib. VI. v. 869.

Средства къ существованію не развиваются такъ-же быстро, и по Мальтусу, при самыхъ благопріятныхъ для промышленности условіяхъ, они никогда не могутъ увеличиваться быстрѣе, чѣмъ въ ариѳметической прогрессіи *).

Большимъ препятствіемъ размноженію является стало быть недостатокъ пищи, являющійся слѣдствіемъ различія отношеній, которымъ слѣдуютъ эти двѣ величины въ своемъ приростѣ.

Когда какое-нибудь населеніе достигло въ своемъ развитіи уровня своихъ средствъ къ существованію, оно должно остановиться благодаря человѣческой предусмотрительности; или, если оно имѣло несчастье перейти этотъ предѣлъ, оно насильно возвращается къ нему излишкомъ смертности. Препятствія могутъ быть сведены въ этомъ случаѣ къ двумъ группамъ. Первыя дѣйствуютъ, предупреждая приростъ населенія, а другія—разрушая его по мѣрѣ его образованія. Совокупность первыхъ составляетъ то, что называютъ *предупредительными препятствіями*, а вторыя—*разрушительными препятствіями* **).

Мальтусъ изслѣдовалъ съ большой проницательностью главныя препятствія, которыя населеніе можетъ встрѣтить въ своемъ приращеніи; не менѣе удачно опредѣлилъ онъ предѣлъ, перейти который оно можетъ только подвергнувшись очень большимъ потерямъ. Надо однако признать, что, несмотря на изслѣдованія англійскаго ученаго и слѣдовавшихъ по его стопамъ экономистовъ, вліяніе препятствій не было ясно установлено. Не установили закона, въ силу котораго они дѣйствуютъ: однимъ словомъ, не было дано способовъ перемѣщенія теоріи населенія въ область

---

*) *„Essai sur le principe de la population“*, т. 1-ый стр. 15, переводъ Превоста, Genève, 1830. Этотъ законъ о приростѣ средствъ существованія можетъ казаться очень сомнительнымъ, а мнѣнія экономистовъ довольно различны по этому вопросу. В. Сеньоръ думаетъ, что средства существованія обнаруживаютъ болѣе сильную тенденцію къ росту, чѣмъ населеніе. (См. *Two lectures on population*, стр. 49. Объ этомъ-же вопросѣ см. также переписку между этимъ ученымъ и Мальтусомъ). Макъ Куллохъ, въ примѣчаніяхъ къ „Sur la richesse des nations“, т. V, 133 стр. напротивъ того, думаетъ, что установленная Мальтусомъ прогрессія слишкомъ преувеличена для странъ, гдѣ уже обработаны самыя лучшія земли.

**) *Malthus. Essai*, etc. стр. 20, т. 1-ый. По-моему, разрушительныя препятствія принадлежатъ вообще къ естественнымъ силамъ, а предупредительныя препятствія къ *пертурбаціоннымъ* силамъ человѣка.

математическихъ наукъ, къ которой она должна была казалось спеціально принадлежать *). Вслѣдствіе этого, изслѣдованіе этого труднаго вопроса и не могло быть до сихъ поръ полнымъ; преувеличивали можетъ быть опасности, угрожавшія обществу, не находя въ дѣйствіи препятствій достаточно гарантій противъ зла, ужасающая быстрота развитія котораго идетъ въ геометрической прогрессіи.

Чтобы постараться заполнить столь важный пробѣлъ, я занялся многочисленными изслѣдованіями, приводить детали которыхъ здѣсь излишне. Внимательное изслѣдованіе вопроса доказало мнѣ, что теорія населенія можетъ быть сведена къ двумъ принципамъ, которые я разсматриваю какъ основные принципы анализа развитія населенія и причинъ, вліяющихъ на него.

*1) Населеніе стремится къ возрастанію въ геометрической прогрессіи* **).

*2) Сопротивленіе (или сумма препятствій его развитію) при равенствѣ прочихъ условій равно квадрату скорости, съ которой населеніе стремится возрастать.*

Препятствія быстротѣ прироста населенія дѣйствуютъ стало быть на самомъ дѣлѣ такъ-же какъ сопротивленіе, оказываемое движенію тѣлъ той средою, черезъ которую они проходятъ. Это

---

*) Да будетъ мнѣ позволено вспомнить мысли, высказанныя, мною по этому поводу въ 1827 году, при открытіи публичнаго курса исторіи наукъ, „Надо замѣтить, говорилъ я, что чѣмъ больше развивались физическія науки, тѣмъ больше стремились онѣ въ область математическихъ наукъ, которыя являются нѣкотораго рода центромъ, въ которомъ онѣ со временемъ и сосредоточатся. По большей или меньшей легкости, съ которой можно приступить къ вычисленіямъ, можно было-бы даже судить о степени совершенства, которой достигла та или иная наука“.

**) Предположимъ, что какое-нибудь населеніе, бывшее до сихъ поръ *стаціонарнымъ*, стало *возрастать:* оно не сможетъ перейти къ послѣднему состоянію безъ значительныхъ затратъ; ибо къ дѣтямъ, которыхъ оно должно было раньше кормить, оно должно было прибавить еще содержаніе тѣхъ, которыя составляютъ его приростъ. Это содержаніе должно продолжаться, пока эти дѣти доживутъ до возраста, когда они смогутъ стать полезны своимъ трудомъ, т. е. въ теченіе 12—15 лѣтъ. На второй годъ къ существующему уже бремени присоединяется второе и такъ далѣе. Новое бремя присоединяется ежегодно къ уже существуюраспространеніе закона физики, самымъ поразительнымъ образомъ подтверждающагося, когда его примѣняютъ къ даннымъ, доставляемымъ обществомъ, представляетъ новый примѣръ аналогій, которыя находимъ во многихъ случаяхъ между законами, регулирующими матеріальныя явленія и тѣми, которыя относятся къ человѣку. Такимъ образомъ, изъ двухъ принциповъ, которые я принялъ за основу математической теоріи населенія, первый вообще принятъ всѣми экономистами и кажется не можетъ быть оспариваемъ, а другой оправдывается при всѣхъ примѣненіяхъ, когда приходится разсматривать движеніе и непрерывно дѣйствующія препятствія.

Однако, несмотря на предубѣжденія, какія существуютъ въ подкрѣпленіе этихъ положеній, надо было-бы безусловно отвергнуть ихъ, еслибъ подвергнутые анализу, они не могли выдержать этого испытанія, доведеннаго до мельчайшихъ подробностей.

Такъ, я прежде всего изслѣдовалъ выводы, къ которымъ должна была привести теорія, а затѣмъ, найдя ихъ вполнѣ сходными съ результатами наблюденія, я подумалъ, что населеніе, свободно развиваясь безъ препятствій, возрастаетъ въ *геометрической прогрессіи*, но, если развитіе происходитъ среди всякаго рода препятствій, стремящихся задержать его и дѣйствующихъ однообразно, т. е. *если соціальныя отношенія совершенно не измѣняются*, то населеніе не измѣняется безконечно, а все больше и больше стремится стать *стаціонарнымъ*. Изъ этого слѣдуетъ стало быть, что въ самой тенденціи къ возрастанію населеніе находитъ силы, которыя должны предупредить гибельныя и опасныя катастрофы, какія могутъ внезапно появиться отъ народившагося излишка населенія, предъ которымъ рушилось-бы всякое человѣческое благоразуміе. Даже опытъ нашей старой Европы очень хорошо доказываетъ, что населеніе приходитъ въ равновѣсіе, возрастая или сокращаясь, согласно общему закону непрерывности. Предѣлъ, за который оно не можетъ выйти, различенъ по своей природѣ, и регулируется количествомъ жизненныхъ припасовъ; никогда населеніе не можетъ развиваться съ такою большою скоростью, что вдругъ дойдетъ до этого предѣла; препятствія, нарождающіяся по сосѣдству, слишкомъ многочисленны для того,

---

щему бремени и становится очень чувствительнымъ, по крайней мѣрѣ если народъ, который долженъ перенести его, не находится въ достаточно благопріятномъ положеніи.

чтобы возможенъ былъ такой фактъ. Природа не уменьшаетъ полагающейся ей дани смертности, но такъ какъ мы платимъ эту дань по частямъ, то она для насъ менѣе чувствительна, чѣмъ если-бъ ее нужно было уплатить внезапно *).

Такимъ образомъ, очень многіе изъ нашихъ народовъ прогрессивно достигаютъ уровня средствъ существованія, постоянно сохраняя тенденцію къ развитію и порождая вслѣдствіе этого излишекъ смертности, почти такъ-же, какъ висящая въ атмосферѣ туча постоянно сохраняетъ тенденцію къ паденію и изліянію содержащагося въ ней излишка. Среди безчисленныхъ причинъ, могущихъ нарушить это состояніе равновѣсія, населеніе развивается или регрессируетъ, почти такъ-же какъ облако подымается или опускается въ зависимости отъ температуры, направленія вѣтровъ, и множества другихъ атмосферныхъ условій. Это не мѣшаетъ однако тому, что оно всегда достигаетъ извѣстной средней высоты, зависящей отъ состава и сопротивленія со стороны воздуха, препятствующаго ему упасть на землю.

Когда соціальная система подвергается измѣненіямъ, препятствія все-же сохраняютъ свое вліяніе; но ихъ интенсивность можетъ безгранично измѣняться, такъ что и развитіе населенія можетъ такъ-же точно безконечно измѣняться. Если-бъ мы обладали точными исчисленіями для разныхъ эпохъ, то анализъ показалъ-бы интенсивность причинъ, которыя могли ускорить или задержать развитіе населенія и условія, при которыхъ онѣ зарождались. Предполагая, напримѣръ, что извѣстное населеніе непрерывно возрастаетъ въ ариѳметической прогрессіи, показатель разности которой также извѣстенъ, мы можемъ опредѣлить при помощи двухъ вышеприведенныхъ законовъ и силу, съ какой эти препятствія мѣшали развитію населенія, или другими словами,— опредѣлить законъ, слѣдуя которому должны проявляться эти препятствія. Въ общемъ, достаточно знать законъ развитія населенія, для того чтобы вывести, приблизительно по крайней мѣрѣ, законъ развитія препятствій, и наоборотъ. Но такого рода проблемы принадлежатъ исключительно области анализа; я могу только указать

---

*) Конечно, голодъ, чума, войны и другія бѣдствія могутъ разорить и уменьшить населеніе, но эти случайныя и временныя несчастія не измѣняютъ законовъ, о которыхъ мы говоримъ.

на нихъ здѣсь, сохраняя за собою право вернуться къ нимъ въ спеціальной работѣ *).

Я сказалъ, что при установившемся однажды равновѣсіи, населеніе становится стаціонарнымъ или колеблется по крайней мѣрѣ вокругъ опредѣленнаго состоянія въ зависимости отъ соотвѣтствующихъ измѣненій въ климатѣ и количествѣ пищи. Но такъ какъ возможность увеличить количество продуктовъ при помощи болѣе усерднаго труда и знаній зависитъ отъ человѣка, то населеніе должно-бы находить средства развиваться, такъ что если-бы всѣ физическія условія въ разныхъ европейскихъ странахъ были одинаковы, то конечно не было бы лучшей мѣры производства и развитія промышленности, какъ плотность проживающаго въ данной странѣ населенія. Дѣйствительно, специфическое населеніе является результатомъ всѣхъ вліяющихъ элементовъ страны и оно можетъ достигнуть предѣла, зависящаго отъ всѣхъ условій, которыя страна представляла его развитію въ теченіе предыдущихъ лѣтъ.

Принимая эту мѣру производительныхъ силъ для перваго приближенія, интересно можетъ быть знать специфическое населеніе каждой страны, т. е. число жителей на 1 квадратную милю; для этого я возьму числа, какія приводитъ Бальби въ „*Precis de géographie universelle de Maltebrun*“, кн. 116, опустивши мелкія государства, имѣющія меньше 1 милліона душъ **).

| | Жителей на 1 кв. милю отъ 25 и выше. |
|---|---|
| Нидерланды | 1.829 |
| Ломбардо-Венец. королевство | 1.711 |
| Вюртембергъ | 1.502 |
| Англія, собственно | 1.457 |
| Саксонское кор. | 1.252 |
| Госуд. Сардинія | 1.122 |
| Франція | 1.062 |
| Папская область | 1.043 |
| Баварія | 968 |
| Прусская монархія | 792 |
| Швейцарія | 783 |

*) Въ приложенной таблицѣ указано состояніе населенія главныхъ странъ въ разныя эпохи: изъ нея видно, что вездѣ населеніе возрастало.

**) Вычисленія произведены до 1834 года.

| | Жителей на 1 кв. милю отъ 25 и выше. |
|---|---|
| Венгрія | 750 |
| Кор. Неаполь и Сицилія | 747 |
| Испанія | 641 |
| Данія | 616 |
| Португалія | 446 |
| Турція | 324 |
| Россія | 161 |
| Швеція и Норвегія | 82 |

Нидерланды, Ломбардія, Вюртембергъ и Англія были стало быть странами, кормившими наиболѣе плотное населеніе Европы, а слѣдовательно такими, которыя, при прочихъ равныхъ условіяхъ, должны были больше всего производить для того, чтобы прилично содержать его. Португалія, Турція, Россія, Швеція и Норвегія напротивъ отличались наименьшею плотностью населенія. Но такъ какъ населеніе этихъ странъ могло уже много вѣковъ возрастать со всей легкостью, которую предоставляли мѣстности и учрежденія, то надо полагать, что если населеніе неодинаково въ разныхъ частяхъ Европы, то были препятствія къ его размноженію, потому-ли что земли были неодинаково плодородны, потому-ли что трудно было развить торговлю и промышленность, вслѣдствіе ли отсутствія достаточныхъ гарантій въ соціальныхъ учрежденіяхъ или, наконецъ, вслѣдствіе моральныхъ причинъ и другихъ мотивовъ, на которыя я указывалъ, изслѣдуя число рожденій и смертныхъ случаевъ.

Впрочемъ, надо установить одно важное положеніе, безъ котораго во всѣхъ вопросахъ, относящихся къ населенію, получается странная путаница: необходимо знать не только число индивидуумовъ, составляющихъ населеніе, но и то какимъ образомъ они добываютъ средства существованія. Между народами существуетъ множество различій: одни отличаются болѣе развитымъ умомъ, обладаютъ лучшей промышленностью и болѣе развитыми потребностями, одинъ индивидуумъ потребляетъ самъ столько, сколько могли-бы потребить въ другомъ мѣстѣ трое и даже больше; но эти трое будутъ печально прозябать и размножать такихъ-же несчастныхъ людей, какъ и они сами. Невѣрно стало быть сказать, что такъ какъ послѣдняя страна имѣетъ населеніе, которое плотнѣе перваго, то она и производитъ втрое больше. Для того, чтобы сдѣлать сравнимыми цифры предыдущей таблицы, надо было-бы умножить каждую на постоянный коэффиціентъ, зависящій отъ того, что необходимо индивидууму каждаго народа для удовлетворенія его нуждъ.

Неправильно также думать, будто нація, населеніе которой стаціонарно, совершенно не прогрессируетъ. Положеніе промышленности и просвѣщенія можетъ очень замѣтно улучшиться, не оставляя слѣдовъ въ цифрѣ населенія. Это улучшеніе благосостоянія, при прочихъ равныхъ условіяхъ, находитъ себѣ мѣру въ количествѣ потребляемыхъ индивидуумомъ продуктовъ и въ справедливомъ распредѣленіи предметовъ, которые должны быть потребляемы. Этому постоянному коэффиціенту предназначено играть большую роль въ теоріи населенія: онъ опредѣляетъ предѣлъ, къ которому стремится населеніе въ своихъ послѣдовательныхъ приращеніяхъ, почти такъ-же какъ плотность тѣла опредѣляетъ предѣлъ, при которомъ оно находится въ равновѣсіи въ какой нибудь средѣ. Въ общемъ, когда населеніе стаціонарно, то въ зависимости отъ того, уменьшается-ли или возрастаетъ потребленіе, можно сказать, богатѣетъ-ли нація или бѣднѣетъ.

Изъ того, что населеніе увеличивается, не слѣдуетъ заключать, что и его благосостояніе возрастаетъ. Необходимо прежде всего узнать этотъ постоянный коэффиціентъ, служащій мѣрой зажиточности жителей, также, какъ, при опредѣленной величинѣ этого коэффиціента, специфическое населеніе служитъ мѣрой благосостоянія страны. Когда хотятъ сравнивать между собою народы, то важнѣе всего принять во вниманіе качество, если можно такъ выразиться, такъ-же какъ и количество.

Вообще статистики продолжаютъ пользоваться годовымъ приростомъ населенія для вычисленія того, во сколько времени должно удвоиться населеніе, хотя дѣйствительность почти всегда опровергаетъ результаты ихъ вычисленій. Это изслѣдованіе, вновь приводящее насъ къ гипотезѣ, что развитіе населенія не встрѣчаетъ препятствій, на столько-же примѣнимо къ нашей старой Европѣ, какъ если-бы хотѣли увидѣть въ дѣйствительности то, что даетъ теорія для паденія тѣлъ въ безвоздушномъ пространствѣ. Вычисленія этого рода способны въ большинствѣ случаевъ удовлетворять любопытство, такъ какъ они производятся при такомъ предположеніи, которое не можетъ осуществиться, или если и можетъ, то въ самыхъ ограниченныхъ предѣлахъ.

Если какая-нибудь страна, вслѣдствіе развивающейся цивилизаціи, получаетъ новый толчекъ и расширяетъ, при помощи увеличенія количества продуктовъ, предѣлъ, котораго можетъ достигнуть населеніе, то, при благопріятныхъ обстоятельствахъ, она стремится къ этому увеличенію населенія въ геометрической прогрессіи; эта скорость прироста вскорѣ уменьшается дѣйствіемъ препятствій и затѣмъ совершенно прекращается. То-же происходитъ съ убывающимъ населеніемъ, но движеніе здѣсь происходитъ въ обратномъ направленіи. Анализъ даетъ формулы, очень хорошо выражающія эти различныя состоянія.

Наиболѣе счастливыя страны не обладаютъ населеніемъ, возрастающимъ въ геометрической прогрессіи. Англія представляетъ однако поразительный примѣръ, въ высокой мѣрѣ заслуживающій вниманія. Стаціонарное и даже уменьшавшееся въ началѣ XVIII столѣтія населеніе Англіи начало послѣдовательно возрастать, испытывая разныя колебанія, до середины тогоже-же вѣка; затѣмъ оно получаетъ второй толчокъ и начинаетъ слѣдовать ариѳметической прогрессіи. Новый, болѣе сильный толчокъ ему былъ данъ въ началѣ XIX столѣтія и съ тѣхъ поръ оно не переставало расти въ геометрической прогрессіи; такимъ образомъ, она прошла состоянія, противоположныя тѣмъ, черезъ которыя проходитъ населеніе, стремящееся къ предѣлу, когда препятствія начинаютъ возрастать. Здѣсь, наоборотъ, препятствія уменьшались, вслѣдствіе сильнаго развитія индустріи и введенія такого невѣроятнаго количества машинъ, что ихъ продукты представляютъ населеніе, какимъ Англія далеко еще не обладаетъ.

Въ теченіе указанныхъ въ таблицѣ десятилѣтій не сохранялся регулярно одинъ и тотъ-же коэффиціентъ прироста, за исключеніемъ послѣдняго времени, когда геометрическая прогрессія была лучше выражена. (См. табл. на 280 стр.)

Разница между вычисленными и наблюденными результатами не выходитъ однако за предѣлы колебаній, допускаемыхъ данными длиннаго ряда лѣтъ.

Другой очень поучительный примѣръ прироста населенія мы находимъ въ томъ, что происходитъ въ Американскихъ Соединенныхъ Штатахъ, новой странѣ, внезапно добившейся свободы, замѣчательной своей промышленностью, привычками и плодородіемъ почвы. Сейчасъ населеніе развивается тамъ съ удивительной и незнакомой старой Европѣ быстротой; иммиграція еще усиливаетъ

| Годы. (Англія). | Населеніе *). | 10-лѣтній приростъ. | Годовой приростъ на 100. |
|---|---|---|---|
| 1700 . . . . . . . . . . . . . . | 5.134.516 | — 68.179 | —0,13 |
| 1710 . . . . . . . . . . . . . . | 5.066.337 | +279.014 | +0,54 |
| 1720 . . . . . . . . . . . . . . | 5.345.351 | 342.642 | 0,62 |
| 1730 . . . . . . . . . . . . . . | 5 687.993 | 141.712 | 0,25 |
| 1740 . . . . . . . . . . . . . . | 5.829 705 | 209.979 | 0,35 |
| 1750 . . . . . . . . . . . . . . | 6.039.684 | 440.046 | 0,70 |
| 1760 . . . . . . . . . . . . . . | 6.479.730 | 747.856 | 1,09 |
| 1770 . . . . . . . . . . . . . . | 7.227.586 | 587.241 | 0,78 |
| 1780 . . . . . . . . . . . . . . | 7.814.827 | 725.911 | 0,89 |
| 1790 . . . . . . . . . . . . . . | 8.540.738 | 646.438 | 0,73 |
| 1800 . . . . . . . . . . . . . . | 9.187.176 | 1.220.380 | 1,25 |
| 1810 . . . . . . . . . . . . . . | 10.407.556 | 1.550.009 | 1,39 |
| 1820 . . . . . . . . . . . . . . | 11.957.565 | 1.883.186 | 1,46 |
| 1830 . . . . . . . . . . . . . . | 13.840.751 | 2.073.397 | 1,40 |
| 1840 . . . . . . . . . . . . . . | 15.914.148 | 3.013.461 | 1,20 |
| 1850 . . . . . . . . . . . . . . | 17.927.609 | 2.138.615 | 1,12 |
| 1860 . . . . . . . . . . . . . . | 20.066.224 | — | — |

излишекъ рожденій надъ смертными случаями. Но ускоренная быстрота прироста становится однообразной, для того чтобы затѣмъ еще больше усилиться. Таковы факты, представляемые намъ населеніемъ Соединенныхъ Штатовъ, которые такъ часто приводили въ примѣръ и которые можетъ быть не были достаточно точными. Я буквально привожу числа профессора Рау съ 1780 по 1825 годъ **); они сходны впрочемъ съ данными другихъ статистиковъ.

| Годы. | Жителей. | Годовой приростъ. |
|---|---|---|
| 1780 | 2.051.000 | 6,2 на 100 |
| 1790 | 3.929.326 | 3,0 „ „ |
| 1800 | 5.306.035 | 3,1 „ „ |

*) Величина населенія указана по Рикману, „*Preface to the abstract*, etc"., 1831, 45 стр. Онъ приводитъ на 24 стр. для годового прироста періодовъ 1801—1811—1821—1831 слѣдующія величины: 1,41, 1,57 и 1,54; разница между моими и его выводами можетъ происходить вслѣдствіе метода вычисленія. Я считалъ нужнымъ сравнивать годовое увеличеніе не съ населеніемъ 1-го года каждаго періода, а съ населеніемъ средняго года этого періода.

**) *Bulletin de M. de Férussac*, февраль 1831 г. См. также числа, данныя Варденомъ въ „*Bulletins de la Societé philomathique*", 1832.

| Годы. | Жителей. | Годовой приростъ. |
|---|---|---|
| 1810 | 7.239.703 | 2,9 „ „ |
| 1820 | 9.654.415 | 1,9 „ „ |
| 1825 | 10.438.000 | — — |

Отмѣчу раньше всего, что населеніе увеличивалось изъ года въ годъ почти одинаково, такъ что его послѣдовательныя значенія составляли возрастающую ариѳметическую прогрессію, разность которой отъ одного года къ другому можетъ считаться равной 190.822 *). Принимая эту гипотезу, мы получили-бы:

| Годы. | Жителей. | Годовой приростъ. |
|---|---|---|
| 1780 | 2.051.000 | 6,3 на 100 |
| 1790 | 3.959.220 | 3,7 „ „ |
| 1800 | 5.867.440 | 2,8 „ „ |
| 1810 | 7.775.660 | 2,2 „ „ |
| 1820 | 9.683.880 | 1,9 „ „ |
| 1825 | 10.637.990 | — — |

Такимъ образомъ, хотя въ дѣйствительности населеніе значительно возрасло, однако положеніе вещей осталось такое-же какъ въ 1780 году; мѣста и средствъ къ жизни вполнѣ достаточно для новоприходящихъ, которые ежегодно занимаютъ пустыя мѣста. Эти приращенія менѣе замѣтны, когда ихъ вычисляютъ, какъ это дѣлаютъ обыкновенно относительно населенія, которое въ дѣйстви-

*) Обозначая эту разность черезъ $\Delta$, населеніе 1780 года черезъ P, а черезъ X—число прошедшихъ лѣтъ, получимъ для населенія X-ваго года $P_x = P + \Delta . X$; согласно этой формулѣ вычислены величины предыдущей таблицы.

Таблицы смертности и населенія, въ ихъ современной формѣ, вызвали критическія замѣчанія: требовали даже измѣненія ихъ редакціи. Мы приведемъ, въ частности, замѣчанія, сдѣланныя заслуженными писателями, особенно г. Ахилломъ Гильяромъ, авторомъ *„Elements de statistique humaine et de Demographie comparée“* I т. in. 8⁰, Paris 1855 г. и докторомъ Бэртильономъ, которому мы обязаны разными трудами и особенно статистическими статьями въ *„Dictionnaire encyclopédique des sciences médicales“*, которымъ онъ удѣляетъ совершенно особенное вниманіе. Мы не будемъ высказываться относительно формы таблицъ, такъ какъ наши мысли въ этомъ отношеніи расходятся съ мнѣніями, высказанными этими почтенными писателями.

тельности менѣе плодовито, такъ какъ свободныя мѣста распредѣляются между большимъ числомъ лицъ *).

Въ большинствѣ Европейскихъ странъ населеніе возрастаетъ, и въ зависимости отъ величины этого годоваго прироста статистики производили свои вычисленія, для опредѣленія періода, въ теченіе котораго оно удваивается.

Я приведу величины, вычисленныя двумя уважаемыми въ наукѣ людьми.

| Страны. | По проф. Рау. | | По Дюпэну. | |
|---|---|---|---|---|
| | Годовой приростъ. | Періодъ удвоенія. | Приростъ. | Періодъ удвоенія. |
| Ирландія | 2,45 | 28,6 л. | — | — |
| Венгрія | 2,4 | 20,2 „ | — | — |
| Испанія | 1,66 | 41,9 „ | — | — |
| Англія | 1,65 | 42,3 „ | 1,67 | 42,0 л. |
| Пруссія | — | — | 2,70 | 26,0 „ |
| Пруссія прирейнск. | 1,33 | 52,33 „ | — | — |
| Австрія | 1,3 | 53,6 „ | 1,01 | 69,0 „ |
| Баварія | 1,08 | 64,6 „ | — | — |
| Нидерланды | 0,94 | 74,8 „ | 1,24 | 56,5 „ |
| Неаполитанское королевство | 0,83 | 83,5 „ | 1,11 | 63,0 „ |
| Франція | 0,63 | 110,3 „ | 0,65 | 105,0 „ |
| Швеція | 0,58 | 118,0 „ | — | — |
| Корол. Ломбардія | 0,45 | 152,8 „ | | — |
| Россія | — | — | 1,05 | 66,0 „ |

Если-бъ удвоеніе населенія происходило въ дѣйствительности такъ, какъ это показываетъ эта таблица, то надо было-бы конечно

*) Впрочемъ, теорія доказала-бы, что въ первое время населеніе должно было быть меньше, чѣмъ показываетъ таблица, ибо съ конца послѣдняго вѣка оно было гораздо многочисленнѣе. Въ дѣйствительности, я согласенъ съ Варденомъ, что Соединенные Штаты преувеличивали величину своего населенія по политическимъ мотивамъ и для того, чтобы придать себѣ больше значенія, особенно внутри страны, гдѣ иностранцы меньше всего могутъ провѣрять. Съ другой стороны, можно еще пожалѣть о нѣкоторыхъ пробѣлахъ, которые остается еще заполнить въ данныхъ, когда такой заслуженный статистикъ какъ Кэннэди, суперъ—интендантъ американской переписи, самъ выражаетъ сомнѣнія относительно этого въ очень интересной работѣ, которую мы сейчасъ получили благодаря его услужливости: „*Population ofthe United states in* 1860; Вашингтонъ, 1 т. 1 и 4⁰, 1864 г.

опасаться огромныхъ катастрофъ, вслѣдствіе того что средства къ существованію не могли бы слѣдовать за столь быстрымъ развитіемъ; но мы уже видѣли, что непрерывное приращеніе наблюдается въ очень рѣдкихъ случаяхъ. Если-бы подобныя катастрофы могли происходить, то ихъ наблюдали-бы въ Европѣ уже давно. Также точно можетъ случайно увеличиться смертность, благодаря голоду, чумѣ и другимъ бѣдствіямъ; но эти бѣдствія, вліяніе которыхъ цивилизація уменьшаетъ, могутъ посѣщать страны, которыя не достигли своего предѣла.

Причиной ошибочнаго опредѣленія періода удвоенія населенія является не только вычисленіе годового прироста населенія, оно подвержено еще и другимъ большимъ ошибкамъ. Никогда почти не могутъ согласиться относительно этихъ причинъ, если не указываютъ лѣтъ и чиселъ, на основаніи которыхъ вычисленъ былъ приростъ. Многіе другіе опредѣляютъ приростъ только на основаніи одно-или двухлѣтнихъ наблюденій, и впадаютъ поэтому въ тягчайшія ошибки. Это значитъ примѣшивать къ вліяніямъ, которыя хотятъ опредѣлить, такія, которыя являются результатомъ множества случайныхъ причинъ, которыя могутъ иногда скрыть основныя. Мнѣ кажется, что для того чтобы съ нѣкоторой вѣроятностью установить положеніе какой-нибудь страны, нужны были-бы по крайней мѣрѣ данныя десяти лѣтъ наблюденій, т. е. такихъ періодовъ, въ теченіе которыхъ политическія учрежденія оставались одинаковыми, и когда не замѣчали особенныхъ событій. Такимъ образомъ, можно было-бы надѣяться исключить вліяніе случайныхъ причинъ, и въ концѣ концовъ сохранить только то, что является результатомъ природы страны, ея учрежденій и промысловъ ея обитателей. Въ особенности надо избѣгать пользованія числами временъ кризиса и слѣдующихъ за нимъ лѣтъ. Въ настоящее время, когда Европа отдыхаетъ послѣ долгихъ и кровопролитныхъ войнъ, послѣ болѣе или менѣе сильнаго застоя торговли и подъ вліяніемъ болѣе либеральныхъ учрежденій производство усилилось и населеніе увеличивается; но есть-ли основаніе полагать, что это приращеніе останется такимъ-же? Это было-бы, мнѣ кажется, огромной ошибкой, и я не боюсь аппелировать къ опыту.

Довольно замѣчательно то, что населеніе будетъ многочисленнѣе, если оно было стаціонарно въ теченіе извѣстнаго числа лѣтъ, чѣмъ тогда, когда въ теченіе такого же періода оно то возрастало то убывало; когда коэффиціентъ прироста былъ равенъ коэффиціенту сокращенія, выходило-бы, что дѣйствіе одного года не вознаграждаетъ дѣйствія двухъ лѣтъ. На первыхъ порахъ это кажется парадоксомъ; однако, легко убѣдиться въ правильности предыдущаго положенія. Это хорошо видно изъ анализа слѣдующаго предположенія. Если мы хотимъ узнать, во что превратится данное число индивидуумовъ въ $m+n$ лѣтъ ($m$ указываетъ на число лѣтъ, въ теченіе которыхъ населеніе оставалось стаціонарнымъ, а $n$ число лѣтъ, въ теченіе которыхъ населеніе принимало опредѣленный приростъ или убыль), то найдемъ, что число остающихся въ живыхъ одинаково, какъ-бы ни слѣдовали другъ за другомъ эти $m+n$ лѣтъ. Такимъ образомъ, будетъ-ли населеніе правильно возрастать въ теченіе 10 лѣтъ, затѣмъ останется стаціонарнымъ въ теченіе двадцати другихъ, будутъ-ли слѣдовать эти два періода въ обратномъ порядкѣ, или эти самые годы этихъ періодовъ перемѣшаются, данное число индивидуумовъ, которые родились послѣ, представляло-бы такое-же число живыхъ, когда эти 30 лѣтъ прошли *).

## О таблицахъ населенія.

Населенія представляютъ довольно крупныя различія смотря по тому, группируются-ли составляющіе ихъ индивидуумы по семьямъ или хозяйствамъ; однако, когда изслѣдуютъ одну только страну, эти различія менѣе значительны. Въ бельгійскихъ деревняхъ, напримѣръ, насчитываютъ почти 5 человѣкъ на семью, но для городовъ это число нѣсколько меньше. Въ каждой провинціи и въ деревняхъ насчитываютъ также почти точно 106 семействъ на 100 хозяйствъ, между тѣмъ какъ въ городахъ на 100 хозяйствъ приходится отъ 125 до 174 семействъ.

Замѣчено также, что въ деревняхъ Бельгіи лицъ обоего пола насчитываютъ почти одинаковое количество. Не то въ городахъ: число мужчинъ тамъ всюду меньше числа женщинъ. Эта разница связана можетъ быть съ большей смертностью мужчинъ, такъ-же какъ и съ болѣе частымъ пользованіемъ женской прислугой. Въ деревняхъ же, напротивъ того, требуется для обработки земли больше мужской прислуги.

---

*) *Recherches statistiques sur le royaume des Pays-Bas*", 61 и слѣд. стр.

Если раздѣлить населеніе обоихъ половъ на три категоріи, а именно: холостыхъ, семейныхъ и вдовыхъ, то, сохраняя различіе городовъ и деревень, получимъ:

| **Въ городахъ.** | На 1000 мужчинъ. | | | На 1000 женщинъ. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Холост. | Женат. | Вдовцовъ. | Незамуж. | Замуж. | Вдовыхъ. |
| Фландрія Восточн. | 652 | 311 | 37 | 643 | 281 | 76 |
| Фландрія Западн. | 646 | 317 | 37 | 638 | 278 | 84 |
| Брабантъ . . . . | 629 | 332 | 39 | 625 | 284 | 91 |
| Гэннэгау . . . . | 642 | 316 | 42 | 604 | 307 | 89 |
| Льежъ . . . . . | 635 | 323 | 42 | 624 | 293 | 83 |
| Антверпенъ . . . | 655 | 312 | 33 | 646 | 276 | 78 |
| Намюръ . . . . . | 663 | 297 | 40 | 622 | 291 | 87 |
| **Въ общинахъ.** | | | | | | |
| Фландрія Восточн. | 687 | 276 | 37 | 661 | 272 | 67 |
| Фландрія Западн. | 671 | 293 | 36 | 645 | 288 | 67 |
| Брабантъ . . . . | 652 | 313 | 35 | 623 | 311 | 66 |
| Гэннэгау . . . . | 647 | 317 | 36 | 611 | 318 | 71 |
| Льеж ъ . . . . . | 646 | 312 | 42 | 618 | 305 | 77 |
| Антверлпнъ . . . | 672 | 289 | 39 | 639 | 289 | 72 |
| Намюръ . . . . . | 634 | 331 | 35 | 596 | 332 | 72 |
| Въ городахъ . . . | 4.522 | 2.208 | 270 | 4.402 | 2.210 | 588 |
| Въ деревняхъ . . | 4.609 | 2.131 | 260 | 4.193 | 2.115 | 492 |
| Всего . . | 9.131 | 4.339 | 530 | 8.595 | 4.325 | 1.080 |

Отсюда ясно, что:

1⁰. Въ общемъ, $^2/_3$ населенія состоитъ изъ холостыхъ; $^1/_3$ состоитъ изъ семейныхъ или вдовыхъ.

2⁰. Если брать 1.000 лицъ каждаго пола, то холостыхъ мужского пола пропорціонально нѣсколько больше чѣмъ среди лицъ другого пола.

3⁰. Холостыхъ въ деревняхъ еще больше чѣмъ въ городахъ; такъ что въ деревняхъ среди 1.000 мужчинъ находятъ больше всего холостыхъ.

4⁰. Число вдовыхъ женщинъ почти вдвое больше вдовыхъ мужчинъ.

Этотъ послѣдній очень замѣчательный выводъ становится еще болѣе поразительнымъ, если сравнивать непосредственно число вдовцовъ съ числомъ вдовъ.

| Страны. | Вдовцевъ на 100 вдовъ | |
|---|---|---|
| | Въ городахъ. | Въ сельскихъ общинахъ. |
| Фландрія Восточная . . . . . . . . . | 41 | 53 |
| Фландрія Западная . . . . . . . . . | 39 | 53 |
| Антверпенъ . . . . . . . . . . . . . | 38 | 55 |
| Брабантъ . . . . . . . . . . . . . . | 37 | 53 |
| Гэннэгау . . . . . . . . . . . . . . | 46 | 50 |
| Намюръ . . . . . . . . . . . . . . . | 45 | 47 |
| Льежъ . . . . . . . . . . . . . . . | 46 | 52 |
| Въ среднемъ . . . . | 42 | 52 |

Такимъ образомъ, число вдовцовъ, сравнительно съ числомъ вдовъ, неоспоримо гораздо меньше въ городахъ и особенно въ провинціяхъ Брабантѣ, Антверпенѣ и Западной Фландріи.

Это обстоятельство находится можетъ быть въ связи съ тѣмъ, что мужчины женятся въ городахъ позже чѣмъ въ деревняхъ. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что названныя сейчасъ три провинціи дѣйствительно тѣ, населеніе которыхъ, при прочихъ равныхъ условіяхъ, большей частью сконцентрировано въ окрестностяхъ городовъ. Мужчинамъ также легче чѣмъ женщинамъ выйти изъ состоянія вдовства.

Что касается распредѣленія населенія по возрастамъ, то оно уже давно привлекало вниманіе статистиковъ больше всякаго другого явленія. Таблицы населенія бываютъ двоякаго рода: однѣ получаются непосредственно при помощи переписи, другія выводятся изъ таблицъ смертности. Когда можно положиться на точность переписи, первыя всегда предпочтительнѣе вторыхъ и вѣрнѣе представляютъ современное состояніе населенія.

Приводимая здѣсь таблица *) получена непосредственно: она переходитъ отъ года къ году, не различая мѣсяцевъ; легко понять

---

*) Эта таблица составлена послѣ переписи 1846 г. и приведена A. Quetelet въ „*Bulletins de la commission centrale de statistique*“, IV томъ, 1851 года, 78 стр.

причину этого. Если-бы мы приводили для раннихъ возрастовъ данныя для каждаго мѣсяца, какъ они были констатированы переписью, то нашли бы въ нихъ слѣды годового періода, которые отчасти затемнили-бы истинный законъ населенія. Въ самомъ дѣлѣ, послѣдовательность чиселъ не можетъ быть одинаковой при переписи, произведенной въ какое угодно время года: дѣтей, рожденныхъ въ мартѣ, сравнительно больше родившихся въ августѣ мѣсяцѣ; и ихъ группа будетъ продолжать представлять замѣтный численный перевѣсъ. Кривая, изображающая законъ населенія, вмѣсто того чтобы быть правильной и непрерывной, была-бы волнообразной и представляла-бы, особенно для дѣтства, періодическія уклоненія отъ одного года къ другому; мѣсто этихъ уклоненій зависѣло-бы отъ времени года, въ которое была произведена перепись. Переходя-же отъ одного года къ другому, мы всецѣло устраняемъ дѣйствіе этихъ періодическихъ измѣненій, которыя довольно чувствительны.

Мы ограничились тѣмъ, что брали числа, какія вытекаютъ изъ переписи, и установили между ними непрерывность, измѣнявшуюся ложными показаніями. Слишкомъ малыя числа увеличивались значеніями, неправильно перенесенными на другія слишкомъ большія числа: но среди этихъ данныхъ переписи не вводились никакія новыя значенія; были перемѣщенія безъ прибавки чиселъ. Это особенно замѣтно для возрастовъ въ 30, 40 и 50 лѣтъ, съ которыхъ предпочтительно и переносятъ на сосѣднія числа величины, занятыя у нихъ.

Возстановивъ эту непрерывность между числами, мы вычислили ихъ пропорціонально, принимая все населеніе за 1.000.000. (См. табл. на 288 стр.)

При хорошемъ веденіи гражданскихъ записей и при помощи записей, организованныхъ такъ, какъ это было послѣ общей переписи 1846 года, всегда возможно будетъ, если захотятъ этого, отдать себѣ отчетъ въ состояніи и силѣ населенія. Дальнѣйшія переписи станутъ необходимыми только черезъ большіе промежутки времени; такой результатъ былъ тѣмъ желательнѣе, что переписи производятся съ величайшими трудностями и требуютъ огромныхъ расходовъ. Однако, правительство не должно упускать изъ виду, что все покоится на правильномъ веденіи записей населенія и на строгихъ періодическихъ переписяхъ, дающихъ проч-

**Таблица населенія Бельгіи.**

| Возрастъ. | По переписи 1846 г. | Возрастъ. | По переписи 1846 г. | Возрастъ. | По переписи 1846 г. | Возрастъ. | По переписи 1846 г. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 лѣтъ. | 1,000.000 | 26 лѣтъ. | 480.493 | 52 года. | 148.519 | 78 лѣтъ. | 11.267 |
| 1 годъ. | 975,946 | 27 „ | 464.228 | 53 „ | 139.536 | 79 „ | 9.470 |
| 2 „ . | 952.196 | 28 „ | 448.516 | 54 „ | 131.110 | 80 „ | 7.885 |
| 3 „ . | 928.745 | 29 „ | 433.355 | 55 „ | 123.242 | 81 „ | 6.512 |
| 4 „ . | 905.607 | 30 „ | 418.747 | 56 „ | 115 932 | 82 „ | 5.302 |
| 5 „ . | 882.769 | 31 „ | 404.691 | 57 „ | 108.795 | 83 „ | 4.252 |
| 6 „ . | 860.234 | 32 „ | 390 788 | 58 „ | 101.833 | 84 „ | 3.367 |
| 7 „ . | 838.147 | 33 „ | 377.039 | 59 „ | 95.045 | 85 „ | 2.645 |
| 8 „ . | 816.508 | 34 „ | 363.443 | 60 „ | 88.432 | 86 „ | 2.085 |
| 9 „ . | 795.317 | 35 „ | 350.001 | 61 „ | 81.993 | 87 „ | 1.605 |
| 10 „ . | 774.573 | 36 „ | 336.712 | 62 „ | 75.771 | 88 „ | 1.205 |
| 11 „ . | 754.278 | 37 „ | 323.550 | 63 „ | 69.764 | 89 „ | 886 |
| 12 „ . | 734.288 | 38 „ | 310.514 | 64 „ | 63.974 | 90 „ | 648 |
| 13 „ . | 714.604 | 39 „ | 297 604 | 65 „ | 58.400 | 91 „ | 466 |
| 14 „ . | 695.225 | 40 „ | 289.819 | 66 „ | 53.041 | 92 „ | 358 |
| 15 „ . | 676.152 | 41 „ | 272.162 | 67 „ | 47.982 | 93 „ | 248 |
| 16 „ | 657.385 | 42 „ | 259.696 | 68 „ | 43.223 | 94 „ | 164 |
| 17 „ . | 638.814 | 43 „ | 247.422 | 69 „ | 38.763 | 95 „ | 104 |
| 18 „ . | 620.441 | 44 „ | 235.339 | 70 „ | 34.603 | 96 „ | 68 |
| 19 „ . | 602.265 | 45 „ | 223.449 | 71 „ | 30.743 | 97 „ | 45 |
| 20 „ . | 584.287 | 46 „ | 211.752 | 72 „ | 27.153 | 98 „ | 28 |
| 21 „ . | 566.506 | 47 „ | 199.624 | 73 „ | 23.834 | 99 „ | 15 |
| 22 „ . | 548.918 | 48 „ | 189.315 | 74 „ | 20.784 | 100 „ | 7 |
| 23 „ . | 531.522 | 49 „ | 178.576 | 75 „ | 18.004 | | |
| 24 „ . | 514.319 | 50 „ | 168.158 | 76 „ | 15.496 | | |
| 25 „ . | 497.310 | 51 „ | 158.060 | 77 „ | 13.276 | | |

ныя свѣдѣнія. Небрежное отношеніе къ этому вопросу могло-бы испортить все *).

Я не буду останавливаться на выводахъ, которые можно сдѣлать изъ предыдущей таблицы, ни на изслѣдованіи того, до какой степени могутъ быть сходны между собою двѣ таблицы населенія, полученныя путемъ переписи и на основаніи числа смертныхъ случаевъ **).

*) Новая перепись была произведена въ 1856 году; но полученные результаты только подтвердили полученные раньше. Чиселъ послѣдней переписи 1866 года мы еще не знаемъ.

**) О переписяхъ удобно справиться въ разныхъ сочиненіяхъ и особенно „*Census of the population*, Babbage; „*Edinbourgh Review*“ № 97;

Когда населеніе *стаціонарно*, т. е. когда ежегодно насчитываютъ столько-же смертныхъ случаевъ, сколько рожденій, то таблицы смертности могутъ разсматриваться, какъ истинныя таблицы населенія. Такимъ образомъ, согласно общей таблицѣ, приведенной выше, на 1.000.000 рожденій насчитывали-бы 975.946 дѣтей старше 1 года, 952.196—2 лѣтъ, 928.745—3 лѣтъ и такъ далѣе *).

По теоріи достаточно, чтобы какое нибудь населеніе было *стаціонарно*, т. е. чтобы число годовыхъ рожденій было постоянно и равно числу смертныхъ случаевъ, для того чтобы можно было вывести таблицу населенія изъ таблицы смертности. Однако этого одного условія недостаточно: необходимо кромѣ того, чтобы каждому возрасту ежегодно соотвѣтствовало одно и то-же число смертныхъ случаевъ, чтобы отношеніе оставшихся въ живыхъ, въ разныя эпохи жизни, было почти неизмѣннымъ, и чтобы числа, отмѣченныя въ таблицахъ смертности для каждаго года, повторялись въ точности. Для того чтобы объяснить необходимость этого условія, предположимъ, что составляютъ таблицу смертности по трехлѣтнему періоду, въ теченіе котораго населеніе было стаціонарно; и предположимъ кромѣ того, что, по какой-то причинѣ, смерть поражала главнымъ образомъ тридцатилѣтнихъ индивидуумовъ и въ возмѣщеніе потери щадила новорожденныхъ, и что затѣмъ все возстановлялось въ обычномъ порядкѣ. Въ такомъ

---

„*Letter to His Grace the duke of Hamilton and Brandon, respecting the parochial Registers of Scotland*, J. Cleland, Glascow, 1834 г., in 8⁰.

*) „Это раздѣленіе населенія по возрастамъ является можетъ быть самымъ важнымъ выводомъ, который должно принимать во вниманіе, при оцѣнкѣ благосостоянія какого-нибудь государства, если, какъ это кажется, доказалъ Мальтусъ, число рожденій, значительно увеличиваясь при образованіи *пустоты* въ населеніи, даже вслѣдствіе разорительныхъ бѣдствій, не позволяетъ судить о прогрессѣ этого народа и его реальной силѣ. Въ дѣйствительности, эта послѣдняя зависитъ отъ числа лицъ, находящихся въ лучшей порѣ жизни, всѣ способности которыхъ развиты насколько только позволяетъ состояніе цивилизаціи, которому содѣйствуетъ хорошее распредѣленіе средствъ къ существованію. Нація, достигшая этого состоянія, должна превосходить такую, въ которой рождается больше дѣтей, или усиленная потеря которыхъ возстановляется также очень легко, но которая, вслѣдствіе этого преждевременнаго истребленія, даетъ пропорціонально меньше возмужалыхъ лицъ. Приростъ этой части населенія—только бремя для государства“. (Lacroix, *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, стр. 207, 1833 г.)

случаѣ выйдетъ, что таблица населенія, составленная по этой таблицѣ смертности, не представитъ истиннаго обычнаго положенія вещей; она укажетъ для 30 лѣтнихъ слишкомъ слабое населеніе, а для дѣтей ранняго возраста слишкомъ большое. Въ подобномъ случаѣ, нельзя сказать, что происходитъ дѣйствительная компенсація.

Ясно, что населеніе можетъ быть стаціонарнымъ, хотя и невозможно строго вывести таблицу населенія изъ вычисленной для извѣстнаго числа лѣтъ таблицы смертности. Напротивъ того, мы сейчасъ увидимъ, что это вычисленіе можетъ быть произведено безъ затрудненій при другихъ обстоятельствахъ, когда населеніе нестаціонарно.

Дѣйствительно, предположимъ какое-нибудь стаціонарное населеніе и допустимъ кромѣ того, что таблицы смертности давали въ точности ежегодно одинаковыя числа, очевидно, что при умноженіи каждаго изъ этихъ чиселъ на постоянный коэффиціентъ большій или меньшій единицы, эти умноженія приведутъ только къ тому, что числа таблицы смертности, а слѣдовательно и таблицы населенія, будутъ увеличиваться или уменьшаться въ томъ-же отношеніи *).

---

*) Краткое вычисленіе сдѣлаетъ болѣе понятнымъ это разсужденіе. Обозначимъ буквами $a$, $a^{I}$, $a^{II}$, $a^{III}$, $a^{IV}$, $a^{V}$ и т. д.
число смертныхъ случаевъ, наблюдаемыхъ отъ 0 до 1 года, отъ 1 до 2 лѣтъ, отъ 2 до 3 лѣтъ и т. д. Кромѣ того, обозначимъ черезъ $A$, $A^{I}$, $A^{II}$ и т. д. числа, записанныя въ таблицѣ смертности противъ 0 лѣтъ, 1, 2, 3 и т. д., такъ что

$$\begin{array}{ll} A & = a + a^{I} + a^{II} + a^{III} + a^{IV} + \text{ и т. д.} \\ A^{I} & = \phantom{a +{}} a^{I} + a^{II} + a^{III} + a^{IV} + \quad \text{„} \\ A^{II} & = \phantom{a + a^{I} +{}} a^{II} + a^{III} + a^{IV} + \quad \text{„} \\ A^{III} & \phantom{= a + a^{I} + a^{II} +{}} a^{III} + a^{IV} + \quad \text{„} \\ \text{и т. д.} & \end{array}$$

тогда для соотвѣтствующихъ возрастовъ таблицы населенія получимъ:

$$\begin{array}{ll} \Sigma A & = A + A^{I} + A^{II} + A^{III} + A^{IV} + \text{ и т. д.} \\ \Sigma A^{I} & = \phantom{A +{}} A^{I} + A^{II} + A^{III} + A^{IV} + \quad \text{„} \\ \Sigma A^{II} & = \phantom{A + A^{I} +{}} A^{II} + A^{III} + A^{IV} + \quad \text{„} \\ \Sigma A^{III} & = \phantom{A + A^{I} + A^{II} +{}} A^{III} + A^{IV} + \quad \text{„} \end{array}$$

Если умножить теперь на $n$ каждое число смертныхъ случаевъ, то получимъ для чиселъ таблицы смертности

$$n A,\ n A^{I},\ n A^{II},\ n A^{III},\ n A^{IV} \text{ и т. д.,}$$

а для чиселъ таблицы населенія

$$n \Sigma A,\ n \Sigma A^{I},\ n \Sigma A^{II},\ n \Sigma A^{III} \text{ и т. д.}$$

Такимъ образомъ, одни основанія таблицъ измѣнялись; но принятое основаніе вполнѣ произвольно: мы приняли 1.000.000 для того, чтобы числа были сравнимы между собою и съ числами другихъ таблицъ. Все могло произойти такимъ-же образомъ, если-бы умножили каждое изъ фигурирующихъ въ таблицахъ чиселъ на какой либо коэффиціентъ, будетъ-ли населеніе дѣйствительно возрастающимъ или убывающимъ.

Изъ того, что сейчасъ сказано, слѣдуетъ, что *для того, чтобъ можно было изъ таблицы смертности вывести таблицу населенія, необходимо, чтобы числа смертныхъ случаевъ для каждаго возраста ежегодно сохраняли между собою одинаковыя отношенія, будетъ-ли при этомъ населеніе стаціонарнымъ, возрастающимъ или убывающимъ.*

Если примѣнить все сказанное къ приведеннымъ выше таблицамъ населенія, то будетъ понятно, что представляемыя ими различія вытекаютъ не только изъ того, что населеніе Бельгіи возрастаетъ, но и изъ того, что въ ней смерть не поражала ежегодно одни и тѣже возрасты въ одинаковой пропорціи и безъ сомнѣнія изъ того также, что годы не были одинаково плодовитыми.

Съ другой стороны, надо отмѣтить, что при французскомъ управленіи извѣстныя части населенія похищались войнами и должны были оставлять пустоту.

## Можно-ли судить о благосостояніи народа по данымъ о населеніи?

Стараясь измѣрить благосостояніе народовъ, часто пользовались движеніемъ населенія. Возможность добиться удовлетворительныхъ результатовъ, слѣдуя подобному способу, заслуживаетъ безъ сомнѣнія болѣе глубокаго изслѣдованія. Это въ высшей степени интересный вопросъ; но, сознаюсь, однихъ данныхъ о населеніи, мнѣ кажется, недостаточно для его рѣшенія. Мѣстныя вліянія, климатъ, привычки, учрежденія и т. п., являются элементами, которыми нельзя пренебречь, сравнивая одинъ народъ съ

---

Но въ извѣстныхъ случаяхъ можно имѣть $n>1, =1, <1$, при возрастающемъ, стаціонарномъ и убывающемъ населеніи; въ томъ или другомъ случаѣ, таблица населенія и таблица смертности будутъ продолжать давать одинаковыя числа для одинаковыхъ возрастовъ, если брать одинаковое основаніе за исходную точку.

другимъ: съ меньшей опасностью можно было-бы это можетъ быть сдѣлать, сравнивая какой-нибудь народъ съ самимъ собою въ разныя эпохи, въ теченіе которыхъ эти элементы не испытали значительныхъ измѣненій *).

Принимая во вниманіе только число браковъ или рожденій въ какой-нибудь странѣ, можно впасть въ очень тяжкія ошибки. Ибо, если вѣрно, что отчаяніе побуждаетъ иногда несчастныхъ къ все большему и большему размноженію, какъ въ Ирландіи, и что нравственный упадокъ служитъ сильнымъ стимуломъ ранняго вступленія въ бракъ **), то можетъ также случиться, что смертность производитъ среди нихъ только величайшія опустошенія; и однимъ изъ самыхъ гибельныхъ для народа бѣдствій является то, когда его поколѣнія возобновляются съ быстротой, которая не позволяетъ сохранять полезныхъ людей.

Вообще-же рожденія регулируются смертными случаями, т. е. страны, дающія больше всего дѣтей, являются тѣми именно, гдѣ смертность больше всего. Когда размноженіе выходитъ за предѣлы благоразумія, наиболѣе слабая часть населенія раньше всего раскаивается въ этомъ; избытокъ населенія переходитъ последовательно изъ колыбели въ могилу. Если число рожденій и можетъ быть полезнымъ для опредѣленія степени благосостоянія народа, то только тогда, когда мы пріймемъ во вниманіе отношеніе этого числа къ смертности. Но, какъ я уже сказалъ, одного числа рожденій для этой цѣли абсолютно недостаточно.

Я больше довѣряю числу смертныхъ случаевъ, въ особенности когда идетъ рѣчь только объ установленіи мѣры, при помощи которой можно убѣдиться, достигло-ли населеніе или перешло предѣлы, которыхъ оно не можетъ перейти, не осудивъ себя на *пауперизмъ*. „Эту универсальную мѣру, говоритъ Д'Ивэрнуа, я надѣюсь нашелъ въ *величинѣ смертности* народовъ, которая, я думаю, показываетъ, увеличивается ли или уменьшается отношеніе годовыхъ смертныхъ случаевъ, сравниваемыхъ съ общимъ числомъ живыхъ“ ***). Можетъ быть неправильно заранѣе предугадывать

---

*) Я воспроизвожу здѣсь большую часть статьи, напечатанной мною въ „*Revue encyclopédique de Paris*“ за августъ 1830 года.

**) См. статью г. D'Ivernois, напечатанную въ „*Bibliothèque universelle de Genève*“, мартъ 1830 г.

***) „*De la Mortalité moyenne, envisagée comme Mesure de l'aisance et de la civilisation des peuples*“—*Bibliothèque universelle de Genève*, 1831 г.

результаты; но если мы замѣтимъ, что эта мѣра не измѣняется, пока общее число живыхъ остается такимъ-же, такъ-же какъ и число смертныхъ случаевъ, то можно нѣсколько опасаться за ея вѣрность. Въ самомъ дѣлѣ, населеніе можетъ различнымъ образомъ численно оставаться одинаковымъ, и представлять большее или меньшее число полезныхъ людей, хотя и нельзя будетъ сказать поэтому, что его благосостояніе остается одинаковымъ. Иначе считали бы, такъ сказать, дитя равнымъ полезному человѣку.

Возьмемъ одинъ только примѣръ, когда вслѣдствіе какой-нибудь причины, смерть стала-бы особенно сильно поражать полезныхъ людей какой-нибудь процвѣтающей страны, сохраняя дѣтей, при чемъ общее число смертныхъ случаевъ и рожденій оставалось-бы одинаковымъ; тутъ несомнѣнно произошло-бы то, что черезъ нѣсколько лѣтъ народъ пришелъ-бы въ упадокъ и потерялъ-бы много элементовъ благосостоянія; однако понесенная имъ потеря совершенно не была-бы обнаружена примѣненной мѣрой. Число смертныхъ случаевъ оставалось-бы тѣмъ-же, а значительное число полезныхъ людей, производившихъ для другихъ, было-бы замѣщено непроизводительными дѣтьми существуетъ несомнѣнно тѣсная связь между благосостояніемъ страны и движеніемъ населенія; надо только сумѣть выразить ее. Въ самомъ дѣлѣ, вопросъ можно разсматривать съ двоякой точки зрѣнія. Изучая жизнь какого-нибудь народа, можно поставить себѣ задачей или изслѣдованіе бѣдственнныхъ лѣтъ, въ теченіе которыхъ онъ болѣе или менѣе страдалъ, или изслѣдованіе абсолютнаго числа полезныхъ людей, которыми онъ можетъ располагать, однимъ словомъ, какова его производительная сила, которая является также однимъ изъ главныхъ элементовъ его благосостоянія. Въ первомъ случаѣ, число смертныхъ случаевъ можетъ почти всегда употребляться съ большимъ успѣхомъ, такъ какъ бѣдственный годъ вообще сопровождается и вызываетъ многочисленныя лишенія даже у самыхъ счастливыхъ народовъ, а лишенія гибельны для человѣческаго рода. Такъ, если-бы не знали, что 1817 и предыдущіе годы были годами неурожая въ Бельгіи и во многихъ другихъ странахъ, то это увидѣли-бы безъ труда изъ числа смертныхъ случаевъ, которое было больше, чѣмъ для предыдущихъ и слѣдующихъ лѣтъ. Эта усилившаяся смертность дала себя знать и въ домахъ призрѣнія нищихъ, гдѣ она почти удвоилась сравнительно съ прежнимъ, а также и въ госпиталяхъ и въ пріютахъ для подкидышей.

Что-же касается второго способа разсмотрѣнія вопроса, то я старался объяснить, почему одно число смертныхъ случаевъ мнѣ кажется недостаточнымъ. Въ дѣйствительности, важно знать не только число смертныхъ случаевъ среди какого-нибудь народа, но и возрастъ умершихъ. Нѣкоторые писатели пользовались при подобныхъ оцѣнкахъ средней продолжительностью жизни, другіе вѣроятной ея продолжительностью и устанавливали свои опредѣленія на основаніи перемѣнъ, которыя испытала та или другая изъ этихъ величинъ. Но здѣсь является зарудненіе, подобное тому, которое я раньше указалъ: а именно, вѣроятная какъ и средняя продолжительность жизни могутъ имѣть одинаковое значеніе при различныхъ условіяхъ. Это затрудненіе особенно дастъ себя чувствовать, когда употребляютъ число, выражающее вѣроятную жизнь, такъ какъ въ этомъ случаѣ разсматриваютъ только ту эпоху, когда опредѣленное число лицъ одинаковаго возраста уменьшится на половину: тутъ не установлено, могли-ли тѣ, которые раньше умерли, быть полезными болѣе или менѣе долго, а также ничего не сказано относительно оставшихся въ живыхъ.

Взявши число, выражающее среднюю продолжительность жизни или средній возрастъ, котораго достигло опредѣленное число лицъ, считающихся родившимися одновременно, придаютъ одинаковое значеніе году жизни новорожденнаго ребенка и году жизни человѣка, труды котораго полезны обществу.

Есть еще одно затрудненіе, связанное съ предыдущими и заслуживающее особаго вниманія, такъ какъ его рѣшеніе связано съ достаточно важными соображеніями въ высокой степени интересующими статистику и политическую экономію. Д'Ивернуа, труды котораго принесли такую пользу этимъ обѣимъ наукамъ, обратилъ мое вниманіе на это затрудненіе и спросилъ у меня моего мнѣнія о немъ: шла рѣчь о томъ, могутъ-ли два народа, отличающіеся одинаковыми показателями отношенія между рождаемостью и смертностью, могутъ-ли они отличаться одинаковой средней продолжительностью жизни, принимая во вниманіе случайныя различія въ порядкѣ смертности возрастовъ умирающихъ? *).

---

*) Печатая мой отвѣтъ въ „Bibliothèque universelle de Genève мартъ, 1834 г., Д'Иварнуа заявляетъ, что онъ пришелъ къ тѣмъ же выво-

Для большей простоты предположимъ, что народъ насчитываетъ ежегодно одинаковое число рожденій и смертныхъ случаевъ и изслѣдуемъ, можетъ-ли среди него изъ года въ годъ измѣняться средняя продолжительность жизни? Въ сущности этотъ вопросъ возвращается къ поставленному выше. Если мы составимъ на основаніи данныхъ одного какого-нибудь года таблицу смертности, и выведемъ изъ нея среднюю продолжительность жизни, то найдемъ, допустимъ, выраженіе для нея ровно въ 30 лѣтъ. Черезъ годъ, если смертность была такой-же и въ такихъ-же пропорціяхъ, средняя продолжительность жизни будетъ снова 30 лѣтъ. Но, если въ спискѣ смертныхъ случаевъ этого второго года вмѣсто мужчины 40 лѣтъ умретъ ребенокъ одного года, что ни въ чемъ не измѣнитъ пропорціональнаго числа рожденій и смертныхъ случаевъ, то, принимая во вниманіе ребенка, замѣнившаго взрослаго мужчину, мы уже найдемъ, что средняя жизнь стала нѣсколько короче, такъ какъ сумма прожитыхъ лѣтъ стала меньше на 39 лѣтъ. Итакъ мы видимъ, что если таблицы смертности и средняя продолжительность жизни вычислены только на основаніи наблюденій этого года, то для второго года онѣ не могутъ дать точно такихъ-же результатовъ, какіе получены для перваго года. Средняя жизнь вышла-бы *короче*, однако общество очевидно *выиграло-бы*, такъ какъ оно сохранило-бы полезнаго человѣка вмѣсто ребенка.

Понятно, что если вмѣсто одного подобнаго замѣщенія ихъ будетъ много, то средняя жизнь, вычисленная по смертнымъ случаямъ этого года, уменьшалась-бы очень чувствительнымъ образомъ; и однако, это уменьшеніе было-бы благопріятно, что на первыхъ порахъ кажется парадоксомъ. Въ дѣйствительности для государства сохранились-бы очень полезные годы взамѣнъ дорого стоющихъ лѣтъ.

Но возразятъ, что эти 39 лѣтъ не потеряны для суммы прожитыхъ лѣтъ и что замѣщенный индивидуумъ 40 лѣтъ, умирая, увеличитъ среднюю величину жизни на всю длину, на которую онъ сократилъ ее раньше при замѣщеніи; и дѣйствительно, если періодъ времени, по которому вычисляютъ среднюю жизнь, достаточно великъ, чтобы охватить смерть лицъ, о которыхъ идетъ рѣчь, то очевидно, что этотъ долгъ въ 39 лѣтъ только отсроченъ, и что масса прожитыхъ лѣтъ не потеряна. Такимъ образомъ,

---

дамъ, что и я, и что отъ Виллермэ онъ получилъ подобные-же выводы.

средняя продолжительность жизни остается одинаковой; но мы всегда вправѣ сказать, что даже и тогда общество выигрываетъ, ибо въ теченіе болѣе или менѣе продолжительнаго времени убыточные годы для него замѣщаются другими, дорого стоющими годами.

Если вслѣдствіе стеченія обстоятельствъ, къ которому должна привести цивилизація, подобныя замѣщенія будутъ происходить не для одного только года, но и для многихъ, и это положеніе вещей будетъ все усиливаться, то понятно, что становится невозможнымъ, сохраняя одинаковыя пропорціональныя числа рожденій и смертныхъ случаевъ, сохранить ту же среднюю продолжительность жизни: она должна уменьшаться. Однако, почему не наблюдаются столь необыкновенные результаты? Это оттого, думаю я, что такія замѣщенія бываютъ недостаточно численны, а продолжительность ихъ недостаточно велика, для того чтобы оставить замѣтные слѣды среди другихъ вліяющихъ элементовъ.

Это учитъ насъ однако тому, какъ нужно быть осторожнымъ по отношенію къ выводамъ, которые можно сдѣлать относительно средней жизни, вычисленной на основаніи наблюденій *немногихъ* лѣтъ и народа, находящагося въ процессахъ или развитія, или упадка. Продолжая предыдущія размышленія, прійдемъ безъ труда къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1°. Народъ можетъ давать ежегодно для пропорціональнаго числа рожденій и смертныхъ случаевъ въ точности одинаковыя числа, хотя средняя продолжительность жизни не остается такой-же;

2°. Когда, при равныхъ условіяхъ, смертность поражаетъ взрослыхъ людей и щадитъ дѣтей, средняя продолжительность жизни уменьшается, и наоборотъ (разумѣется, если вычисляютъ среднюю жизнь остающихся въ живыхъ);

3°. Число рожденій, смертныхъ случаевъ и средняя продолжительность жизни могутъ сохранять одинаковое значеніе, между тѣмъ какъ въ дѣйствительности населеніе переноситъ большія потери или пріобрѣтаетъ большія выгоды, остающіяся скрытыми;

4°. Чтобы вычислить правильно, теряетъ-ли или выигрываетъ населеніе, необходимо, распредѣляя годы для опредѣленія средней продолжительности жизни, принять во вниманіе *качество* этихъ лѣтъ и изслѣдовать, *производительны-ли* они или нѣтъ.

Напримѣръ, когда идетъ рѣчь объ оцѣнкѣ силъ, которыми можетъ располагать какое-нибудь государство, разсматривая эту проблему, какъ это дѣлали, съ чисто физической точки зрѣнія, мнѣ кажется, что самымъ вѣрнымъ путемъ является численное сравненіе полезныхъ людей съ тѣми, которые безполезны. Элементы для сравненія должны быть взяты въ этомъ случаѣ изъ таблицъ смертности или лучше изъ хорошо составленныхъ таблицъ населенія; и надо опредѣлить, сколько дѣтей, способныхъ быть полезными, приходится на данное число индивидуумовъ, и сколько человѣкъ находится въ возрастѣ, содѣйствующемъ общему благу; населеніе можно было-бы раздѣлить на двѣ части: одну ниже 15 лѣтъ, другую старше 15 лѣтъ. Правда, я предполагаю такимъ образомъ, что человѣкъ въ 30 или 40 лѣтъ не можетъ быть полезнѣе чѣмъ въ 12 или 80 лѣтъ; но это такое затрудненіе, которое встрѣчается также и при другихъ методахъ оцѣнки и которое можно было-бы устранить, придавая однимъ извѣстнымъ годамъ большее значеніе, чѣмъ другимъ, если-бъ крайняя точность не была обманчива въ подобномъ случаѣ.

Для того, чтобы прежде всего составить себѣ неточное представленіе о томъ, какъ составляется населеніе, я привожу наиболѣе точныя данныя, которыя мнѣ удалось собрать о нѣкоторыхъ главныхъ странахъ, разсмотрѣнныхъ выше; въ слѣдующей таблицѣ, въ которой общая сумма населенія каждой страны приведена къ 10.000 душъ, отдѣльно указаны числа, относящіяся къ двумъ категоріямъ, установленнымъ мною для лицъ производительнаго возраста и тѣми, содержаніе которыхъ можетъ разсматриваться какъ бремя для общества. (См. табл. на 298 стр.)

Эти выводы для начала XIX столѣтія можно было нѣкоторымъ образомъ предвидѣть; однако они удивляютъ на первыхъ порахъ: не ожидали найти такую большую разницу между числами Франціи, Бельгіи и Швеціи, и числами Ирландіи и Соединенныхъ Штатовъ. Въ первыхъ взрослое населеніе вдвое больше, чѣмъ въ другихъ, между тѣмъ какъ въ послѣднихъ оно не превышаетъ приблизительно четверти. Впрочемъ, я привожу эти уже устарѣлыя данныя съ недовѣріемъ: разработка чиселъ настоящаго времени дала-бы другіе результаты. Соединенные Штаты кажутся здѣсь въ крайне неблагопріятныхъ условіяхъ, такъ какъ изъ всѣхъ разсматриваемыхъ нами странъ они даютъ меньше всего взрослыхъ людей. Но, какъ мы замѣтили, въ этомъ столь молодомъ и уже могущественномъ государствѣ статистическія данныя, вопреки

| Возрастъ. | Великобританія 1821 г. Маршаль. | Ирландія 1821 года. Маршаль. | Англія 1821 года. Маршаль. | Англія и Уэльсъ 1813—1830 Рикманъ. | Франція до 1789 года. Annuaire. | Бельгія 1829 года. Annuaire. | Швеція 1820 года. Маршаль. | Соед. Шт. 1830 года. Маршаль. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ниже 5 лѣтъ. | 1.647 | 1.535 | 1.472 | 1.487 | 1.201 | 1.297 | 1.307 | 1.800 |
| 5—10 „ . . | 1.385 | 1.355 | 1.300 | 1.307 | 981 | 1.089 | 1.010 | 1.455 |
| 10—15 „ . . | 1.209 | 1.218 | 1.119 | 1.114 | 939 | 946 | 894 | 1.243 |
| 15—20 „ . . | 1.046 | 1.219 | 1.000 | 992 | 897 | 883 | 899 | 1.112 |
| 20—30 „ . . | 1.558 | 1.760 | 1.583 | 1.574 | 1.638 | 1.680 | 1.711 | 1.781 |
| 30—40 „ . . | 1.180 | 1.150 | 1.176 | 1.181 | 1.404 | 1.341 | 1.362 | 1.091 |
| 40—50 „ . . | 878 | 771 | 931 | 934 | 1.161 | 1.017 | 1.087 | 688 |
| 50—60 „ . . | 545 | 600 | 663 | 659 | 892 | 793 | 855 | 430 |
| 60—70 „ . . | 348 | 273 | 460 | 456 | 577 | 604 | 586 | 258 |
| 70—80 „ . . | 160 | 96 | 227 | 228 | 255 | 279 | 240 | 110 |
| 80—90 „ . . | 40 | 23 | 62 | 63 | 50 | 66 | 48 | 31 |
| 90—100 „ . . | 3,4 | 3 | 5,5 | 5 | 4,8 | 4,9 | 1,0 | 4 |
| Выше 100 л. | 0,1 | 0,5 | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0 | 0,2 |
| Ниже 15 л. | 4.241 | 4.108 | 3.891 | 3.908 | 3.121 | 3.332 | 3.211 | 4.498 |
| Выше 15 л. | 5.758,5 | 5.895,5 | 6.107,8 | 6.092,2 | 6.879 | 6.668 | 6.789 | 5.500,2 |
| Отношеніе . | 1,36 | 1,43 | 1,57 | 1,56 | 2,20 | 2,00 | 2,11 | 1,22 |

всѣмъ усиліямъ науки, были еще мало-извѣстны и можно сказать плохо разработаны. *)

Указанная сейчасъ огромная несоразмѣрность находится въ связи съ быстрымъ приростомъ населенія, который испытали въ послѣднее время Англія и Соединен. Штаты; большая часть лицъ, родившихся во время этого усиленія плодовитости, еще мало ушли впередъ по пути жизни, такъ что вслѣдствіе этого должно было оказаться больше несовершеннолѣтнихъ. Удивительный приростъ населенія, замѣчаемый въ Соединен. Штатахъ, наблюдается уже нѣсколько больше 30 лѣтъ; ясно также, что число индивидуумовъ ниже этого возраста сравнительно больше, чѣмъ въ другихъ стра-

*) Со времени перваго изданія этого труда, состояніе населенія значительно измѣнилось въ Соед. Штатахъ, несмотря на войну, свирѣпствовавшую въ послѣднее время. Самуэль Броунъ совсѣмъ недавно вычислилъ состояніе смертности въ этой странѣ. По записямъ 1860 года въ XIII-мъ томѣ *Institut des actuaires*“ Лондона.—См. также работу г. Кэннэди „*Population of the United-States in 1830*“. 1 т. in 4° Вашингтонъ 1864 года.

нахъ. То-же самое въ Англіи въ возрастахъ отъ 30 до 40 лѣтъ *) Швеція, Франція и Бельгія, напротивъ, представляютъ населеніе, которое давало менѣе быстрый приростъ, и которое можетъ представлять такую-же пропорцію взрослыхъ, какъ и въ обыкновенное время.

Я думаю, что до сихъ поръ мало обращали вниманія на большое число дѣтей, появляющихся въ странѣ съ слишкомъ быстрымъ приростомъ, и на истинное значеніе этого прироста, который вдругъ пріобрѣтаетъ населеніе; такое увеличеніе представляетъ очень сильное препятствіе къ дальнѣйшему развитію. Во Франціи, Бельгіи и Швеціи, напримѣръ, изъ 3 жителей по крайней мѣрѣ двое въ состояніи работать, между тѣмъ въ Соединенныхъ Штатахъ одинъ житель долженъ быть работникомъ на двоихъ.

Производство опредѣляетъ *возможный предѣлъ* населенія, которое можетъ вмѣстить страна. Цивилизація суживаетъ этотъ предѣлъ и стремится увеличить часть продуктовъ, приходящися на каждаго индивидуума, увеличивая его благосостояніе и обезпечивая ему средства существованія. Что касается медицины, то она ограничивается тѣмъ, что закрываетъ одни двери, ведущія въ могилу, открывая другія; ибо она можетъ увеличить списокъ живыхъ, только такимъ образомъ, что принуждаетъ этихъ сверхкомплектныхъ живыхъ жить засчетъ общества. Самъ Эскулапъ смогъ бы своимъ искусствомъ сдѣлать безсмертной половину человѣчества, только осудивъ ее на то, чтобы она не размножалась, и увеличивъ по крайней мѣрѣ вдвое смертность другой половины или усиливъ производство до такой степени, чтобъ оно удовлетворяло вновь возникающія нужды.

Отрицать то, что медицинѣ удалось увеличить среднюю продолжительность жизни людей, значило бы однако не признавать огромныхъ услугъ, оказанныхъ ею человѣчеству; но это прекрасное завоеваніе, обязанное распространенію просвѣщенія, можетъ быть сохранено только предусмотрительностью людей и предупреж-

---

*). Въ таблицахъ, недавно опубликованныхъ, не находимъ такихъ неблагопріятныхъ указаній для Англіи. Напр. таблицы Фарра показываютъ, какъ сильно выросло тамъ населеніе, если принять во вниманіе его увеличеніе.

деніемъ новыхъ рожденій, дающихъ новую пищу смерти*). Если нѣтъ рѣзкой перемѣны, то природа ежегодно взимаетъ съ насъ одинаковую дань смертности, отъ которой всякій хочетъ насколько возможно спастись; каждый хочетъ быть въ числѣ привиллегированныхъ; но всѣ такого рода хитрости приводятъ не къ уменьшенію налога, а къ перенесенію его на сосѣдей, которымъ неблагопріятствуетъ ихъ плохое соціальное положеніе.

Средняя продолжительность жизни, если-бъ ее могли точно опредѣлить, давала бы слѣдовательно мѣру предусмотрительности и гигіеническаго положенія страны; потребленіе жителей—мѣру цивилизованности и требованій климата, а пропорціональное число жителей, принимая во вниманіе это послѣднее условіе, давало-бы представленіе о производствѣ.

---

*) Удлинняя среднюю продолжительность жизни, медицина замѣщаетъ года непроизводительные полезными. Человѣкъ живетъ дольше, производитъ бо́льше, и обществу приходится кормить меньше дѣтей; такимъ образомъ, медицина въ этомъ отношеніи поистинѣ увеличиваетъ производство и оказываетъ новую услугу.

# ПРИБАВЛЕНІЕ.

При составленіи этого краткаго обозрѣнія Соціальной Физики, мнѣ постоянно приходилось имѣть дѣло съ большими числами населенія націй, рождаемости среди нихъ, смертности и браковъ за послѣдніе годы. Заканчивая этотъ первый томъ, я увидѣлъ, что гораздо лучше было бы излагать эти основныя данныя не по отдѣламъ, а въ совокупности, по крайней мѣрѣ для странъ, въ которыхъ политическіе кризисы не вызвали никакихъ уклоненій числовыхъ показателей. Безъ сомнѣнія, международный статистическій конгрессъ различныхъ націй не замедлитъ собрать свѣдѣнія по этимъ предметамъ и опубликуетъ ихъ лучше, чѣмъ это я могъ сдѣлать. Я нашелъ въ 29-мъ общемъ отчетѣ краткое извлеченіе свѣдѣній о рождаемости, смертности и бракахъ въ Англіи, въ 1866 году (Лондонъ 1868 in 8⁰) вмѣстѣ съ Уэльсомъ, Шотландіею и Ирландіею, а также данныя для Франціи и Австріи; *) сверхъ того я получилъ небольшое количество свѣдѣній, которыя собралъ для Италіи послѣ ея объединенія докторъ Маэстри, начальникъ департамента статистики. Другіе документы были мнѣ даны также благосклонно докторомъ Энгелемъ для Пруссіи, Баумгауэромъ—для Нидерландовъ, Ваппэусомъ—для Ганновера, совѣтникомъ Бэргомъ для Швеціи и поч. совѣтникомъ Германомъ, почти въ то время, когда смерть похитила его къ великому прискорбію его друзей. Свѣдѣнія относительно Даніи, разработанныя моимъ коллегой — Давидомъ, взяты изъ книги „Statistique international“, изданной въ Брюсселѣ въ 1865 г.

---

*) Лэгуа, директоръ статистическаго бюро во Франціи, въ „Registrar general“ могъ дать для Франціи свѣдѣнія, относящіяся только къ 1833—1861 и 1866 г. г. Народонаселеніе предыдущихъ лѣтъ взято изъ „Международной Статистики“ стр. 225; докторъ Фикеръ, начальникъ статистическаго бюро Австріи, въ ту-же „Registrar general“ сообщилъ свѣдѣнія объ Австріи; здѣсь имѣются также свѣдѣнія по Венгріи, Кроаціи, Славоніи и Трансильваніи; то, что касается итальянскихъ владѣній этихъ странъ, исключено.

# НАСЕЛЕНІЕ,

## БРАКИ, РОЖДЕНІЯ И СМЕРТНЫЕ СЛУЧАИ

### въ нѣсколькихъ государствахъ Европы.

**Англія** (безъ Уэльса).

| Годъ. | Населеніе (среднее годовое). | Рожденія | Смертн. случаи | Браки. | Число населенія на: | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | не считая мертворожденныхъ. | | | 1 рожденіе. | 1 смертн. случай | 1 бракъ. |
| 1838 . . . | 15.312.256 | 463.787 | 342.760 | 118.067 | 33 | 45 | 130 |
| 1839 . . . | 15.515.296 | 492.574 | 338.984 | 123.166 | 31 | 46 | 126 |
| 1840 . . . | 15.721.029 | 502.303 | 359.687 | 122.665 | 31 | 44 | 128 |
| 1841 . . . | 15.929.492 | 512.158 | 343.847 | 122.496 | 31 | 46 | 130 |
| 1842 . . . | 16.123.793 | 517.739 | 349.519 | 118.825 | 31 | 46 | 136 |
| 1843 . . . | 16.320.479 | 527.325 | 346.445 | 123 818 | 31 | 47 | 132 |
| 1844 . . . | 16.519.565 | 540.763 | 356.933 | 132.249 | 31 | 46 | 125 |
| 1845 . . . | 16.721.081 | 543.521 | 349.366 | 143.743 | 31 | 48 | 116 |
| 1846 . . . | 16.925.051 | 572.625 | 390.315 | 145.664 | 30 | 43 | 116 |
| 1847 . . . | 17.131.512 | 539.965 | 423.304 | 135.845 | 32 | 40 | 126 |
| 1848 . . . | 17.340.492 | 563.059 | 399.833 | 138.230 | 31 | 43 | 125 |
| 1849 . . . | 17.552.020 | 578.159 | 440.839 | 141.883 | 30 | 40 | 124 |
| 1850 . . . | 17.766.129 | 593.422 | 368.995 | 152.744 | 30 | 48 | 116 |
| 1851 . . . | 17.982.849 | 615 865 | 395.396 | 154.206 | 29 | 45 | 117 |
| 1852 . . . | 18.193.206 | 624.012 | 407.135 | 158.782 | 29 | 45 | 115 |
| 1853 . . . | 18.404.368 | 612.391 | 421.097 | 164.520 | 30 | 44 | 112 |
| 1854 . . . | 18.616.310 | 634.405 | 437.905 | 159.727 | 29 | 43 | 117 |
| 1855 . . . | 18.829.000 | 635.043 | 425.705 | 152.113 | 30 | 44 | 124 |
| 1856 . . . | 19.042.412 | 657.453 | 390.506 | 159.337 | 29 | 49 | 119 |
| 1857 . . . | 19.256.516 | 663.071 | 419.815 | 159.097 | 29 | 46 | 121 |
| 1858 . . . | 19.471.291 | 655.481 | 449.656 | 156.070 | 30 | 43 | 125 |
| 1859 . . . | 19.686.701 | 689.881 | 440.781 | 167.723 | 29 | 45 | 117 |
| 1860 . . . | 19.902.713 | 684.048 | 422.721 | 170.156 | 29 | 47 | 117 |
| 1861 . . . | 20.119.314 | 696.406 | 435.114 | 163.706 | 29 | 46 | 123 |
| 1862 . . . | 20.336.467 | 712.684 | 436.566 | 164.030 | 29 | 47 | 124 |
| 1863 . . . | 20.554.137 | 727.417 | 473.837 | 173.510 | 28 | 43 | 118 |
| 1864 . . . | 20.772.308 | 740.275 | 495.531 | 180.387 | 28 | 42 | 116 |
| 1865 . . . | 20.990.946 | 748.069 | 490.909 | 185.474 | 28 | 43 | 113 |
| 1866 . . . | 21.210.020 | 753 870 | 500.689 | 187.776 | 28 | 42 | 113 |

## Англія и Уэльсъ.

| Годъ. | Населеніе. | Рожденія | Смертн. случаи. | Браки. | Число населенія на: 1 рожденіе. | 1 смертн. случай | 1 бракъ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1852 . . . | 18.193.206 | 624.171 | 407.938 | 158.439 | 29 | 45 | 115 |
| 1853 . . . | 18.404 368 | 612.391 | 421.097 | 164.520 | 30 | 44 | 112 |
| 1854 . . . | 18.616.310 | 634.506 | 438.239 | 159.349 | 29 | 43 | 117 |
| 1855 . . . | 18.829.000 | 635.123 | 426.242 | 151.774 | 30 | 44 | 124 |
| 1856 . . . | 19.042.412 | 657.704 | 391.369 | 159.262 | 29 | 49 | 120 |
| 1857 . . . | 19.256.516 | 663.071 | 419 815 | 159.097 | 29 | 46 | 121 |
| 1858 . . . | 19.471.291 | 655.481 | 449 656 | 156.070 | 30 | 43 | 125 |
| 1859 . . . | 19.686.701 | 689.881 | 441.790 | 167.723 | 29 | 45 | 117 |
| 1860 . . . | 19.602.713 | 684.048 | 422.721 | 170.156 | 29 | 46 | 115 |
| 1861 . . . | 20.119.314 | 696.406 | 435.114 | 163.706 | 29 | 46 | 123 |
| 1862 . . . | 20.336.467 | 712.684 | 436.573 | 163.830 | 29 | 47 | 124 |
| 1863 . . . | 20.554.137 | 727.417 | 473 837 | 173.510 | 28 | 43 | 118 |
| 1864 . . . | 20.772.308 | 740.275 | 405.531 | 180.387 | 28 | 51 | 115 |
| 1865 . . . | 20.990.946 | 748.069 | 490.909 | 185.474 | 28 | 43 | 113 |
| 1866 . . . | 21.210.020 | 753.188 | 500.938 | 189.295 | 28 | 42 | 112 |

## Шотландія.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1855 . . . | 2.978.065 | 93.349 | 62.004 | 19.680 | 32 | 8 | 149 |
| 1856 . . . | 2.995.771 | 101.821 | 58.529 | 20.740 | 29 | 51 | 143 |
| 1857 . . . | 3.012.310 | 103.415 | 61.906 | 21.369 | 29 | 49 | 143 |
| 1858 . . . | 3.027.665 | 104.018 | 63.539 | 19.655 | 29 | 47 | 151 |
| 1859 . . . | 3.041.812 | 106.543 | 61.714 | 21.201 | 28 | 49 | 145 |
| 1860 . . . | 3 054.738 | 105.629 | 68.170 | 21.225 | 29 | 45 | 145 |
| 1861 . . . | 3.066.638 | 107 036 | 62.287 | 20.828 | 29 | 49 | 146 |
| 1862 . . . | 3.083.989 | 107.138 | 67.159 | 20.544 | 29 | 46 | 147 |
| 1863 . . . | 3.101.345 | 109.325 | 71.421 | 22.087 | 28 | 44 | 141 |
| 1864 . . . | 3.118.701 | 112.445 | 74.303 | 22.675 | 28 | 42 | 136 |
| 1865 . . . | 3.136.057 | 113.126 | 70 821 | 23.577 | 28 | 44 | 131 |
| 1866 . . . | 3.153.413 | 113.639 | 71.273 | 28.629 | 28 | 44 | 131 |

## Ирландія.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1864 . . . | 5.675.307 | 126.414 | 93.144 | 27.406 | 45 | 61 | 210 |
| 1865 . . . | 5.641.086 | 145.227 | 93.738 | 30.684 | 39 | 60 | 182 |
| 1866 . . . | 5.571.971 | 146.237 | 93.598 | 30.151 | 38 | 59 | 186 |

## Австрія.

| Годъ. | Населеніе (среднее годовое). | Рожденія | Смертн. случаи. | Браки. | Число населенія на: | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | не считая мертворожденныхъ. | | | 1 рожденіе. | 1 смертн. случай | 1 бракъ. |
| 1853 . . . | 31.328.874 | 1.279.226 | 1.096.119 | 263.627 | 24 | 29 | 119 |
| 1854 . . . | 31.493.583 | 1.208.853 | 1.177.888 | 241.799 | 26 | 27 | 130 |
| 1855 . . . | 31.200.576 | 1.151.039 | 1.435 949 | 228.515 | 27 | 22 | 137 |
| 1856 . . . | 31.425.385 | 1.245.330 | 1.002.068 | 295.970 | 25 | 31 | 106 |
| 1857 . . . | 32.053.235 | 1.873.988 | 947.817 | 281.643 | 23 | 34 | 114 |
| 1858 . . . | 32.361.905 | 1.364.905 | 1.036.148 | 280.558 | 24 | 31 | 115 |
| 1859 . . . | 32.750.697 | 1.413.983 | 1.004.295 | 242.371 | 23 | 33 | 135 |
| 1860 . . . | 33.108.529 | 1.342.992 | 986.928 | 289.119 | 25 | 34 | 114 |
| 1861 . . . | 33.399.945 | 1.334.727 | 1.048 016 | 286.244 | 25 | 32 | 117 |
| 1862 . . . | 33.719.823 | 1.358.116 | 1.043.403 | 304.188 | 25 | 32 | 111 |
| 1863 . . . | 34.070.577 | 1.417.927 | 1.065.374 | 296.951 | 24 | 32 | 115 |
| 1864 . . . | 34.442.890 | 1.426.906 | 1.101.266 | 285.628 | 24 | 31 | 121 |
| 1865 . . . | 34.753.272 | 1.395.347 | 1 053.106 | 296.454 | 25 | 33 | 117 |
| 1866 . . . | 35.065.949 | 1.414.671 | 1.133.185 | 255.492 | 25 | 31 | 137 |

## Баварія.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1835 . . . | 4.269.675 | 149.419 | 122.538 | 27.031 | 29 | 35 | 158 |
| 1836 . . . | 4.292.572 | 144.923 | 131.699 | 27.177 | 30 | 33 | 159 |
| 1837 . . . | 4.315.469 | 143.974 | 118.324 | 27.728 | 30 | 37 | 154 |
| 1838 . . . | 4.333.971 | 149.189 | 117.833 | 28.689 | 29 | 37 | 149 |
| 1839 . . . | 4.352.473 | 149.909 | 123.966 | 28.504 | 29 | 35 | 150 |
| 1840 . . . | 4.370.977 | 151.490 | 124.701 | 29.500 | 29 | 35 | 151 |
| 1841 . . . | 4.394.094 | 156.643 | 130.308 | 29.463 | 28 | 34 | 152 |
| 1842 . . . | 4.417.211 | 153.412 | 127.857 | 29.356 | 29 | 35 | 152 |
| 1843 . . . | 4.440.327 | 142.986 | 121.002 | 29.490 | 31 | 37 | 153 |
| 1844 . . . | 4.461.843 | 156.853 | 120.440 | 29.373 | 28 | 37 | 154 |
| 1845 . . . | 4.483.359 | 155.202 | 120.704 | 29.034 | 29 | 37 | 155 |
| 1846 . . . | 4.504.874 | 147.516 | 125.622 | 28.331 | 30 | 36 | 161 |
| 1847 . . . | 4.510.166 | 142.791 | 127.561 | 29.521 | 32 | 35 | 150 |
| 1848 . . . | 4.515.458 | 162.111 | 121.822 | 30.382 | 28 | 37 | 151 |
| 1849 . . . | 4.520.751 | 157.068 | 121.805 | 29.788 | 29 | 37 | 151 |
| 1850 . . . | 4.533.651 | 157.789 | 126.537 | 30.681 | 29 | 36 | 146 |
| 1851 . . . | 4.546.551 | 150.667 | 127.097 | 28.324 | 30 | 36 | 162 |
| 1852 . . . | 4.559.452 | 145.290 | 129.263 | 27.890 | 31 | 35 | 163 |
| 1853 . . . | 4.553 486 | 149.779 | 131.812 | 26.939 | 30 | 34 | 169 |
| 1854 . . . | 4.547 521 | 138.341 | 124 468 | 27.649 | 33 | 37 | 162 |
| 1855 . . . | 4.541.556 | 149.594 | 121.746 | 27.937 | 30 | 37 | 162 |
| 1856 . . . | 4.566.286 | 155.363 | 128.772 | 28.820 | 29 | 35 | 157 |
| 1857 . . . | 4.591.016 | 156.235 | 130.887 | 28.765 | 29 | 35 | 158 |
| 1858 . . . | 4.615.748 | 160.379 | 132.015 | 32.823 | 29 | 35 | 140 |

| Годъ. | Населеніе (среднее годовое). | Рожденія | Смертн. случаи. | Браки. | Число населенія на: | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | не считая мертворожденныхъ. | | | 1 рожденіе | 1 смертн. случай. | 1 бракъ. |
| 1859 . . . | 4.640.444 | 160.103 | 117.349 | 32.221 | 29 | 40 | 145 |
| 1860 . . . | 4.665.140 | 157.707 | 132.259 | 33 264 | 29 | 35 | 141 |
| 1861 . . . | 4.689.837 | 161.593 | 131.637 | 35.257 | 29 | 36 | 134 |
| 1862 . . . | 4.729.038 | 171.452 | 135.264 | 39.961 | 28 | 35 | 118 |
| 1863 . . . | 4.768.239 | 177.971 | 141.446 | 40.161 | 27 | 34 | 119 |
| 1864 . . . | 4.807.440 | 177.685 | 147.673 | 41.270 | 27 | 32 | 117 |
| 1865 . . . | 4.832.393 | 179.690 | 145.371 | 40.600 | 27 | 33 | 118 |
| 1866 . . . | 4.824.421 | 181.369 | 141.969 | 43.578 | 27 | 34 | 110 |

## Бельгія.

| Годъ. | Населеніе (среднее годовое). | Рожденія | Смертн. случаи. | Браки. | 1 рожденіе | 1 смертн. случай. | 1 бракъ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1841 . . . | 4.138.382 | 138.135 | 97.108 | 29.876 | 30 | 43 | 139 |
| 1842 . . . | 4.172.706 | 135.027 | 103.068 | 29.023 | 31 | 41 | 144 |
| 1843 . . . | 4.213.863 | 132.911 | 97.055 | 28.220 | 32 | 43 | 149 |
| 1844 . . . | 4.258.426 | 133.976 | 94.911 | 29.326 | 32 | 45 | 145 |
| 1845 . . . | 4.298.562 | 137.012 | 97.783 | 29.210 | 31 | 44 | 147 |
| 1846 . . . | 4.337.048 | 119.610 | 107.835 | 25.670 | 36 | 40 | 169 |
| 1847 . . . | 4.338.447 | 118.106 | 120.168 | 24.145 | 37 | 36 | 180 |
| 1848 . . . | 4.359.090 | 120.383 | 108.287 | 28.656 | 36 | 40 | 152 |
| 1849 . . . | 4.380.239 | 133.105 | 121.462 | 31.788 | 33 | 36 | 138 |
| 1850 . . . | 4.426.202 | 131.416 | 92.820 | 33.762 | 34 | 48 | 131 |
| 1851 . . . | 4.473.175 | 134.248 | 96.699 | 33.169 | 33 | 47 | 135 |
| 1852 . . . | 4.516.361 | 134.397 | 95.971 | 31.251 | 34 | 47 | 145 |
| 1853 . . . | 4.548.507 | 127.728 | 100.333 | 30.636 | 36 | 46 | 148 |
| 1854 . . . | 4.584.932 | 131.837 | 103.266 | 29.490 | 35 | 44 | 156 |
| 1855 . . . | 4.607.066 | 125.955 | 112.716 | 29.818 | 37 | 41 | 155 |
| 1856 . . . | 4.529.461 | 134.187 | 97.395 | 32.926 | 34 | 47 | 138 |
| 1857 . . . | 4.577.236 | 143.291 | 103.458 | 37.292 | 31 | 44 | 123 |
| 1858 . . . | 4.623.197 | 145.074 | 107.910 | 38 237 | 32 | 43 | 121 |
| 1859 . . . | 4.671.187 | 149.812 | 111.650 | 36.941 | 31 | 42 | 126 |
| 1860 . . . | 4.731.996 | 144.668 | 92.871 | 35.112 | 33 | 51 | 135 |
| 1861 . . . | 4.782.256 | 147.253 | 106.381 | 33.802 | 33 | 45 | 142 |
| 1862 . . . | 4.836.566 | 145.568 | 100.124 | 34.146 | 33 | 48 | 142 |
| 1863 . . . | 4.893.021 | 155.564 | 107.959 | 35.813 | 32 | 45 | 137 |
| 1864 . . . | 4.940.570 | 155.872 | 115.948 | 36.959 | 32 | 43 | 134 |
| 1865 . . . | 4.984.451 | 156.323 | 122.341 | 37.671 | 32 | 41 | 132 |
| 1866 . . . | 4.984.351 | 158.010 | 151.116 | 37.783 | 31 | 33 | 132 |

## Данія.

| Годъ. | Населеніе. | Рожденія (съ мертворожденными) | Смертн. случаи (съ мертворожденными) | Браки. | Число населенія на: 1 рожденіе | 1 смертн. случай. | 1 бракъ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1855 . . . | 2.468.713 | 82.183 | 52.872 | 20.323 | 30 | 47 | 121 |
| 1856 . . . | 2.502.791 | 83.658 | 50.192 | 21.007 | 30 | 50 | 119 |
| 1857 . . . | 2.536.869 | 85.875 | 59.751 | 21.886 | 30 | 42 | 111 |
| 1858 . . . | 2.570.947 | 87.463 | 59.883 | 21.667 | 29 | 43 | 119 |
| 1859 . . . | 2.605.024 | 89.186 | 56.573 | 21 390 | 29 | 46 | 121 |

## Испанія.

| Годъ. | Населеніе. | Рожденія | Смертн. случаи. | Браки. | Число населенія на: 1 рожденіе. | 1 смертн. случай. | 1 бракъ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1861 . . . | 15.857.359 | 601.609 | 417.786 | — | 26 | 38 | — |
| 1862 . . . | 16.033.758 | 607.062 | 430.663 | — | 26 | 40 | — |
| 1863 . . . | 16.170.238 | 598.141 | 461.661 | — | 27 | 35 | — |
| 1864 . . . | 16.292.203 | 621.451 | 499.486 | — | 26 | 33 | — |
| 1865 . . . | 16.368.536 | 614.913 | 538.580 | — | 27 | 34 | — |
| 1866 . . . | 16.516.949 | 611.697 | 463.284 | — | 27 | 36 | — |

## Франція.

| Годъ. | Населеніе. | Рожденія (не считая мертворожденныхъ) | Смертн. случаи (не считая мертворожденныхъ) | Браки. | Число населенія на: 1 рожденіе. | 1 смертн. случай. | 1 бракъ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1830 . . . | 32.358.490 | 968.000 | 775.618 | 270.900 | 33 | 42 | 119 |
| 1831 . . . | 32 569 225 | 986.843 | 767.009 | 246.268 | 33 | 42 | 132 |
| 1832 . . . | 32.763.562 | 937.434 | 902.052 | 242.238 | 35 | 36 | 136 |
| 1833 . . . | 32.957.899 | 970.178 | 779.621 | 264.061 | 34 | 42 | 125 |
| 1834 . . . | 33.152.236 | 986.490 | 884.619 | 271.397 | 34 | 37 | 122 |

| Годъ. | Населеніе | Рожденія | Смертн. случаи. | Браки. | Число населенія на: | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | не считая мертворожденныхъ. | | | 1 рожденіе. | 1 смертн. случай. | 1 бракъ. |
| 1835 . . . | 33 346.573 | 993.833 | 782.755 | 275.508 | 34 | 43 | 121 |
| 1836 . . . | 33.540.910 | 979.746 | 747.668 | 274.145 | 34 | 45 | 122 |
| 1837 . . . | 33.678.764 | 943.741 | 853.071 | 266.843 | 36 | 39 | 126 |
| 1838 . . . | 33.816.618 | 963.099 | 817.501 | 273.329 | 35 | 41 | 124 |
| 1839 . . . | 33.954.472 | 958.189 | 771.859 | 267.174 | 35 | 44 | 127 |
| 1840 . . . | 33.692.326 | 952.387 | 808.989 | 283.338 | 35 | 41 | 117 |
| 1841 . . . | 34.230.178 | 976.753 | 794.908 | 282.370 | 35 | 43 | 121 |
| 1842 . . . | 34.464.240 | 982.990 | 825.938 | 280.584 | 35 | 42 | 123 |
| 1843 . . . | 34.698.302 | 978.396 | 799.008 | 285.463 | 35 | 43 | 122 |
| 1844 . . . | 34.932.374 | 959.484 | 768.026 | 279.782 | 36 | 45 | 125 |
| 1845 . . . | 35.166.426 | 982 527 | 741.985 | 283.238 | 36 | 47 | 124 |
| 1846 . . . | 35.400.486 | 965.866 | 820.918 | 268.307 | 37 | 43 | 132 |
| 1847 . . . | 35 477.023 | 901.861 | 849.054 | 249.625 | 39 | 42 | 142 |
| 1848 . . . | 35.553.560 | 940.156 | 836.693 | 293.552 | 38 | 42 | 121 |
| 1849 . . . | 35.630.097 | 985.848 | 973.471 | 278.903 | 36 | 37 | 128 |
| 1850 . . . | 35.706.634 | 954.240 | 761.610 | 297.700 | 37 | 47 | 120 |
| 1851 . . . | 35.783.170 | 971.271 | 799.137 | 286.884 | 37 | 45 | 124 |
| 1852 . . . | 36.004.085 | 964.959 | 810.737 | 281.460 | 37 | 44 | 128 |
| 1853 . . . | 36.225.000 | 936.967 | 795.607 | 280.609 | 39 | 46 | 129 |
| 1854 . . . | 35.910.496 | 923.461 | 992.779 | 270.896 | 39 | 36 | 133 |
| 1855 . . . | 35.974.930 | 902.336 | 937.942 | 283 335 | 40 | 38 | 127 |
| 1856 . . . | 36.139.364 | 952.116 | 837.082 | 284.401 | 38 | 43 | 127 |
| 1857 . . . | 36.154 398 | 940.709 | 858.785 | 295.510 | 38 | 42 | 122 |
| 1858 . . . | 36.236.322 | 969.343 | 874.186 | 307.056 | 37 | 41 | 118 |
| 1859 . . . | 36.331.642 | 1.017.896 | 979.333 | 298.417 | 36 | 37 | 122 |
| 1860 . . . | 36.522.404 | 956,875 | 781.635 | 288.936 | 38 | 47 | 126 |
| 1861 . . . | 37.386.313 | 1.005.078 | 866.597 | 305.203 | 37 | 43 | 122 |
| 1862 . . . | 37.521.486 | 995.167 | 812.978 | 303.514 | 38 | 46 | 124 |
| 1863 . . . | 37.657.134 | 1.012.794 | 846.917 | 301.376 | 37 | 44 | 125 |
| 1864 . . . | 37.793.278 | 1.005.880 | 860.330 | 299.579 | 38 | 44 | 126 |
| 1865 . . . | 37.929.918 | 1.006.753 | 921.887 | 298.838 | 38 | 41 | 127 |
| 1866 . . . | 38.067.064 | 994.288 | 885.559 | 301.390 | 38 | 43 | 126 |

## Ганноверъ.

| Годъ. | Населеніе. | Рожденія | Смертн. случаи. | Браки. | Число населенія на: 1 рожденіе. | 1 смертн. случай. | 1 бракъ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1854 . . . | 1.811.711* | 57.154 | 41.509 | 14.691 | 32 | 44 | 123 |
| 1855 . . . | 1.819.777 | 57.662 | 43.359 | 14.428 | 31 | 42 | 126 |
| 1856 . . . | 1.827.843* | 58.826 | 39.199 | 14.745 | 31 | 47 | 124 |
| 1857 . . . | 1.835.910* | 60.874 | 45.552 | 15.665 | 30 | 40 | 117 |
| 1858 . . . | 1.843.976 | 62.987 | 44.189 | 16.204 | 29 | 42 | 114 |
| 1859 . . . | 1.858.674* | 64.935 | 41.670 | 15.727 | 29 | 45 | 118 |
| 1860 . . . | 1.873.372* | 62.835 | 40.698 | 16.159 | 30 | 46 | 116 |
| 1861 . . . | 1.888.070 | 63.241 | 42.051 | 15.426 | 30 | 45 | 123 |
| 1862 . . . | 1.899.877* | 60.232 | 40.339 | 15.460 | 32 | 47 | 123 |
| 1863 . . . | 1.911.685* | 65.914 | 39.847 | 15.807 | 29 | 48 | 121 |
| 1864 . . . | 1.923.492 | 65.283 | 43.765 | 15.494 | 30 | 44 | 124 |

*) Числа, помѣченныя звѣздочкой, получены при помощи интерполяціи.

## **Италія** (безъ Венеціи).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1862 . . . | 21.880.745 | 814.102 | 662.260 | 176.897 | 27 | 33 | 124 |
| 1863 . . . | 22.047.034 | 862.390 | 686.777 | 179.136 | 26 | 32 | 123 |
| 1864 . . . | 22.291.180 | 845.454 | 659.063 | 177.382 | 26 | 34 | 126 |
| 1865 . . . | 21.483.663 | 865.387 | 672.897 | 205.651 | 26 | 33 | 109 |
| 1866 . . . | 23.703.135 | 876.917 | 657.452 | 120.752* | 27 | 36 | 196 |

*) Новый законъ относительно браковъ является причиной большихъ пробѣловъ.

## Нидерланды.

| Годъ. | Населеніе. | Рожденія | Смертн. случаи. | Браки. | Число населенія на: | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | считая мертворожденныхъ. | | | 1 рожденіе. | 1 смертн. случай. | 1 бракъ |
| 1840 . . . | 2.893.716 | 105.880 | 72.840 | 20.889 | 27 | 40 | 129 |
| 1841 . . . | 2.930.950 | 108.326 | 72.762 | 21.727 | 27 | 40 | 133 |
| 1842 . . . | 2.957.280 | 105.629 | 80.939 | 21.064 | 28 | 37 | 139 |
| 1843 . . . | 2.988.711 | 105.350 | 73.615 | 21.212 | 28 | 41 | 139 |
| 1844 . . . | 3.019.736 | 108.598 | 77.523 | 22.381 | 28 | 39 | 134 |
| 1845 . . . | 3.052.830 | 109.324 | 75.638 | 22.854 | 28 | 40 | 132 |
| 1846 . . . | 3.061.069 | 100.702 | 91.930 | 20.633 | 30 | 33 | 148 |
| 1847 . . . | 3.049.685 | 91.670 | 99.458 | 19.280 | 33 | 31 | 159 |
| 1848 . . . | 3.054.529 | 96.617 | 93.874 | 21.906 | 32 | 33 | 139 |
| 1849 . . . | 3.056.591 | 109.932 | 100.937 | 25.081 | 28 | 30 | 122 |
| 1850 . . . | 3.073.517 | 110.919 | 73.200 | 27.386 | 28 | 42 | 112 |
| 1851 . . . | 3.119.160 | 113.036 | 74.557 | 26.768 | 28 | 42 | 117 |
| 1852 . . . | 3.168.006 | 115.745 | 80.287 | 25.530 | 27 | 39 | 124 |
| 1853 . . . | 3.203.232 | 109.810 | 82.928 | 24.487 | 29 | 39 | 131 |
| 1854 . . . | 3.238.753 | 109.563 | 81.794 | 23.855 | 30 | 40 | 136 |
| 1855 . . . | 3.261.227 | 108.191 | 95.578 | 23.367 | 30 | 34 | 140 |
| 1856 . . . | 3.298.137 | 111.553 | 81.690 | 24.509 | 30 | 40 | 135 |
| 1857 . . . | 3.328.795 | 119.489 | 93.688 | 25.950 | 28 | 36 | 128 |
| 1858 . . . | 3.348.747 | 112.898 | 97.977 | 26.342 | 30 | 34 | 127 |
| 1859 . . . | 3.291.281 | 122.092 | 109.590 | 27.007 | 27 | 30 | 122 |
| 1860 . . . | 3.336.429 | 111.742 | 88.440 | 27.108 | 30 | 38 | 123 |
| 1861 . . . | 3.373.033 | 125.023 | 91.475 | 27.108 | 27 | 37 | 124 |
| 1862 . . . | 3.410.350 | 118.846 | 86.900 | 26.541 | 29 | 39 | 129 |
| 1863 . . . | 3.453.425 | 131.575 | 88.881 | 28.419 | 26 | 39 | 122 |
| 1864 . . . | 3.493.611 | 130.698 | 94.669 | 29.154 | 27 | 37 | 120 |
| 1865 . . . | 3.529.107 | 133.854 | 98.134 | 29.806 | 26 | 36 | 118 |
| 1866 . . . | 3.552.575 | 132.189 | 108.790 | 29.620 | 26 | 35 | 120 |

## Пруссія.

| Годъ. | Населеніе. | Рожденія | Смертн. случаи. | Браки. | Число населенія на: 1 рожденіе. | 1 смертн. случай. | 1 бракъ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1844 . . . | 15.690.433 | 598.757 | 379.408 | 141.047 | 26 | 41 | 111 |
| 1845 . . . | 15.904.737 | 622.757 | 408.453 | 141.439 | 26 | 39 | 112 |
| 1846 . . . | 16.112.938 | 602.409 | 449.134 | 138.427 | 27 | 36 | 116 |
| 1847 . . . | 16.184.050 | 561.392 | 490.280 | 125.004 | 29 | 33 | 129 |
| 1848 . . . | 16.319.245 | 554.620 | 519.425 | 133.142 | 29 | 31 | 123 |
| 1849 . . . | 16.331.187 | 664.923 | 472.223 | 148.892 | 25 | 35 | 110 |
| 1850 . . . | 16.552.336 | 660.134 | 428.985 | 155.763 | 25 | 39 | 106 |
| 1851 . . . | 16.784.427 | 648.427 | 416.800 | 153.436 | 26 | 40 | 110 |
| 1852 . . . | 16.935.420 | 647.168 | 530.660 | 143.028 | 26 | 32 | 118 |
| 1853 . . . | 17.073.346 | 633.018 | 495.092 | 145.345 | 27 | 34 | 117 |

## Швеція.

| Годъ. | Населеніе. | Рожденія (не считая мертворожденныхъ.) | Смертн. случаи. (не считая мертворожденныхъ.) | Браки. | Число населенія на: 1 рожденіе. | 1 смертн. случай. | 1 бракъ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1748 . . . | 1.736.482 | — | — | — | — | — | — |
| 1749 . . . | 1.746.449 | 59.483 | 49.516 | 15.046 | 30 | 35 | 116 |
| 1750 . . . | 1.763.338 | 64.511 | 47.622 | 16.374 | 27 | 37 | 110 |
| 1751 . . . | 1.785.727 | 69.291 | 46.902 | 16.599 | 26 | 38 | 105 |
| 1752 . . . | 1.799.188 | 64.973 | 49.467 | 16.761 | 28 | 37 | 106 |
| 1753 . . . | 1.819.245 | 66.007 | 43.905 | 15.923 | 28 | 41 | 114 |
| 1754 . . . | 1.837.314 | 68.759 | 48.645 | 17.457 | 27 | 37 | 108 |
| 1755 . . . | 1.853.689 | 70.008 | 51.090 | 17.097 | 27 | 36 | 109 |
| 1756 . . . | 1.867.070 | 67.987 | 52.062 | 16.005 | 27 | 36 | 117 |
| 1757 . . . | 1.870.372 | 61.675 | 55.829 | 15.078 | 30 | 33 | 125 |
| 1758 . . . | 1.867.699 | 63.262 | 60.527 | 15.273 | 30 | 31 | 124 |
| 1759 . . . | 1.876.994 | 63.865 | 49.162 | 18.529 | 29 | 38 | 99 |
| 1760 . . . | 1.893.248 | 68.384 | 46.721 | 18.705 | 28 | 40 | 100 |
| 1761 . . . | 1.916.848 | 67.324 | 49.143 | 18.253 | 29 | 39 | 106 |
| 1762 . . . | 1.930.541 | 68.268 | 59.994 | 17.428 | 28 | 32 | 114 |
| 1763 . . . | 1.940.011 | 68.231 | 64.180 | 16.850 | 29 | 30 | 114 |
| 1764 . . . | 1.954.077 | 67.988 | 53.364 | 17.219 | 29 | 37 | 115 |
| 1765 . . . | 1.964.824 | 65.872 | 54.566 | 16.066 | 30 | 36 | 123 |
| 1766 . . . | 1.981.600 | 67.061 | 49.726 | 16.419 | 30 | 40 | 124 |
| 1767 . . . | 1.997.447 | 70.744 | 51.272 | 16.539 | 28 | 39 | 117 |

| Годъ. | Населеніе. | Рожденія | Смертн. случаи. | Браки. | Число населенія на: | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | не считая мертворожденныхъ. | | | 1 рожденія. | 1 смертн. случай. | 1 бракъ. |
| 1768 . . . | 2.006.790 | 67.719 | 54.751 | 17.039 | 30 | 36 | 118 |
| 1769 . . . | 2.015.127 | 66.954 | 54.991 | 16.463 | 30 | 37 | 126 |
| 1770 . . . | 2.030.574 | 67.172 | 53.071 | 16.587 | 30 | 38 | 119 |
| 1771 . . . | 2.041.081 | 65.988 | 56.827 | 15.873 | 31 | 36 | 128 |
| 1772 . . . | 2.025.037 | 58.972 | 76,362 | 13.928 | 34 | 27 | 145 |
| 1773 . . . | 1.972.407 | 51.164 | 105.139 | 15.560 | 39 | 19 | 123 |
| 1774 . . . | 1.997.809 | 68.520 | 44.463 | 17.433 | 29 | 45 | 118 |
| 1775 . . . | 2.020.847 | 71.642 | 49.949 | 19.002 | 28 | 40 | 106 |
| 1776 . . . | 2.041.289 | 66.869 | 45.692 | 18.310 | 30 | 44 | 113 |
| 1777 . . . | 2.057.147 | 67.693 | 51.096 | 18.577 | 30 | 40 | 108 |
| 1778 . . | 2.073.296 | 71.901 | 55.028 | 18.692 | 29 | 38 | 109 |
| 1779 . . . | 2.089.624 | 76.387 | 59.325 | 18.035 | 28 | 35 | 116 |
| 1780 . . . | 2.118.281 | 75.122 | 45.731 | 17.938 | 28 | 46 | 118 |
| 1781 . . . | 2.132.912 | 71.130 | 54.313 | 16.638 | 30 | 39 | 125 |
| 1782 . . . | 2.140.986 | 68.488 | 58.247 | 16.415 | 32 | 37 | 134 |
| 1783 . . . | 2.143.570 | 64.969 | 60.213 | 17.124 | 33 | 36 | 126 |
| 1784 . . . | 2.145.213 | 67.605 | 63.792 | 16.031 | 32 | 34 | 134 |
| 1785 . . . | 2.149.773 | 67.497 | 60.770 | 16.791 | 32 | 35 | 126 |
| 1786 . . . | 2.156.109 | 70.935 | 55.951 | 17.297 | 30 | 39 | 127 |
| 1787 . . . | 2.163.812 | 68.328 | 51.998 | 17.253 | 32 | 42 | 127 |
| 1788 . . . | 2.171.866 | 74.019 | 57.320 | 17.235 | 29 | 38 | 128 |
| 1789 . . . | 2.163.765 | 70.127 | 69.583 | 17.369 | 31 | 31 | 127 |
| 1790 . . . | 2.158.232 | 66.710 | 63.598 | 18.063 | 32 | 34 | 120 |
| 1791 . . | 2.178.719 | 71.613 | 55.946 | 23.786 | 30 | 39 | 91 |
| 1792 . . . | 2.211.643 | 81.063 | 52.958 | 22.191 | 27 | 42 | 101 |
| 1793 . . . | 2.239.119 | 77.033 | 54 376 | 19.934 | 29 | 41 | 112 |
| 1794 . . . | 2.266.990 | 76.429 | 53.377 | 18.509 | 30 | 43 | 119 |
| 1795 . . . | 2.281.137 | 72.947 | 63.619 | 17.279 | 31 | 36 | 134 |
| 1796 . . . | 2.300.793 | 79.446 | 56.474 | 19.747 | 29 | 41 | 115 |
| 1797 . . . | 2.3 2.814 | 80.374 | 55.036 | 19.523 | 29 | 42 | 116 |
| 1798 . . . | 2.344.228 | 78.593 | 53.862 | 19.349 | 30 | 43 | 123 |
| 1799 . . . | 2.356.993 | 75.274 | 59.192 | 17.283 | 31 | 40 | 139 |
| 1800 . . . | 2.347.303 | 67.555 | 73.928 | 17.528 | 34 | 32 | 130 |
| 1801 . . . | 2.356.027 | 70.629 | 61.317 | 17.057 | 33 | 39 | 139 |
| 1802 . . . | 2.374.358 | 74.963 | 56.035 | 18.500 | 32 | 42 | 132 |
| 1803 . . . | 2.391.837 | 74.644 | 56.577 | 19.491 | 32 | 42 | 126 |
| 1804 . . . | 2.408.108 | 76.443 | 59.584 | 19.335 | 32 | 40 | 127 |
| 1805 . . . | 2.427.408 | 76.552 | 56.663 | 20.197 | 32 | 43 | 121 |
| 1806 . . . | 2.428.729 | 74.581 | 65.728 | 19.492 | 32 | 37 | 128 |
| 1807 . . . | 2.434.721 | 75.842 | 62.318 | 19.959 | 32 | 39 | 122 |
| 1808 . . . | 2.418.840 | 73.963 | 82.311 | 19.762 | 33 | 29 | 121 |
| 1809 . . . | 2.382.075 | 64.300 | 93.532 | 18.817 | 37 | 25 | 125 |
| 1810 . . . | 2.377.851 | 78.916 | 75.607 | 25.780 | 30 | 31 | 91 |
| 1811 . . . | 2.396.581 | 84.862 | 69.246 | 25.615 | 28 | 35 | 92 |
| 1812 . . . | 2.407.679 | 81.079 | 73.095 | 22.054 | 30 | 33 | 109 |
| 1813 . . . | 2.416.548 | 72.021 | 66.266 | 18.745 | 34 | 37 | 127 |
| 1814 . . . | 2.434.541 | 75.837 | 60.959 | 18.281 | 32 | 40 | 135 |

| Годъ. | Населеніе. | Рожденія (не считая мертворожденныхъ) | Смертн. случаи (не считая мертворожденныхъ) | Браки. | Число населенія на: 1 рожденіе. | 1 смертн. случай. | 1 бракъ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1815 . . . | 2.465.066 | 85 239 | 57.829 | 23.553 | 29 | 42 | 103 |
| 1816 . . . | 2.497.484 | 87.644 | 56.225 | 23.069 | 28 | 45 | 109 |
| 1817 . . . | 2.521.442 | 83.821 | 60.863 | 20.938 | 30 | 41 | 120 |
| 1818 . . . | 2.546.411 | 85.714 | 61.745 | 21.427 | 30 | 41 | 121 |
| 1819 . . . | 2.561.780 | 84.250 | 69.881 | 20.795 | 30 | 37 | 122 |
| 1820 . . . | 2.584.690 | 84.841 | 62.930 | 21.722 | 30 | 41 | 117 |
| 1821 . . . | 2.610.870 | 92.072 | 66.416 | 22.890 | 28 | 40 | 114 |
| 1822 . . . | 2.646.314 | 94.309 | 59.390 | 24.431 | 28 | 45 | 110 |
| 1823 . . . | 2.689.031 | 98.259 | 56.067 | 23.993 | 27 | 48 | 112 |
| 1824 . . . | 2.726.877 | 93.577 | 56.256 | 23.907 | 29 | 49 | 114 |
| 1825 . . . | 2.771.252 | 100.315 | 56.465 | 23.640 | 28 | 49 | 115 |
| 1826 . . . | 2.804.926 | 97.125 | 63.027 | 22.525 | 29 | 45 | 122 |
| 1827 . . . | 2.827.719 | 88.138 | 64.920 | 20.339 | 32 | 43 | 141 |
| 1828 . . . | 2.846.788 | 95.354 | 75.860 | 22.440 | 30 | 37 | 129 |
| 1829 . . . | 2.863.132 | 99.488 | 82.719 | 22.581 | 29 | 34 | 124 |
| 1830 . . . | 2.888.082 | 94.626 | 69.251 | 22.222 | 30 | 42 | 131 |
| 1831 . . . | 2.901.039 | 88.253 | 75.274 | 19.983 | 33 | 39 | 145 |
| 1832 . . . | 2.922.801 | 89.862 | 68.078 | 20.935 | 32 | 43 | 139 |
| 1833 . . . | 2.959.141 | 100.309 | 63.947 | 23.029 | 30 | 46 | 129 |
| 1834 . . . | 2.983.055 | 100.231 | 76 294 | 23.803 | 30 | 39 | 124 |
| 1835 . . . | 3.025.439 | 98 144 | 55 738 | 22.533 | 31 | 54 | 132 |
| 1836 . . . | 3.059.356 | 96.857 | 60.763 | 21.816 | 31 | 50 | 139 |
| 1837 . . . | 3.076.184 | 94.616 | 75.611 | 21.153 | 32 | 40 | 146 |
| 1838 . . . | 3.090 262 | 90.565 | 74.309 | 18.774 | 34 | 42 | 163 |
| 1839 . . . | 3.106.459 | 91.363 | 72.988 | 20.963 | 34 | 43 | 148 |
| 1840 . . . | 3.138.887 | 98.160 | 63.555 | 22 071 | 32 | 49 | 143 |
| 1841 . . . | 3.173.160 | 95.734 | 61.279 | 22.519 | 33 | 52 | 138 |
| 1842 . . . | 3.206.776 | 100.976 | 67.177 | 22.691 | 32 | 48 | 139 |
| 1843 . . . | 3.236.632 | 99.154 | 69.115 | 23.167 | 33 | 47 | 141 |
| 1844 . . . | 3.275.133 | 104.693 | 66.009 | 24.208 | 31 | 50 | 136 |
| 1845 . . . | 3.316.536 | 103.660 | 62.074 | 24.009 | 32 | 53 | 138 |
| 1846 . . . | 3.342.927 | 99.703 | 72.683 | 22.981 | 33 | 46 | 145 |
| 1847 . . . | 3.362.072 | 99.179 | 79.405 | 28.858 | 34 | 43 | 116 |
| 1848 . . . | 3.397.454 | 102.524 | 66.513 | 24.729 | 33 | 51 | 137 |
| 1849 . . . | 3.441.286 | 112.304 | 67.842 | 26.891 | 31 | 51 | 128 |
| 1850 . . . | 3.482.541 | 110.399 | 68.514 | 26.267 | 32 | 51 | 138 |
| 1851 . . . | 3.517.759 | 111.065 | 72.506 | 25.750 | 32 | 49 | 137 |
| 1852 . . . | 3.540.421 | 108.305 | 80.090 | 24.150 | 33 | 44 | 147 |
| 1853 . . . | 3.562.543 | 111.407 | 84.047 | 25.596 | 32 | 42 | 139 |
| 1854 . . . | 3.605.321 | 120 107 | 70.846 | 27.585 | 30 | 51 | 131 |
| 1855 . . . | 3.641.011 | 115.072 | 77.734 | 27.253 | 32 | 47 | 134 |
| 1856 . . . | 3.672 988 | 115.082 | 79.618 | 27.221 | 32 | 46 | 135 |
| 1857 . . . | 3.687.601 | 119.349 | 101.491 | 28.531 | 31 | 36 | 129 |
| 1858 . . . | 3.734 240 | 129.039 | 80.498 | 30 092 | 29 | 46 | 124 |
| 1859 . . . | 3.787.735 | 131.605 | 75.720 | 31.125 | 29 | 50 | 122 |
| 1860 . . . | 3.859.728 | 133.162 | 67.502 | 29.839 | 29 | 57 | 129 |
| 1861 . . . | 3.917.339 | 126.634 | 71.829 | 28.272 | 31 | 55 | 139 |

| Годъ. | Населеніе. | Рожденія | Смертн. случаи. | Браки. | Число населенія на: | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | не считая мертворожденныхъ. | | | 1 рожденіе. | 1 смертн. случай. | 1 бракъ. |
| 1862 . . . | 3.965.899 | 131.584 | 84.350 | 27.825 | 30 | 47 | 143 |
| 1863 . . . | 4.022.564 | 134.279 | 77.227 | 29.013 | 30 | 52 | 139 |
| 1864 . . . | 4.070.061 | 136.004 | 81.937 | 28.248 | 30 | 50 | 144 |
| 1865 . . | 4.114 141 | 134.281 | 79.216 | 28.944 | 31 | 52 | 142 |
| 1866 . . . | 4.160.677 | 136.989 | 82.666 | 27.797 | 30 | 50 | 150 |
| 1867 . . . | 4.195.681 | 128.832 | 82.072 | 25.440 | 33 | 51 | 165 |

## Краткій перечень.

| Страны. | Эпохи. | Число лѣтъ. | Число населенія на: 1 рожденіе. | 1смертный случ. | 1 бракъ |
|---|---|---|---|---|---|
| Англія . . . . . . . . | съ 1838 по 1866 | 29 | 30 | 45 | 121 |
| Англія съ Уэльсомъ . . | „ 1852 „ 1866 | 15 | 29 | 45 | 118 |
| Шотландія . . . . . . | „ 1855 „ 1866 | 12 | 29 | 46 | 142 |
| Ирландія *) . . . . . . | „ 1864 „ 1866 | 3 | 41 | 60 | 193 |
| Австрія . . . . . . . . | „ 1853 „ 1866 | 14 | 25 | 31 | 121 |
| Баварія . . . . . . . . | „ 1835 „ 1866 | 32 | 29 | 35 | 148 |
| Бельгія . . . . . . . . | „ 1841 „ 1866 | 26 | 33 | 43 | 142 |
| Данія . . . . . . . . . | „ 1855 „ 1859 | 5 | 30 | 46 | 118 |
| Испанія . . . . . . . | „ 1861 „ 1866 | 6 | 26 | 36 | „ |
| Франція . . . . . . . | „ 1830 „ 1866 | 37 | 36 | 42 | 125 |
| Италія . . . . . . . . | „ 1862 „ 1866 | 5 | 26 | 34 | 136 |
| Нидерланды . . . . . . | „ 1840 „ 1866 | 27 | 28 | 37 | 130 |
| Пруссія . . . . . . . . | „ 1844 „ 1853 | 10 | 27 | 36 | 115 |
| Швеція . . . . . . . . | „ 1748 „ 1867 | 120 | 31 | 41 | 129 |
| Общая средняя . . . . . . . . . . . . . . . . . . | | | 30,3 | 41,6 | 133,7 |
| Максимумъ . . . . . . . . . . . . . . . . . . | | | 25,0 | 31,0 | 115,0 |
| Минимумъ . . . . . . . . . . . . . . . . . . | | | 41,0 | 60,0 | 193,0 |

*) Ирландія могла бы быть исключена изъ предыдущей таблицы: эта несчастная страна потеряла большое количество своего населенія въ теченіе послѣднихъ лѣтъ; свѣдѣнія за 1864—1866 г. могли бы быть исключены также, какъ это было сдѣлано нами въ таблицѣ на стр. 213 Списки о населеніи, рожденіяхъ, смертяхъ и бракахъ были составлены послѣ справки о постоянномъ населеніи передъ эпохой его быстраго уменьшенія, какъ можно видѣть на стр. 118, гдѣ указано количество населенія, сначала возрастающее съ 1820 по 1840, а затѣмъ убывающее съ 1840 по 1860 и спустившееся съ 8.175.124 душъ до 5.798.758.

# ТЕОРІЯ ШАНСОВЪ И СТАТИСТИЧЕСКИХЪ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

Прежде чѣмъ начать изслѣдованіе по методу всѣхъ наблюдательныхъ наукъ, а статистики въ особенности, необходимо вкратцѣ припомнить основы теоріи вѣроятностей.

## I. Число шансовъ извѣстно.

Различные случаи, могущіе породить то или другое событіе, называются *шансами* этого событія. Такъ, появленіе какой-нибудь задуманной карты при вытягиваніи ее наугадъ изъ колоды представляетъ обыкновенно тридцать два шанса, потому что можетъ быть вытянута всякая изъ тридцати двухъ картъ, составляющихъ всю колоду картъ.

Когда природа изслѣдуемаго событія извѣстна, можетъ быть два рода шансовъ: одни благопріятныя и другія неблагопріятныя изучаемому событію. Такимъ образомъ тотъ, кто хочетъ взять фигуру изъ колоды тридцати двухъ картъ, имѣетъ двѣнадцать благопріятныхъ шансовъ, а двадцать неблагопріятныхъ. Если всѣ шансы благопріятны, ихъ совокупность создаетъ достовѣрность.

Если только нѣкоторые шансы неблагопріятны наступленію событія, то можно съ увѣренностью сказать, что это событіе вѣроятно, и что оно только возможно или мало вѣроятно—тогда, когда число неблагопріятныхъ шансовъ больше числа благопріятныхъ.

Понятно, что не всѣ событія одинако вѣроятны. Считаютъ математической вѣроятностью число, полученное отъ дѣленія числа благопріятныхъ шансовъ даннаго событія на общее число шансовъ. Согласно этому принципу тиражъ одной фигуры изъ колоды въ тридцать двѣ карты будетъ имѣть вѣроятностью дробь $\frac{12}{32}$; двѣнадцать благопріятныхъ шансовъ приходится здѣсь на общее число тридцати двухъ шансовъ.

Неблагопріятная вѣроятность событія считается такимъ же образомъ, т. е. число неблагопріятныхъ шансовъ дѣлится на общее число шансовъ. Такимъ образомъ въ предыдущемъ примѣрѣ неблагопріятная вѣроятность событія выразится дробью $\frac{20}{32}$.

Вообще, въ каждомъ недостовѣрномъ событіи имѣютъ мѣсто двѣ противоположныя вѣроятности: та — что событіе наступитъ, и та, что оно не наступитъ: сумма этихъ двухъ вѣроятностей должна равняться единицѣ. Такимъ образомъ, единица является символомъ достовѣрности.

Приложеніе теоріи вѣроятностей почти не представляло бы трудности, если бы можно было всегда сосчитать различные возможные шансы, и если бы всѣ шансы были строго тѣ же самые. Но это не такъ, и въ извѣстныхъ случаяхъ надо много проницательности, чтобы не сдѣлать грубыхъ ошибокъ въ оцѣнкѣ этихъ шансовъ. Изъ всѣхъ игръ самая простая конечно, это „орелъ и рѣшетка", потому что тутъ только два возможныхъ шанса: монета обязательно должна упасть на ту или другую изъ своихъ сторонъ. Вѣроятность каждаго изъ этихъ двухъ событій равна $\frac{1}{2}$. Между тѣмъ, если бы монета не была однородна, если бы она была сдѣлана такъ, что на одну сторону она падала бы легче, чѣмъ на другую, то очевидно, что двѣ вѣроятности не могли бы быть представлены въ видѣ дроби $\frac{1}{2}$. Напримѣръ, если бы монета была сдѣлана такъ, что она правильно бы падала два раза на одну сторону, тогда какъ на другую она падала бы одинъ разъ, то можно было бы разсматривать паденіе монеты тою или другою стороною, какъ представляющее три возможныхъ шанса, изъ которыхъ два приходятся на одну сторону и одинъ на другую; относительныя вѣроятности были бы $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

Обманщики-игроки иногда получаютъ большіе выигрыши, играя поддѣльными костями. Когда кость съ шестью сторонами хорошо сдѣлана, она должна одинаково легко падать на каждую изъ своихъ сторонъ: напримѣръ, бросаніе на одно очко, должно имѣть ту же самую вѣроятность, какъ и бросаніе на всякое другое очко. Между тѣмъ можно поддѣлать кость и по формѣ ея и по матеріалу такъ, чтобы вѣроятность выпаденія того или другого очка стала по желанію большею или меньшею. Понятно, что можно и такою костью играть, но только строго считаясь съ неравенствомъ шансовъ выпаденія каждаго очка.

## 2. Число шансовъ неизвѣстно.

Затрудненіе, которое мы встрѣчаемъ здѣсь, возобновляется каждую минуту при оцѣнкѣ вѣроятностей, относящихся къ явленіямъ природы. Затрудненіе становится еще большимъ, потому что, продолжая наше сравненіе, кость не только представляетъ неравныя стороны, но неизвѣстно даже, въ точности, сколько имѣется сторонъ.

Таковы дѣйствительно условія, какія представляетъ намъ природа, когда мы хотимъ изслѣдовать ея тайны и вычислить относительныя вѣроятности событій, которыя могутъ наступить. Часто думаютъ, что все предвидѣно, что тщательно вычислены обстоятельства, которыя могутъ представиться, и съ удивленіемъ видятъ, что наступившее событіе совсѣмъ не то, какого ждали. Тогда говорятъ, что это вышло *случайно*; но это слово означаетъ только, что мы не знали, что кость имѣетъ еще одну сторону, нами не замѣченную, на которую мы и не предполагали, что она можетъ упасть? Слово „случай“ кстати прикрываетъ наше невѣдѣніе. Мы его употребляемъ, чтобы объяснить явленія, причинъ которыхъ мы не знаемъ. Тамъ, гдѣ можно все предвидѣть, не можетъ быть случая, и событія, которыя намъ кажутся самыми необыкновенными, имѣютъ свои естественныя и необходимыя причины, какъ и событія, которыя намъ кажутся самыми обыкновенными.

Другое сравненіе, также взятое изъ теоріи игры, можетъ пролить намъ новый свѣтъ. Предположимъ, что мы имѣемъ урну, наполненную шарами, которые отличаются между собой только по цвѣту, и насъ спрашиваютъ, съ какой вѣроятностью первый вынутый шаръ будетъ бѣлымъ. Очевидно, что для того, чтобы произнести мотивированное сужденіе, намъ нужны предварительныя справки. Чтобы эти справки были полными, мы выберемъ всѣ шары изъ урны и посмотримъ, сколько находится въ ней шаровъ каждаго цвѣта. Положимъ, что тамъ находится два бѣлыхъ, три черныхъ и четыре красныхъ, всего девять шаровъ; мы должны отвѣтить, что вѣроятность того, что первый вынутый шаръ будетъ бѣлый, есть $\frac{2}{9}$.

Это вычисленіе, какъ видно, не представляетъ трудностей, когда можно съ увѣренностью знать число шаровъ, заключающихся въ урнѣ, и распредѣленіе ихъ по цвѣтамъ. Вообще въ различныхъ играхъ, которыя называютъ азартными играми, количество шансовъ ограничено, и природа ихъ извѣстна; но не такъ обстоитъ дѣло въ томъ, что относится къ наблюдательнымъ наукамъ. Урна открыта передъ нами, и намъ позволено черпать изъ нея столько, сколько мы хотимъ, и по желанію умножать опыты; но эта урна неисчерпаема, и только при помощи индукціи, мы можемъ узнать, что она въ себѣ заключаетъ.

Слѣдовательно, мы принуждены исходить изъ новыхъ соображеній, чтобы учесть вѣроятность событія, когда число шансовъ неограничено, и мы не знаемъ, какъ они распредѣлены. Это неудобство, къ несчастью, имѣетъ мѣсто въ большомъ количествѣ случаевъ, которыми мы должны заняться, т. е. при оцѣнкѣ вѣроятностей соціальныхъ и естественныхъ явленій.

Если мы прибѣгнемъ къ наукѣ, то она дастъ намъ слѣдующее правило, чтобы учесть вѣроятность повторенія событія, которое мы уже видѣли повторяющимся періодически нѣсколько разъ сряду: надо раздѣлить число, показывающее, сколько разъ событіе наблюдалось, плюсъ единица,—на то же число плюсъ двѣ единицы. Такимъ образомъ, если мы видѣли, что море поднималось періодически десять разъ сряду съ промежутками въ двѣнадцать съ половиной часовъ, то вѣроятность его поднятія въ одиннадцатый разъ будетъ $\frac{10+1}{10+2}=\frac{11}{12}$.

Теперь, когда мы видѣли, что приливъ въ теченіе ряда вѣковъ совершается правильнымъ образомъ, мы можемъ въ моментъ пониженія моря считать поднятіе водъ, которое должно за нимъ слѣдовать, такою вѣроятностью, которая почти равна достовѣрности.

Такъ что въ противоположность тому, что могли мы раньше думать, можно считать, наоборотъ, необыкновеннымъ и чудеснымъ, если море не поднимается въ часъ прилива.

Здѣсь представляется естественнымъ второй вопросъ: зависитъ ли событіе, повторявшееся нѣсколько рязъ сряду отъ одной и той же причины, или отъ совокупности извѣстнаго количества причинъ, или же, наконецъ, оно чисто случайно?

Возвращаясь къ примѣру, который мы выбрали, мы должны себя спросить: существуетъ ли одна причина или совокупность причинъ, которыя благопріятствуютъ періодическому повторенію приливовъ? И этотъ вопросъ, относительно происхожденія явленія, долженъ былъ встать въ то же время, какъ и вопросъ, который относится къ его будущему повторенію. Но этотъ вопросъ, столь естественный при любознательности людей, на который здравый смыслъ нашелъ уже приблизительный отвѣтъ, былъ рѣшенъ уже при помощи теоріи вѣроятностей.

Уже давно понимали, что чѣмъ большее число разъ проявлялось какое-либо событіе, при однихъ и тѣхъ же обстоятельствахъ, то тѣмъ вѣроятнѣе, что оно есть результатъ одной или нѣсколькихъ одновременныхъ причинъ; но эта вѣроятность представлялась еще неопредѣленною: англійскій геометръ Bayes предложилъ слѣдующее правило для опредѣленія ея цѣнности. Когда наблюдали подъ рядъ нѣсколько разъ одно и то же событіе, то вѣроятность, что существуетъ причина, которая способствуетъ повторенію его, выражается дробью, у которой знаменателемъ служитъ число 2, умноженное само на себя столько разъ, сколько разъ наблюдалось событіе, а числителемъ—то же самое произведеніе минусъ 1.

Послѣ того, какъ видѣли, что море поднималось періодически десять разъ сряду черезъ промежутки въ двѣнадцать съ половиной часовъ, если бы спросили себя, какова вѣроятность, что оно поднимется еще въ одиннадцатый разъ, то имѣли бы, какъ я уже сказалъ, $\frac{11}{12}$. Сверхъ того, согласно предыдущему принципу, вѣроятность, что существуетъ причина, которая способствуетъ повторенію этого явленія, будетъ $\frac{2047}{2048}\left(\frac{2^{11}-1}{2^{11}}\right)$.

Мы видимъ, что болѣе поводовъ вѣрить существованію одной причины, которая способствовала десять разъ кряду повторенію одного и того же событія при однихъ и тѣхъ же обстоятельствахъ, чѣмъ его будущему повторенію въ одиннадцатый разъ. Только наука позволила намъ установить это различіе; простой здравый смыслъ, какъ бы ни былъ онъ обширенъ, не могъ бы этого сдѣлать даже приблизительно. Вообще, вѣроятность, что существуетъ причина, которая способствуетъ повторенію наблюдаемаго событія нѣсколько разъ сряду, растетъ гораздо скорѣе, чѣмъ вѣроятность будущаго повторенія этого событія. Это вытекаетъ изъ тѣхъ же самыхъ формулъ, которыя служатъ для того, чтобы вычислить относительную вѣроятность.

Когда существуетъ нѣсколько родовъ шансовъ, которые могутъ повести за собой извѣстное событіе, и когда хотятъ высчитать вѣроятность каждаго изъ нихъ, то разсчеты являются довольно сложными. Къ счастью можно привести оцѣнку къ довольно простому принципу, и при многочисленности наблюденій точность страдаетъ очень мало. Вотъ этотъ принципъ: Можно разсматривать шансы благопріятные и неблагопріятные, въ такомъ же численномъ соотношеніи, какъ и тѣ наблюдаемыя событія, къ которымъ они относятся.

Я поясню это положеніе яркимъ примѣромъ: предположимъ, что передъ нами урна, содержащая значительное количество шаровъ различныхъ цвѣтовъ и требуется опредѣлить вѣроятность, съ какой первый вынутый шаръ будетъ бѣлымъ. Очевидно, что для того, чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, надо было бы знать количество шаровъ, заключающихся въ урнѣ, и ихъ цвѣта. Задача тогда была бы рѣшена a priori; но разъ этого знанія не существуетъ, то, чтобы имѣть понятіе о содержимомъ урны, я извлекаю изъ нея нѣкоторые шары: я ихъ опять кладу послѣдовательно въ урну, чтобы все привести къ первоначальнымъ условіямъ.

Если послѣ извѣстнаго числа выемокъ, я вынималъ изъ урны только бѣлые и черные шары, то я могу думать, что въ урнѣ содержатся шары только этихъ двухъ цвѣтовъ. Если я повторяю выемки въ теченіе цѣлаго дня, и если я продолжаю получать одни и тѣ же результаты, мое сужденіе будетъ имѣть тѣмъ болѣе вѣса.

Допустимъ на минуту, что число бѣлыхъ вынутыхъ шаровъ будетъ равно числу черныхъ шаровъ; я имѣлъ бы основанія думать, что дѣйствительность соотвѣтствуетъ результатамъ опыта, что бѣлые и черные шары распредѣлены въ урнѣ въ равной пропорціи. Если бы число бѣлыхъ шаровъ превосходило число черныхъ, я былъ бы объ этомъ также освѣдомленъ тѣми послѣдовательными опытами, которые я производилъ. Отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ къ числу черныхъ, послѣ большого числа выемокъ, приближалось бы къ дѣйствительному соотношенію въ урнѣ, тѣмъ болѣе, чѣмъ продолжительнѣе были бы опыты.

Я могу узнать съ какой мнѣ угодно точностью, повторяя послѣдовательно опыты — во-первыхъ, что въ урнѣ находятся только бѣлые и черные шары; во-вторыхъ—числовое отношеніе, какое существуетъ между числомъ шаровъ каждаго цвѣта.

Но урна, которую мы изслѣдуемъ,—природа. Мы можемъ повторять наши опыты безъ конца; мы не должны даже воздерживаться отъ предосторожности опять класть шары въ урну, потому что то, что вынимаютъ, не измѣняетъ пропорціи того, что остается; это все равно, что капля воды, взятая изъ нѣдръ океана.

Меня спрашиваютъ, столько-ли мальчиковъ родится, сколько и дѣвочекъ? Чтобы имѣть возможность отвѣтить, возвратимся къ выбранному раньше примѣру; я могу сравнить каждое рожденіе съ выемкою одного шара изъ урны, содержимое которой я знаю. Послѣ извѣстнаго числа послѣдовательныхъ наблюденій, я сосчитаю мальчиковъ и дѣвочекъ. Предположимъ, что этотъ опытъ былъ произведенъ въ теченіе всего 1841 г., и во всѣхъ сельскихъ общинахъ Бельгіи мы насчитали 53.437 рожденій мужского пола и 49.788 рожденій женскаго пола. Первое число больше второго, но нужно ли отсюда заключить, что слѣдовательно—это законъ, по которому природа способствуетъ рожденію мальчиковъ? или излишекъ одного числа противъ другого не болѣе, какъ случайность?

Чтобы пріобрѣсти больше знаній по этому предмету, надо прибѣгнуть къ результатамъ наблюденій одного или лучше нѣсколькихъ лѣтъ.

Отношеніе между двумя предыдущими числами выражается числомъ 106, т. е. на 106 мужскихъ рожденій приходится 100 женскихъ. Отношеніе, высчитанное за девять лѣтъ съ 1834 по 1842 г. дало почти точно такое же число, а именно 106,3. Такимъ образомъ дѣйствительно существуетъ преобладаніе мужскихъ рожденій и отношеніе почти точно такое, какое мы нашли въ числахъ лѣтъ съ 1834 по 1842 г.

**Вычисленіе и опытъ тѣмъ менѣе точно согласуются между собою, чѣмъ менѣе было произведено опытовъ.**

Когда производятъ не болѣе одного опыта, то никогда не будетъ согласія между результатами вычисленія и опыта, даже съ шарами, число и цвѣтъ которыхъ извѣстны. Передъ наступленіемъ событія имѣется только вѣроятность за или противъ его наступленія; и когда событіе совершится, вѣроятности замѣняются достовѣрностью. Такъ, передъ тѣмъ, какъ взять карту въ колодѣ, я имѣю $\frac{12}{32}$ за вѣроятность взять фигуру, а противъ себя вѣроятность $\frac{20}{32}$. Между тѣмъ, когда карта перевернута, мое положеніе всецѣло мѣняется; мои сомнѣнія замѣняются увѣренностью, или достовѣрностью; и если я держалъ пари, я знаю—выигралъ я или проигралъ, смотря по тому, какая вѣроятность будетъ въ мою пользу.

Когда производятъ большое количество опытовъ, тогда можетъ установиться согласіе между результатами вычисленія и результатами опыта; но это согласіе не обязательно. Жакъ Бернули доказалъ, что повторяя достаточно число опытовъ, можно достигнуть вѣроятности на столько близкой къ достовѣрности, на сколько желаютъ, и что разница между результатами вычисленія и результатами опыта или наблюденія будетъ ограничена на столько тѣсными предѣлами, на сколько этого захотятъ.

Это знаютъ очень хорошо правительства, учреждающія лотереи или игорные дома. Большое количество игроковъ, которые приходятъ туда со своими деньгами, оставляютъ учредителямъ, несмотря на явныя колебанія судьбы, выгоду, которую можно высчитать заранѣе, и которая на столько постоянна, какъ и другіе доходы казны. Такъ, статистическія изысканія въ Парижѣ показываютъ намъ, что съ 1816 по 1820 г. включительно парижская лотерея ежегодно пускаетъ въ оборотъ сумму около 25 милліоновъ франковъ, на которые казна получаетъ немного болѣе четверти.

Бельгійское правительство, учреждая пенсіонныя кассы для вдовъ и сиротъ чиновниковъ, къ несчастью упустило изъ виду, что предварительныя вычисленія оправдываются въ дѣйствительности лишь тогда, когда оперируютъ надъ большими числами. Устраивая отдѣльныя кассы для каждой отрасли общественной службы и ставя себѣ условіемъ никогда имъ не помогать, оно увеличило шансы колебаній, которымъ необходимо подвергаются кассы. Оказывается очень мало вѣроятнымъ, что надежды отца могутъ осуществиться въ отношеніи пенсіи его вдовѣ или его сиротамъ, когда ассоціація не насчитываетъ даже сотни членовъ, какъ это у насъ бываетъ въ кассахъ служащихъ высшему просвѣщенію. Естественнымъ послѣдствіемъ подобнаго положенія вещей будетъ то, что нѣкоторыя кассы должны благоденствовать въ то время, какъ другія будутъ страдать. Это неравенство будетъ большимъ зломъ, потому что коснется людей, которыхъ нужно разсматривать, какъ членовъ одной и той же семьи *).

Очень простой и полезный въ практикѣ принципъ, что точность результатовъ растетъ какъ квадратный корень числа наблюденій. Такимъ образомъ, степень точности событія будетъ выражена числами 1, 2, 3, 4, когда наблюденія выражаются числами 1, 4, 9, 16 и т. д.

Мнѣ было интересно приложить этотъ принципъ на опытѣ. Я бросилъ въ урну двадцать бѣлыхъ шаровъ и такое же количество черныхъ, такъ что вѣроятность какой выймется шаръ: черный или бѣлый? была одинакова и равнялась $\frac{1}{2}$. Послѣ извѣстнаго числа выемокъ, число вышедшихъ бѣлыхъ шаровъ должно быть равно числу черныхъ; въ слѣдующей маленькой таблицѣ можно видѣть результаты, послѣдовательно достигнутые послѣ 4, 16, 64 и т. д. выемокъ. Я долженъ предупредить, что послѣ каждой выемки вынутый шаръ клался обратно въ урну, чтобы всѣ условія опыта оставались тѣ же самыя.

---

*) Это было напечатано въ 1846 г. стр. 56 въ „Письмахъ о теоріи вѣроятностей, примѣненной къ наукамъ о морали и политикѣ“ A. Quetelet, какъ разъ въ то время, когда основывались сберегательныя кассы для служащихъ бельгійскаго правительства. Исчисленія, произведенныя при разсчетѣ, слишкомъ хорошо оправдались на судьбѣ кассъ министерства финансовъ и кассы высшаго образованія. Къ сожалѣнію весь этотъ опытъ еще не оконченъ.

| Число вынутыхъ шаровъ. | Степень точности. | Число шаровъ. | | Отношеніе предыдущихъ чиселъ. |
|---|---|---|---|---|
| | | Бѣлыхъ. | Черныхъ. | |
| 4 | 2 | 1 | 3 | 0,33 |
| 16 | 4 | 8 | 8 | 1,00 |
| 64 | 8 | 28 | 36 | 0,78 |
| 256 | 16 | 125 | 131 | 0,95 |
| 1024 | 32 | 526 | 496 | 1,06 |
| 4096 | 64 | 2066 | 2030 | 1,02 |

Въ первой колоннѣ обозначены числа вынутыхъ шаровъ, а во второй квадратные корни тѣхъ же чиселъ. Согласно принципу, выраженному выше, эти корни обозначаютъ относительную степень точности результатовъ.

Въ слѣдующихъ двухъ колоннахъ находится обозначеніе черныхъ и бѣлыхъ шаровъ, вынутыхъ изъ урны; эти числа должны быть равны между собою, если теорія и опытъ шли въ строгомъ согласіи. Наконецъ, послѣдняя колонна показываетъ намъ отношеніе вынутыхъ бѣлыхъ шаровъ къ вынутымъ чернымъ; это отношеніе должно равняться 1. Но такой результатъ былъ полученъ только одинъ разъ и только послѣ шестнадцати выемокъ. Это согласіе было не болѣе, какъ случайнымъ, въ то время, какъ въ среднемъ мы замѣтили колебанія чиселъ, въ которыхъ очевидно было стремленіе приблизиться къ единицѣ черезъ повтореніе выемокъ.

---

## О средней и крайнихъ предѣлахъ въ оцѣнкѣ измѣреній.

Когда обращаются къ природѣ и хотятъ ее изслѣдовать, то при первомъ же приступѣ поражаетъ безконечное разнообразіе, которое наблюдается въ ея малѣйшихъ явленіяхъ. Каковы бы ни были границы, въ которыхъ сосредоточено вниманіе, всегда находятъ разнообразіе, которое на столько же удивляетъ, на сколько затрудняетъ, Самая простая оцѣнка представляетъ неясность, не соотвѣтствующую точности, которой требуетъ наука. Тотъ же самый предметъ, измѣренный или взвѣшенный нѣсколько разъ сряду, представляетъ, несмотря на всѣ предосторожности, какими обставлено измѣреніе, результаты почти всегда несхожіе. Между тѣмъ наша мысль имѣетъ потребность остановиться на точномъ числѣ, на средней, которая дается въ результатѣ наблюденій по возможности очищенной отъ всего случайнаго.

Понятіе средней величины на столько намъ знакомо, что мы его употребляемъ, и иногда безъ нашего вѣдома, вездѣ, гдѣ мы встрѣчаемся съ предметами, на которые обращено наше вниманіе и которые подвергнуты перемѣнамъ. Такъ, напр., для насъ не составляетъ затрудненія опредѣлить видимую величину солнца, хотя строго говоря, мы не видимъ этого свѣтила подъ однимъ и тѣмъ же угломъ въ продолженіе двухъ дней и, можно даже сказать, въ теченіе двухъ слѣдующихъ другъ за другомъ минутъ. Точно также мы говоримъ еще, какова температура лѣта данной мѣстности, хотя эта температура мѣняется каждую минуту.

Теорія среднихъ служитъ основаніемъ всѣхъ наблюдательныхъ наукъ: она такъ проста и такъ естественна, что быть можетъ еще не оцѣнили достаточно громадныхъ слѣдовъ, которые она оставила въ человѣческомъ разумѣ. Мы не знаемъ, кому мы ею обязаны, такъ же, какъ и всѣ великія открытія не знаютъ своихъ изобрѣтателей. Все, чему учитъ насъ въ этомъ отношеніи исторія наукъ, это—какой народъ воспользовался тѣмъ или другимъ открытіемъ раньше, чѣмъ другіе народы. Это относится даже къ нумераціи, письму и книгопечатанію.

Замѣтимъ еще, что, занявшись мыслью о среднихъ величинахъ, способныхъ измѣняться, легко упустить изъ виду предѣлы, въ которыхъ происходятъ эти измѣненія. Вездѣ, гдѣ можно сказать „больше" или „меньше", необходимо опредѣлить три вещи: среднее состояніе и два предѣла.

И безъ науки привычка даетъ намъ неопредѣленную оцѣнку средней и предѣловъ колебаній каждаго измѣняющагося элемента, который представляетъ намъ природа или соціальная система. Эта оцѣнка руководитъ нашими разсужденіями. Но успѣхъ знаній замѣняетъ намъ смутныя представленія точными понятіями.

Любопытно будетъ узнать, въ какую эпоху начали разумно пользоваться средними. Вѣроятно, въ древности о нихъ существовало темное представленіе, потому что эта идея, какъ я уже замѣтилъ, присуща нашей природѣ и служитъ основаніемъ почти всѣхъ нашихъ сужденій; но точно опредѣлилась она гораздо позднѣе, и трудно прослѣдить у позднѣйшихъ писателей эпоху ея возникновенія и примѣненія, ту эпоху, когда установили въ принципѣ, что средняя изъ цѣлаго ряда наблюденій получается, раздѣливъ сумму наблюдаемыхъ данныхъ на число наблюденій. Опредѣленіе предѣловъ, по скольку они дополняютъ идею о средней, могло установиться лишь съ развитіемъ теоріи вѣроятностей въ ея примѣненіяхъ къ изученію явленій природы. Основаніе и развитіе теоріи о среднихъ составляетъ одну изъ наиболѣе интересныхъ главъ исторіи человѣческаго разума. Архимедъ, этотъ замѣчательный во всѣхъ отношеніяхъ геній, кажется, въ древности лучше всѣхъ оцѣнилъ важность среднихъ; онъ сдѣлалъ изъ нихъ удивительное употребленіе при установленіи понятія о центрѣ тяжести, который имъ былъ открытъ. Онъ замѣнилъ опредѣленіемъ одной единственной точки опредѣленіе большого числа вещественныхъ точекъ, и эта одна идея, такая остроумная и плодотворная съ тѣхъ поръ, уже заслужила бы ему признательность людей.

Когда Метонъ, за четыре или пять вѣковъ до христіанской эры, представилъ грекамъ, собравшимся на Олимпійскія игры, свой знаменитый періодъ кругообращенія, который былъ принятъ съ такимъ энтузіазмомъ и выгравированъ золотыми буквами, онъ могъ узнать продолжительность луннаго и солнечнаго кругообращенія только при помощи аналогичныхъ вычисленій нашихъ среднихъ. Это можно сравнить съ тѣмъ, какъ корпусъ человѣка начинаетъ ходить увѣренными шагами гораздо раньше, чѣмъ умъ его познаетъ законы равновѣсія.

Аристотель, одинъ изъ великихъ наблюдателей древнихъ временъ, также замѣтилъ свойство среднихъ; онъ примѣнялъ его къ моральнымъ наукамъ; по его мнѣнію, добродѣтели находятся въ состояніи равновѣсія, такъ что всѣ наши хорошія качества, въ своихъ наиболѣе крупныхъ уклоненіяхъ внизъ отъ средней, являются пороками. Эта доктрина изъ школы философовъ перешла къ поэтамъ: Горацій у римлянъ былъ однимъ изъ самыхъ изящныхъ и утонченныхъ его толкователей.

Но какъ далеко отъ этихъ первыхъ набросковъ мысли до научныхъ теорій, которыми мы обладаемъ теперь! И однако намъ остается еще много сдѣлать, чтобы воспользоваться плодами блестящихъ работъ новѣйшей аналитики. Большая часть наблюдателей, даже лучшихъ, знакомы довольно смутно, я не скажу съ аналитическою теоріею вѣроятностей, но даже съ тою частью этой теоріи, которая касается оцѣнки среднихъ.

При отысканіи средней можно имѣть въ виду двѣ, весьма различныя вещи: можно искать опредѣленіе числа, которое дѣйствительно существуетъ, или же опредѣлять число, которое даетъ возможно близкое представленіе о нѣсколькихъ различныхъ числахъ, выражающихъ однородныя вещи, но разныхъ по величинѣ.

Измѣряя высоту зданія двадцать разъ сряду, мы быть можетъ не получимъ и двухъ разъ одного и того же числа; между тѣмъ извѣстно, что высота зданія опредѣленна, и если она не получается точно при каждомъ измѣреніи, сдѣланномъ для ея опредѣленія, то это значитъ, что эти измѣренія неточны. Тогда мы ограничиваемся тѣмъ, что среднюю всѣхъ опредѣленій принимаемъ за искомую настоящую высоту. Болѣе или менѣе широкіе предѣлы, между которыми заключены полученныя измѣренія, зависятъ отъ большаго или меньшаго искусства наблюдателя и отъ точности инструментовъ.

Можно также употреблять вычисленіе средней и въ другомъ смыслѣ. Чтобы дать представленіе о высотѣ зданій, которыя находятся на одной опредѣленной улицѣ, надо измѣрить высоту каждаго изъ этихъ зданій, сложить полученныя высоты и результатъ раздѣлить на число зданій. Опредѣленная средняя величина не представитъ величины ни одного изъ этихъ зданій въ отдѣльности, но она поможетъ составить общее понятіе объ ихъ высотѣ на протяженіи данной улицы; и болѣе или менѣе широкіе предѣлы, въ которыхъ заключены всѣ полученныя измѣренія, будутъ зависѣть отъ разнообразія зданій.

Здѣсь находимъ очень важное различіе, которое, быть можетъ сразу не бросится въ глаза, но которое, тѣмъ не менѣе, имѣетъ большое значеніе. Въ первомъ случаѣ средняя представляла вещь дѣйствительно существующую; во второмъ случаѣ, она давала въ формѣ отвлеченнаго числа общее представленіе о нѣсколькихъ вещахъ, существенно различныхъ, хотя и однородныхъ.

Съ другой стороны (и это очень важно) числа, которыя мы беремъ для полученія средней въ первомъ и во второмъ примѣрѣ, получаются различнымъ образомъ. Во второмъ примѣрѣ они не связаны между собою никакимъ закономъ повторяемости, между тѣмъ въ первомъ, какъ скоро мы будемъ имѣть случай видѣть, опредѣленія высотъ, хотя и ошибочныя, группируются съ двухъ сторонъ средней съ такою правильностью, что можно заранѣе опредѣлить ихъ число, если даны предѣлы, между которыми они заключены.

Это различіе имѣетъ большое значеніе. Я употреблю даже различныя слова, чтобы лучше его установить. Я сохраню названіе „средней" для перваго случая, и возьму названіе „ариѳметической средней" для второго, чтобы показать, что здѣсь дѣло идетъ о простомъ вычисленіи между количествами, между которыми нѣтъ существенной связи. Эту связь не всегда замѣчаютъ и иногда ее встрѣчаютъ тамъ, гдѣ менѣе всего ожидали ее встрѣтить; ариѳметическая средняя становится тогда дѣйствительно среднею. Иногда ариѳметическая средняя вычисляется по элементамъ очень разнообразнымъ, такъ что нельзя заключить, что общая идея, которую она должна представлять, полезна или незначительна.

Я упомяну для примѣра о средней жизни. Извѣстно, что когда статистикъ хочетъ вычислить эту среднюю для данной страны, онъ предполагаетъ, что всѣ индивидуумы, родившіеся единовременно въ этой странѣ, складываютъ годы, мѣсяцы и дни, которые еще они проживутъ, и дѣлитъ поровну между ними такъ, какъ будто одинъ жилъ столько же времени, сколько и другой. Въ дѣйствительности же на 100.000 индивидуумовъ 9.600 живутъ одинъ мѣсяцъ, 2.460—два мѣсяца, 1.760—три мѣсяца и т. д. *). Берутъ общую сумму продолжительности жизни каждаго изъ этихъ индивидуумовъ и дѣлятъ ее на 100.000. Результатъ этой операціи представляетъ среднюю жизни **); она около 32 лѣтъ для Бельгіи, какъ и для Франціи, а поднимается до 33 лѣтъ для Англіи.

Было замѣчено, что вслѣдствіе прогресса цивилизаціи и на-

---

*) Смотрите выше, стр. 174 и таблицы смертности въ Бельгіи въ „Annuaire de l'Observatoire de Bruxelles".

**) Среднюю жизни не должно смѣшивать съ вѣроятной жизнью, которая обозначаетъ просто возрастъ, гдѣ населеніе дѣлится на двѣ равныя части, одну болѣе пожилую, другую—менѣе; такимъ образомъ для человѣка 50 лѣтъ вѣроятная жизнь почти 20 лѣтъ; это значитъ (см. стр. 174) что изъ 440 человѣкъ, которые переживаютъ изъ 1.000, остается только половина или 220 къ 70 годамъ.

укъ, средняя жизни послѣдовательно увеличилась у нѣкоторыхъ народовъ, и этому радовались, особенно потому, что можно было думать, что продолжительность жизни одинаково относится ко всѣмъ индивидуумамъ; въ самомъ дѣлѣ это вообще такъ и проявляется.

Между тѣмъ приходится замѣтить, что средняя жизни можетъ очень часто ввести въ заблужденіе, и то, что было только что сказано, можетъ послужить доказательствомъ. Напримѣръ, изъ того, что средняя жизни во Франціи и Бельгіи будетъ точно такой же величины, не надо будетъ торопиться заключать, что эти двѣ страны находятся въ однихъ и тѣхъ же условіяхъ относительно смертности. Когда у человѣка въ полномъ разцвѣтѣ силъ, отца семейства, отнимается десять лѣтъ жизни, чтобы прибавить ихъ къ жизни одного изъ его дѣтей, умершаго немедленно послѣ рожденія, то это ни въ чемъ не измѣняетъ средней продолжительности жизни; но это перемѣщеніе 10-ти лѣтъ будетъ имѣть громадное вліяніе на судьбу семьи, которая потеряла бы свою опору, и которая съ другой стороны считала бы еще одного лишняго, нуждающагося въ прокормленіи.

Цифра средней жизни даетъ лишь общее представленіе о смертности, и можно ею пользоваться лишь съ осмотрительностью. Трудно представить примѣръ ариѳметическихъ среднихъ, гдѣ употребляли бы элементы болѣе несхожіе. При вычисленіи средней жизни въ самомъ дѣлѣ приписываютъ одинаковую цѣнность одного года существованія и для ребенка, и для зрѣлаго человѣка, и для старика.

Теперь предположимъ, что мы измѣрили высоту башни Собора Парижской Богоматери; допустимъ, кромѣ того, что вмѣсто того, чтобы найти дѣйствительную его высоту, мы получали бы каждый разъ числа, болѣе или менѣе различныя между собою; между тѣмъ нѣтъ никакой причины, вызывающей эти ошибки въ сторону ли увеличенія, или уменьшенія. Средняя всѣхъ этихъ отдѣльныхъ величинъ представляетъ число, которое не является настоящею высотою башни, но которое отъ нея немного уклоняется. Я не знаю, до какихъ предѣловъ могли бы идти ошибки, если бы я продолжалъ мои наблюденія. Я замѣняю однако количество, котораго я не знаю, другимъ, которое мнѣ извѣстно. Все дѣло въ томъ, чтобы знать ошибку, которой я подвергаюсь.

Говоря вообще, настоящая высота башни соотвѣтствуетъ гиражу равнаго числа бѣлыхъ и черныхъ шаровъ; это значитъ, что между всѣми возможными комбинаціями найдется въ концѣ концовъ столько же измѣреній меньшихъ, сколько и большихъ настоящей искомой величины, которая и будетъ равна ихъ средней. Вмѣсто этой величины я нахожу другую, которая будетъ на столько близка къ искомой, на сколько я, при равенствѣ прочихъ условій, сдѣлалъ больше наблюденій. Вотъ что нужно для точности моего конечнаго вывода.

Но рядомъ съ вопросомъ, который насъ занимаетъ, представляется другой, быть можетъ, еще болѣе любопытный. Вотъ онъ: наблюдаемые результаты не безразлично располагаются по обѣ стороны средней, но въ опредѣленномъ порядкѣ, какъ это начертано въ „лѣстницѣ возможностей".

Такимъ образомъ, когда измѣряютъ высоту, между самымъ большимъ и самымъ меньшимъ изъ полученныхъ чиселъ, другія числа располагаются на различныхъ разстояніяхъ отъ средней, но самое большое число находится въ самомъ ближайшемъ сосѣдствѣ съ этою среднею. Это происходитъ потому, что по мѣрѣ того, какъ удаляются отъ настоящаго искомаго числа, вѣроятность результата уменьшается все болѣе и болѣе, согласно съ закономъ, который управляетъ полученіемъ двухъ родовъ ошибокъ, шансы которыхъ равны, и которыя могутъ комбинироваться различнымъ образомъ. Предположимъ, что мы измѣряли высоту башни Собора Парижской Богоматери число разъ, вполнѣ достаточное для того, чтобы можно было думать, что разница между теоріей и исчисленіемъ исчезла; средняя всѣхъ измѣреній дастъ искомую высоту. Кромѣ того, располагая наблюденія въ восходящемъ и нисходящемъ порядкѣ, исходя изъ разницы въ 1 дециметръ, получимъ двѣ самыя численныя группы, какія и дадутъ высоту башни съ ошибкой, приблизительно, около 1 дециметра. Слѣдующія двѣ группы дадутъ высоту съ ошибкой въ 2 дециметра и т. д. Чѣмъ больше мы удаляемся отъ средней, тѣмъ меньшее число наблюденій эти группы въ себѣ заключаютъ.

Такимъ образомъ мы въ состояніи заранѣе узнать порядокъ, въ которомъ расположатся ошибки. Каждый рядъ наблюденій имѣетъ свою особую лѣстницу возможности, какъ я уже замѣтилъ раньше. Природа этой лѣстницы опредѣляется числомъ наблюденій, а также средствами, болѣе или менѣе точными, какими пользовались при наблюденіяхъ. Впрочемъ не надо забывать, что мы всегда придерживаемся строго гипотезы, что шансы наибольшей ошибки таковы же, какъ и наименьшей.

Не удивительно ли, что случайныя ошибки располагаются въ такомъ совершенномъ порядкѣ и что наши безсознательные промахи проявляются съ такой симметріей, какая кажется могла бы быть результатомъ тщательно обдуманныхъ разсчетовъ?

Кривая, которая изображаетъ порядокъ послѣдовательности и число результатовъ, будетъ тождественна съ кривою вѣроятности, такъ что болѣе или менѣе значительная ошибка является тѣмъ же уклоненіемъ, какое наблюдается при тиражѣ числа бѣлыхъ и черныхъ шаровъ.

Если бы шансы ошибиться въ увеличеніи не были бы тѣ же самыя, что и шансы ошибиться въ уменьшеніи, то кривая, изображающая послѣдовательность результатовъ теряла бы свою симметрію, не переставая представлять извѣстной правильности; ея вершина не находилась бы болѣе на равномъ разстояніи отъ двухъ ея концовъ. *)

Когда ограничиваются тѣмъ, что берутъ ариѳметическую среднюю различныхъ величинъ, вполнѣ независимыхъ одна отъ другой, то линія, которая изображаетъ наблюденія, не представляетъ никакой правильности; а если она и есть, то это только случайность. Возьмемъ другой примѣръ. Измѣреніе статуи не такъ легко, какъ это сразу кажется, особенно, если хотятъ измѣрить ее съ большой точностью. Измѣряя десять разъ сряду окружность

---

*) Назовемъ черезъ a и b относительныя вѣроятности двухъ событій: будемъ имѣть послѣдовательно a и b для вѣроятности послѣ перваго опыта; $a^2 + 2ab + b^2$ для вѣроятности послѣ двухъ опытовъ; $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3$ послѣ трехъ опытовъ; и вообще:

$$a_n + \frac{n}{1} a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(1-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 + \dots \, b^n$$

посли n опытовъ.

Когда a будетъ равно b, то-есть когда два ожидаемыхъ событія будутъ имѣть одну и ту же вѣроятность, предыдущее уравненіе приметъ болѣе простую форму:

$$\left(1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2.} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \dots 1\right) a^n, \text{— то}$$

легко будетъ построить таблицу вѣроятности, показатели которой находятся въ предыдущемъ уравненіи; довольно знать число n опытовъ.

груди, нельзя быть увѣреннымъ, что получимъ два результата вполнѣ тождественныхъ другъ другу.

Случается почти всегда, что полученныя величины болѣе или менѣе удаляются отъ искомой; при этомъ я предполагаю, что у измѣрителей не было никакого намѣренія брать измѣренія слишкомъ большія или слишкомъ маленькія.

Если бы хватило терпѣнія повторить измѣренія тысячу разъ, то въ концѣ концовъ получилась бы серія чиселъ, которыя отличались бы между собою по степени точности, съ какой были произведены измѣренія. Средняя всѣхъ этихъ чиселъ, конечно, очень мало удалялась бы отъ дѣйствительной величины. Болѣе того, располагая всѣ измѣренія въ восходящемъ и нисходящемъ порядкѣ, мы были бы не мало удивлены, видя, что группы слѣдуютъ другъ за другомъ съ большой правильностью. Измѣренія, которыя всего менѣе удаляются отъ общей средней, составятъ наиболѣе значительную группу; и другія группы были настолько меньше, на сколько онѣ содержатъ измѣреній болѣе отклоняющихся отъ средней. Если изобразить послѣдовательность группъ линіей, то эта линія была бы кривой вѣроятности: въ самомъ дѣлѣ этотъ результатъ можно было предвидѣть. Такъ что наши промахи (или случай, если изъ за самолюбія намъ больше нравится это слово) происходятъ съ такою правильностью, какой нельзя было бы имъ приписать. *)

Предположимъ теперь, что собрали пятьсотъ измѣреній, которыя наименѣе удаляются отъ средней; полу-разность, которая будетъ находиться между самыми большими и самыми маленькими изъ этихъ измѣреній, будетъ мѣрой точности или *вѣроятной ошибки*. Могло случиться, что при имѣвшихъ мѣсто обстоятельствахъ, эта вѣроятная ошибка была равна одному миллиметру, такъ что на тысячу измѣреній—было бы пятьсотъ съ ошибкой менѣе одного милиметра, а другія пятьсотъ съ ошибкой болѣе одного милиметра. Такимъ образомъ была бы вѣроятность одного противъ одного въ томъ, что, принимаясь вновь за измѣренія, мы не уклонились бы и на одинъ милиметръ отъ средней всѣхъ измѣреній, которую можно разсматривать, какъ настоящую искомую окружность груди, которую хотѣли измѣрить.

---

*) Для болѣе конкретнаго уясненія „лѣстницы возможности“ и „кривой вѣроятности“ смотрите таблицу и діаграмму Кэтлэ, составленную имъ для роста человѣческаго на стр. 39—41 этого тома. (*Прим. пер*).

Если бы пришлось измѣрять грудь живого человѣка вмѣсто статуи, шансы ошибки были бы многочисленнѣе; и я очень сомнѣваюсь, не оказалась ли бы и послѣ тысячи измѣреній еще вѣроятная ошибка въ одинъ милиметръ. Одинъ актъ дыханія, который измѣняетъ каждый моментъ форму и размѣры груди, прибавилъ бы могучую причину ошибки ко всѣмъ тѣмъ, какія встрѣчались, когда мы оперировали надъ статуей, совершенно неподвижной. Несмотря и на эти неблагопріятныя обстоятельства, тысяча измѣреній, сгруппированныхъ по степени величины, расположились бы однако вполнѣ правильно. Линія, которая представляла бы ихъ, была бы всегда кривою возможности, но расширенной въ горизонтальномъ направленіи пропорціонально вѣроятной ошибкѣ. Измѣнимъ еще наше предположеніе и предположимъ, что мы пользовались услугами тысячъ ваятелей, чтобы скопировать „Гладіатора“ съ такимъ стараніемъ, какое только можно себѣ представить. Воспроизведутъ ли точно модель тысяча копій, которыя будутъ сдѣланы, -и измѣряя ихъ послѣдовательно, тысяча измѣреній, которыя я получу, будутъ ли они на столько сходны, какъ будто бы я ихъ всѣ получилъ на самой статуѣ „Гладіатора“? Къ первымъ шансамъ ошибки пришлось бы прибавить неточности копіистовъ, такъ что вѣроятная ошибка была бы, быть можетъ, очень велика. Несмотря на это, если копіисты не работали съ предвзятой идеею, увеличивая и уменьшая извѣстныя пропорціи по предразсудкамъ школы, и если неточности были только случайными, то тысяча измѣреній, сгруппированныхъ въ порядкѣ величинъ представили бы опять замѣчательную правильность и слѣдовали бы другъ за другомъ въ порядкѣ, который имъ назначенъ закономъ возможности.

Можно исходить еще изъ другой гипотезы и вмѣсто того, чтобы измѣрять извѣстное число разъ или живую модель или статую, измѣрить извѣстное число различныхъ людей и взять среднюю. Къ ошибкамъ, которыя могли бы сдѣлать при измѣреніи, присоединились бы тогда различія, которыя происходятъ отъ неравенства моделей. Но, предполагая, что это неравенство не болѣе какъ случайно и происходитъ лишь при болѣе или менѣе крупномъ развитіи, найденныя величины расположатся симметрично вокругъ средняго типа, но въ границахъ болѣе широкихъ, потому что онѣ зависѣли бы разомъ отъ двухъ причинъ: неточности измѣреній и случайнаго неравенства измѣряемыхъ моделей. Это одинъ изъ примѣровъ, который я далъ среди многихъ другихъ въ моемъ сочиненіи „О теоріи вѣроятностей, примѣненной къ нравственнымъ и политическимъ наукамъ“ *).

Я имѣлъ случай видѣть и измѣрять карликовъ и великановъ, ростъ которыхъ помѣщался въ численныхъ предѣлахъ: числа этихъ исключительныхъ измѣреній уменьшаются по мѣрѣ того, какъ удаляются отъ средней величины. Даже древніе великаны и карлики, по крайней мѣрѣ тѣ, ростъ которыхъ былъ вѣрно воспроизведенъ, не составляли исключенія изъ закона развитія человѣка.

---

*). Sur la théorie des probabilités, appliquée aux sciences morales et politiques. Brux. 1846

Здѣсь я могу указать лишь главные выводы теоріи, которую я тщательно разработалъ въ упомянутомъ трудѣ.

# ПРОТОКОЛЪ

## засѣданія Общества Экономистовъ 2-го апрѣля 1910 года.

Въ засѣданіе прибыли В. Г. Бажаевъ, Е. Г. Шольпъ, К. М. Оберучевъ, А. И. Ярошевичъ, А. А. Русовъ, С. А. Ивановъ, В. Я. Головня, П. Л. Кованько, много гостей и представители мѣстныхъ органовъ печати.

Заслушанъ докладъ дѣйствительнаго члена Общества Е. Г. Шольпа:

А) „Земская реформа въ Юго-Западномъ краѣ".

**Программа:**

I. Дѣйствующее управленіе земскимъ хозяйствомъ (полож. 1-го апр. 1903 г.).

*а)* Коренные недостатки земскаго управленія.

*б)* Степень удовлетворенія земскихъ нуждъ.

*в)* Итоги шестилѣтней дѣятельности.

II. Законопроектъ земской реформы:

1) Основаніе его—земское положеніе 1890 г.

2) Важнѣйшія измѣненія: *а)* дѣленіе по національнымъ куріямъ при выборахъ; *б)* устраненіе сословнаго начала; *в)* фиксація числа гласныхъ; *г)* установленіе процентныхъ нормъ для лицъ польскаго происхожденія, служащихъ въ земскихъ исполнительныхъ органахъ; *д)* фиксація существующихъ земскихъ расходовъ; *е)* выдѣленіе Кіева въ отдѣльную земскую единицу.

III. Поправки къ законопроекту, принятыя думской комиссіей (при второмъ чтеніи): 1) фиксація числа гласныхъ только по имущественному цензу; 2) отмѣна процентныхъ отношеній для лицъ, служащихъ въ исполнительныхъ органахъ; 3) пониженіе ценза.

## Тезисы:

I. Земскія учрежденія, намѣченныя законопроектомъ, не обезпечатъ земскихъ нуждъ края, вслѣдствіе *а)* общихъ недостатковъ земскаго положенія 1890 г. и *б)* вслѣдствіе внесенныхъ вышеуказанныхъ измѣненій.

II. Земскія нужды края могутъ быть обезпечены только общей реформой земскаго управленія, давно выработанной для внутреннихъ губерній.

Послѣ выслушанія доклада предсѣдатель открылъ пренія.

*П. Л. Кованько*, подробно останавливаясь на программѣ и тезисахъ доклада, указываетъ, что докладчикомъ упущенъ существенный недостатокъ предлагаемаго законопроекта земской реформы въ ю-з. краѣ въ области обложенія. П. Л. полагаетъ, что предполагаемая земская реформа должна быть основана на реорганизаціи обложенія мѣстнаго и центральнаго, почему и считаетъ необходимымъ пополнить тезисы доклада въ вышеуказанномъ смыслѣ.

*С. А. Ивановъ* проводитъ параллель между ю.-з. земствомъ и земствомъ заднѣпровскимъ. Указывая на ту постоянную борьбу, которая имѣетъ мѣсто въ земствахъ заднѣпровскихъ, и на благодѣтельные ея результаты, онъ констатируетъ печальное положеніе земскаго управленія нашего края, отсутствіе въ немъ живыхъ общественныхъ силъ и начинаній. Оппонентъ смотритъ крайне пессимистически на проектъ земской реформы, въ виду общихъ недостатковъ земскаго положенія 1890 г. и особенно тѣхъ измѣненій, которыя вносятся туда законопроектомъ.

*Е. Г. Шольпъ* соглашается съ оппонентомъ относительно общей оцѣнки дѣятельности земскихъ управъ ю.-з. края. Администрація, увеличивая штаты управъ, не можетъ однако этимъ самымъ дать имъ жизнь. Поэтому всѣ начинанія обречены тамъ на смерть. Е. Г. иллюстрируетъ это положеніе указаніемъ на состояніе земской медицины. Въ то время какъ въ губерніяхъ земскихъ мы видимъ частые съѣзды врачей, объединяющіе и координирующіе ихъ дѣятельность на почвѣ народнаго здравія, въ ю.-з. краѣ ничего подобнаго не наблюдается, нѣтъ объединенія, нѣтъ жизни, и учрежденія чахнутъ.

*В. Я. Головня*, оцѣнивая по достоинству земскія учрежденія 1864 г., указываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и тѣ улучшенія, которыя могли бы послужить на пользу дѣла: именно расширеніе круга ихъ вѣдомства и дѣятельности и объединеніе губернскихъ земствъ въ болѣе крупныя, автономныя земскія единицы, слѣдствіемъ чего было бы созданіе стройной, внутренней организаціи, вполнѣ подготовляющей къ конституціонному строю. Переходя къ реформѣ 1890 г., В. Я. отмѣчаетъ вредное ея вліяніе на земскія учрежденія и на развитіе земскаго дѣла. Еще болѣе отрицательно оппонентъ относится къ законопроекту земской реформы въ Ю.-З. краѣ, создающему цѣлый рядъ комбинацій и загражденій политическаго характера, вовсе не имѣющихъ въ виду удовлетворенія земскихъ нуждъ края.

*А. И. Ярошевичъ* полагаетъ, что докладчикъ далъ слишкомъ отрывочную картину той земской дѣятельности, которая существовала въ краѣ до сихъ поръ. Для обоснованія выводовъ докладчикъ пользуется какими-то невѣсомымы элементами. По мнѣнію А. И. вообще гадать трудно. Ю.-З. край представляетъ конгломератъ національностей, откуда рядъ экономическихъ и соціальныхъ противорѣчій: матеріальная сила, дающая культурное развитіе краю, находится въ рукахъ лицъ, находящихся въ національномъ противорѣчіи съ кореннымъ населеніемъ. Указывая на то, что значительное кооперативное движеніе въ Ю.-З. краѣ врядъ ли можно считать результатомъ культурнаго подъема и развитія крестьянъ, А. И. не видитъ аргументовъ въ пользу расширенія представительства крестьянъ въ предполагаемыхъ учрежденіяхъ края.

*Е. Г. Шольпъ* возражая предыдущему оппоненту, указываетъ на то, что въ обществовѣдѣніи не достигнутъ еще методъ точныхъ наукъ, однако, оперируя этими „невѣсомыми“ методами, получаютъ необходимые конкретные выводы: достаточно вспомнить, напримѣръ, законъ 3 іюня, давшій правительству желательный для него думскій составъ. Положеніе о томъ, что вести земское дѣло безъ земскихъ дѣятелей невозможно—это аксіома, на которой могутъ базироваться извѣстные выводы.

*К. М. Оберучевъ* присоединяется ко 2-му тезису доклада и высказываетъ предположеніе, что проектируемое земство принесетъ съ собою только новое бремя, которое не компенсируется удовлетвореніемъ нужды.

*С. И. Ивановъ* считаетъ врядъ ли правильнымъ представленіе А. П. Ярошевича о неподготовленности крестьянъ къ земской дѣятельности. Ссылаясь на примѣръ Вятской губерніи, гдѣ всѣ земскія начинанія были удачны, хотя тамъ почти нѣтъ дворянства, оппонентъ полагаетъ необходимымъ дать большую силу крестьянству въ будущихъ земскихъ учрежденіяхъ края, а прежде всего освободить ихъ отъ гнета невѣжества и пріобщить къ просвѣщенію.

*Г. Еремѣевъ*, отмѣчая несомнѣнную зрѣлость края для земства, а также ту огромную службу, которую могло бы сослужить польское населеніе въ этомъ земствѣ, полагаетъ однако, что едва ли кто будетъ привѣтствовать введеніе того земства, которое проектируется правительствомъ въ настоящее время.

*Г. Оргисъ-Рутенбергъ* высказывается въ пользу выдѣленія г. Кіева въ самостоятельную земскую единицу.

*А. Н. Черневичъ* ставитъ себѣ вопросъ о томъ земствѣ, которое нужно въ нашемъ краѣ. Отмѣчая 2 формы земствъ, 1864 г и 1890 г., А. Н. дѣлаетъ историческій обзоръ земствъ перваго типа и результатовъ ихъ дѣятельности. Останавливаясь затѣмъ на недостаткахъ земствъ типа 1890 г., оппонентъ считаетъ въ высшей степени нежелательнымъ введеніе послѣдняго рода земствъ, значительно ухудшенныхъ нововведеніями законопроекта.

*В. Г. Бажаевъ* въ заключительномъ словѣ указываетъ на то, что докладчикъ облегчилъ переходъ къ резолютивной части своими тезисами. Считая безспорными изложенные докладчикомъ тезисы, В. Г. высказывается противъ добавленія тезиса П. Л. Ковалько, такъ какъ это вывело бы обсужденіе за предѣлы рамокъ, поставленныхъ докладомъ. Среди краевыхъ вопросовъ, по мнѣнію В. Г., трудно найти такой, который имѣлъ бы такое животрепещущее значеніе, какъ земская реформа. Проектируемыя въ нашемъ краѣ земскія учрежденія базируются на земствѣ 1890 г., недостатки котораго подчеркнуты докладчикомъ. Ко всѣмъ этимъ недостаткамъ присоединяются новыя, въ видѣ добавленій политическаго характера, которыя могутъ только привести къ печальнымъ результатамъ. Констатируя безспорность того, что данный вопросъ входитъ въ компетенцію О-ва Экономистовъ, въ виду близкой связи съ вопросами экономической политики и соглашаясь съ докладчикомъ о необходимости разработки затронутаго имъ вопроса именно при помощи такъ называемыхъ „невѣсомыхъ" аргументовъ, В. Г. считаетъ необходимымъ выразить докладчику глубокую благодарность за интересное сообщеніе по одному изъ важнѣйшихъ вопросовъ, который О-во Экономистовъ не вправѣ было обойти молчаніемъ. (Шумные аплодисменты).

Засѣданіе закрыто въ $12^1/_2$ ч. ночи.

---

# ПРОТОКОЛЪ

## засѣданія Общества Экономистовъ 15 октября 1910 г.

Засѣданіе открыто въ 8 часовъ вечера. Въ засѣданіе прибыли: В. Г. Бажаевъ, В. А. Косинскій, А. И. Ярошевичъ, Е. Е. Слуцкій, С. А. Ивановъ, Н. С. Дѣловъ, И. Л. Ямзинъ. и нѣсколько человѣкъ гостей.

Заслушанъ докладъ предсѣдателя Совѣта В. Г. Бажаева: „О дѣятельности южныхъ земствъ въ области сельско-хозяйственной политики (по поводу земскаго отдѣла на Екатеринославской выставкѣ 1910 года)".

*В. А. Косинскій* коснулся между прочимъ землеустроительной дѣятельности земства. Изъ доклада видно, что въ Полтавской губ. дѣятельность земства и земнеустроительныхъ комиссій болѣе или менѣе координирована. Интересно узнать, какъ стоитъ дѣло въ тѣхъ губерніяхъ, гдѣ такой гармоніи не наблюдается.

*В. Г. Бажаевъ*. Вопросъ, затронутый В. А., является весьма важнымъ и больнымъ вопросомъ нашей аграрной политики. По этому вопросу происходилъ на съѣздѣ при выставкѣ оживленный обмѣнъ мнѣній, причемъ земскіе агрономы жаловались на то, что параллельная и несогласованная дѣятельность земскихъ агрономическихъ организацій и землеустроительныхъ коммиссій, ведетъ къ непроизводительной растратѣ силъ и средствъ, а иногда и къ треніямъ.

*А. И. Ярошевичъ* указываетъ на то, что въ Волынской губ. землеустроительная дѣятельностъ почти всецѣло находится въ рукахъ земства, тогда какъ въ Кіевской и Подольской губ. она регулируется землеустроительными комиссіями.

На вопросъ В. А. Косинскаго, не было ли отмѣчено при обсужденіи дѣятельности землеустроительныхъ органовъ созданіе нежизнеспособныхъ хозяйствъ, какъ это замѣчается въ нѣкоторыхъ мѣстахъ Россіи, докладчикъ отвѣтилъ, что съ этой стороны дѣятельность землеустроительныхъ органовъ не была освѣщена.

*Г. Теуминъ* просилъ докладчика дать ему разъясненіе на ряду вопросовъ, изъ которыхъ наиболѣе существеннымъ является вопросъ о томъ, почему докладчикъ находитъ, что иностранная агентура болѣе соотвѣтствуетъ общегосударственнымъ органомъ экономической политики, нежели земствамъ.

На этотъ вопросъ докладчикъ отвѣтилъ, что, не отвергая пользы иностранной агентуры, онъ находитъ однако, что организація таковой крайне дорога и потому едва ли посильна отдѣльнымъ земствамъ.

*С. А. Ивановъ* полагаетъ, что экономическая дѣятельность южныхъ земствъ ни въ какомъ случаѣ не можетъ быть сравниваема съ дѣятельностью сѣверныхъ земствъ. За исключеніемъ Полтавской губерніи, развивающей свою экономическую дѣятельность столь же планомѣрно, какъ и въ сѣверныхъ губерніяхъ, дѣятельность остальныхъ южныхъ земствъ, экспонировавшихъ на Екатеринославской выставкѣ, отличается случайнымъ характеромъ въ зависимости отъ произвола лицъ, стоящихъ во главѣ земской дѣятельности. Яркимъ подтвержденіемъ такой экономической политики можетъ служить Харьковское земство, въ которомъ направленіе экономической дѣятельности перестраивается чуть ли не каждое трехлѣтіе.

*В. Г. Бажаевъ*, не возражая по существу С. А. Иванову, констатируетъ однако тотъ фактъ, что по крайней мѣрѣ въ настоящее время большинство южныхъ земствъ вступило на правильный путь, и можно надѣяться, что въ будущемъ ихъ экономическая дѣятельность будетъ развиваться столь же планомѣрно, какъ это наблюдалось у сѣверныхъ земствъ.

Послѣ обмѣна мнѣній по нѣкоторымъ менѣе существеннымъ вопросамъ, предсѣдательствовавшій *А. И. Ярошевичъ* отмѣтилъ, что въ крайне интересномъ докладѣ В. Г. достаточно ярко подчеркнуто отрадное явленіе, что дѣятельность земствъ, экспонировавшихъ на Екатеринославской выставкѣ, обнаруживаетъ тенденцію къ быстрому развитію экономическихъ мѣропріятій, направленныхъ къ поднятію сельскохозяйственнаго производства данныхъ губерній. Въ заключеніе А. И. предлагаетъ собранію выразить благодарность докладчику за его обстоятельный и интересный докладъ.

Собраніе благодаритъ докладчика.

Въ закрытой части засѣданія постановлено устраивать въ будущемъ засѣданія по четвергамъ.

Относительно полученныхъ Совѣтомъ счетовъ типографіи Чоколова объ уплатѣ за печатаніе трудовъ Общества Экономистовъ постановлено просить Правленіе К. К. Института принять эти расходы за счетъ средствъ Института, въ виду отсутствія средствъ на покрытіе этихъ расходовъ у Общества.

Оглашены кандидаты въ члены О-ва: А. М. Куприцъ и А. К. Стрѣльниковъ.

Засѣданіе закрыто въ $11^1/_2$ часовъ.

# ПРОТОКОЛЪ

## засѣданія О-ва Экономистовъ 28 октября 1910 года.

Въ засѣданіе прибыли А. А. Русовъ, Е. Е. Слуцкій, К. Г. Воблый, М. В. Довнаръ-Запольскій, В. Я. Головня, И. Л. Ямзинъ. За отсутствіемъ предсѣдателя В. Г. Бажаева, предсѣдательствуетъ членъ совѣта А. А. Русовъ.—

Заслушанъ докладъ члена О-ва В. Я. Головни:

„Къ вопросу о вліяніи правительственной нормировки на развитіе сахарной промышленности въ Россіи".

### Программа доклада:

а) Могутъ ли законы 20 Ноября 1895 г. и 12 Мая 1903 года быть названы правительственной нормировкой сахарной промышленности?

б) Вліяніе закона 20 ноября 1895 года на развитіе сахарной промышленности въ Россіи.

в) Почему понадобилось существенное измѣненіе закона 20 н. 1895 г.

г) Вліяніе закона 12 Мая 1903 г. на развитіе сахарной промышленности въ Россіи.

д) Предполагаемыя измѣненія закона о правительственной нормировкѣ сахарной промышленности.

По выслушанію доклада одинъ изъ гостей замѣтилъ, что изъ доклада выходитъ такъ, что какъ-будто нормировка послужила на пользу потребителю, такъ какъ способствовала пониженію цѣнъ на сахаръ. Въ дѣйствительности же такое пониженіе явилось результатомъ естественнаго паденія непомѣрно высокихъ цѣнъ, которыя существовали до введенія нормировки.

*А. А. Русовъ* указалъ, что цѣны являются результатомъ взаимоотношенія спроса и предложенія: этому закону подчиняются и сахарныя цѣны.

*В. Я. Головня.* Пониженіе цѣнъ на сахаръ является результатомъ пониженія себѣстоимости производства сахара. 15 лѣтъ тому назадъ себѣстоимость, благодаря малой производительности заводовъ и несовершенству машинъ обходилась чуть ли не вдвое дороже нежели теперь.

*К. Г. Воблый.* Съ принципіальной точки зрѣнія врядъ ли можно возразить противъ нормировки. Принципъ свободы конкурренціи потерпѣлъ крахъ, и мы видимъ существованіе нормировки и въ другихъ отрасляхъ. Да если бы правительство не нормировало, сахарнаго производства, то частные предприниматели (сахарозаводчики) сами провели бы нормировку. Оригинальна точка зрѣнія докладчика, защищающаго нормировку. Надо думать объ интересахъ не только производителей, но и потребителей. Потребители же находятся у насъ въ довольно невыгодномъ положеніи: въ Россіи на одного человѣка приходится въ среднемъ 13 фунтовъ сахара, а въ другихъ государствахъ 90. Необходимо подумать о пониженіи цѣнъ на сахаръ, чтобы сдѣлать его предметомъ широкаго потребленія. Затѣмъ оппонентъ останавливается еще и на другихъ пунктахъ доклада и указываетъ: вопервыхъ, что вопросъ о себѣстоимости сахара трудно выяснить въ виду крайняго разнообразія въ ея опредѣленіи въ разныхъ мѣстахъ (Толпыгинъ-3 руб; Зуевъ-1 р. 60 к.);

во вторыхъ, что, благодаря нормировкѣ, поддерживаются и гнилые заводы, которые при свободной конкуренціи погибли бы;

замѣчается также огромная задолженность сахарной промышленности и ненормальныя условія кредита въ этой отрасли.

Отмѣтивъ желательность пониженія акциза для цѣлей увеличенія потребленія, К. Г. выразилъ сомнѣніе въ правильности огромныхъ цифръ, идущихъ въ вознагражденіе нѣкоторымъ служащимъ и тѣмъ самимъ понижающихъ % предпринимательскаго барыша.

*Е. Е. Слуцкій* указываетъ на то обстоятельство, что въ другихъ отрасляхъ промышленности предприниматели въ одни года получаютъ барышъ, въ другіе—убытки это вполнѣ нормальное явленіе, въ сахарной же промышленности предприниматели, получая многіе годы огромные барыши, не желаютъ иногда потерпѣть и убытокъ и всячески стараются переложить его на потребителя. Оппонентъ считаетъ также слишкомъ высокимъ % прибыли сахарозаводчиковъ, (15 %), необычный для другихъ предприятій и полагаетъ, что этотъ % могъ бы быть пониженъ до 10 %. Правда, это вызвало бы гибель такъ называемыхъ гнилыхъ заводовъ, но выгодно отразилось бы на всей сахарной промышленности въ смыслѣ улучшенія пріемовъ производства въ здоровыхъ заводахъ, а особенно выгодно было бы для потребителя въ смыслѣ пониженія стоимости сахара, какъ предмета потребленія.

Докладчикомъ сдѣланы были нѣкоторыя возраженія оппонентамъ, послѣ чего предсѣдатель предложилъ выразить докладчику благодарность.

Засѣданіе закрыто въ 11 часовъ вечера.—

# ПРОТОКОЛЪ

**засѣданія О-ва Экономистовъ 25 ноября 1910 года.**

Въ засѣданіе прибыли В. Г. Бажаевъ, В. А. Косинскій, А. А. Русовъ, Е. Е. Слуцкій, В. Я. Головня, И. Л. Ямзинъ, А. С. Звоницкій, Н. В. Лозинскій, Т. В. Локоть, К. М. Оберучевъ, Н. С. Дѣловъ, Е. Г. Шольпъ.

Послѣ открытія засѣданія предсѣдатель О-ва В. Г. Бажаевъ въ краткой рѣчи указалъ на тяжелую потерю, понесенную человѣчествомъ въ лицѣ почившаго великаго писателя земли русской Льва Николаевича Толстого и предложилъ почтить его память вставаніемъ, что и было выполнено Обществомъ.

Заслушанъ докладъ дѣйствительнаго члена О-ва В. А. Косинскаго „Мобилизація земельной собственности въ Пруссіи и Россіи".

Тезисы въ слѣдующемъ журналѣ.

Въ виду позднято времени дебаты по докладу отложены до слѣдующаго засѣданія.

Избраны закрытой баллатировкой въ члены О-ва Абрамъ Натановичъ Куприцъ и Алексѣй Кириловичъ Стрѣльниковъ оба единогласно.

Засѣданіе закрыто въ $11^1/_2$ часовъ вечера.

---

# ПРОТОКОЛЪ

## засѣданія О-ва Экономистовъ 2 декабря 1910.

Въ засѣданіе прибыли В. Г. Бажаевъ, А. А. Русовъ, В. А. Косинскій, В. Я. Головня, А. И. Ярошевичъ, И. Л. Ямзинъ, Т. В. Локоть, К. М. Оберучевъ, А. К. Стрѣльниковъ, Д. М. Плескачевскій.

Приступлено къ обсужденію доклада В. А. Косинскаго: „Мобилизація земельной собственности въ Пруссіи и Россіи", доложеннаго 25 ноября.

### Тезисы доклада.

1) Мобилизація земли въ томъ, либо другомъ направленіи объясняется не только техническими условіями производства, но главнѣйшимъ образомъ-экономической природою капиталистическаго и трудового предпріятія.

2) Капиталистическія сельскохозяйственыя предпріятія (работающія наемнымъ трудомъ) даютъ предпринимателю прибыль на капиталъ и земельную ренту—такъ называемые *нетрудовые* доходы.

3) Цѣна на землю въ капиталистическомъ предпріятіи опредѣляется капитализированіемъ земельной ренты изъ обычнаго ссуднаго процента.

4) Процентъ дохода капиталистическаго сельскохозяйственнаго предпріятія всегда *ниже* обычнаго процента прибыли на капиталъ въ обрабатывающей промышленности и торговлѣ. Это—результатъ неправильнаго приравниванія земли капиталу,—приравниванія, влекущаго за собою соціальное противорѣчіе, характерное для періодовъ развитія.

5) Некапиталическое частнохозяйственное предпріятіе (трудовое крестьянское) приноситъ своему предпринимателу только *трудовой* доходъ.—*Нетрудовыхъ доходовъ* (прибыли и земельной ренты) въ немъ *нѣтъ*. Трудовой предприниматель смотритъ на свое предпріятіе какъ на форму приложенія своего труда при помощи собственныхъ матеріальныхъ средствъ производства.

6) Оцѣнка земли въ трудовомъ предпріятіи совершенно иная, чѣмъ въ капиталистическомъ и какъ правило, выше капиталистической оцѣнки.

7) Случаи чрезмѣрныхъ оцѣнокъ въ трудовыхъ крестьянскихъ предпріятіяхъ.

8) Разница въ оцѣнкѣ земли капиталистомъ сельскимъ хозяиномъ и трудовымъ предпринимателемъ уже въ достаточной мѣрѣ опредѣляетъ собою переливъ земли изъ рукъ капиталистически хозяйствующихъ придпринимателей въ руки трудовыхъ крестьянскихъ предпринимателей. Трудовой предприниматель оказывается на земельномъ рынкѣ болѣе сильнымъ конкуррентомъ, чѣмъ капиталистическій, и земля направляется къ нему.

9) Ипотечная задолженность, ощущаемая въ капиталистическихъ сельско-хозяйственыхъ предпріятіяхъ какъ тяжелый гнетъ, и не ощущаемая, какъ тягость, въ крестьянскихъ трудовыхъ предпріятіяхъ (если только земля не куплена по чрезмѣрной цѣнѣ)—является также результатомъ приравниванія земли капиталу въ капиталистическихъ сельскохозяйственныхъ предпріятіяхъ. Она также толкаетъ землю изъ рукъ капиталистическихъ сельскихъ хозяевъ въ руки трудовыхъ предпринимателей, гдѣ земля не играетъ роли фонда, долженствующаго приносить нетрудовой доходъ, а служитъ средствомъ (какъ и капиталъ) для приложенія своего собственнаго труда въ своемъ предпріятіи.

10) Всѣ вышеотмѣченныя причины влекутъ за собою раскапитализированіе сельскаго хойяйства—переходъ земли изъ рукъ лицъ, обрабатывающихъ землю наемнымъ трудомъ въ руки лицъ которыя обрабатываютъ землю трудомъ своимъ собственнымъ и своихъ семейныхъ—тенденція совершенно обратная той, какая замѣчается въ обрабатывающей промышленности и торговлѣ.

11) Въ предѣлахъ трудового хозяйства необходимо различать три типа трудовыхъ предпріятій: а) парцеллярное, б) пищевой участокъ и в) трудовой участокъ. Наиболѣе совершеннымъ типомъ изъ трехъ отмѣченныхъ является трудовой участокъ.

12) Въ средѣ трудовыхъ предпріятій замѣчается относительное увеличеніе числа предпріятій парцеллярныхъ, уменьшеніе % числа пищевыхъ участковъ и увеличеніе % числа трудовыхъ участковъ.

13) Земельная площадь, находящаяся подъ парцеллярными хозяйствами, не увеличивается въ равной мѣрѣ съ числомъ ихъ (иногда даже уменьшается абсолютно) и своимъ отставаніемъ показываетъ измельчаніе этихъ участковъ.

14) Не смотря на уменьшеніе относительнаго числа пищевыхъ участковъ, площадь подъ ними % увеличивается, что указываетъ на ростъ среднихъ размѣровъ этихъ предпріятій.

15) Увеличеніе относительнаго числа трудовыхъ участковъ идетъ параллельно съ увеличеніемъ площади подъ ними. Эти предпріятія ростутъ въ числѣ и занимаютъ съ теченіемъ времени все большую площадь.

16) Парцеллярныя хозяйства не имѣютъ самостоятельнаго сельско-хозяйственнаго значенія,—они ютятся почти исключительно въ мѣстахъ, гдѣ можно найти заработокъ путемъ отдачи труда въ наемъ въ капиталистичоекія предпріятія. Относительно-же двухъ типовъ трудовыхъ хозяйствъ мы должны констатировать тотъ существенный фактъ, что пищевые участки, все увеличиваясь и увеличиваясь въ своихъ размѣрахъ, дорастаютъ до размѣровъ трудовыхъ. Ясно, что владѣльцы пищевыхъ участковъ, стремясь улучшить свое положеніе, увеличиваютъ путемъ скупки отдѣльныхъ клочковъ земли, свои владѣнія до размѣровъ, при которыхъ трудъ ихъ семейныхъ находитъ себѣ болѣе или менѣе полное занятіе.

*Г. В. Локоть* не можетъ согласиться съ положеніями докладчика, доказывающаго, что въ крестьянскомъ трудовомъ хозяйствѣ нѣтъ ренты и прибыли на капиталъ, какъ это наблюдается въ капиталистическихъ с.-хозяйственныхъ предпріятіяхъ. Докладчикъ въ данномъ случаѣ обращаетъ вниманіе на формальную сторону дѣла, а не на фактическую. Если крестьянинъ изъ своего дохода не выплачиваетъ никому ни ренты, ни % на капиталъ, то изъ этого еще не слѣдуетъ, что его предпріятіе не даетъ ихъ. Вѣдь рента проистекаетъ отъ первоначальныхъ, неистощимыхъ силъ природы, присущихъ даннымъ участкамъ земли, а таковыя не измѣняются въ зависимости отъ того, является ли с.-хозяйственное предпріятіе капиталистическимъ или трудовымъ крестьянскимъ. Что касается прибыли, то и таковую крестьянинъ получаетъ, такъ какъ вкладываетъ въ свое препріятіе капиталъ въ видѣ орудій производства, удобренія, сельско-хозяйственныхъ построекъ и проч. Оппонентъ не можетъ также согласиться съ докладчикомъ въ томъ, что % прибыли на капиталъ въ сельскохозяйственномъ производствѣ будетъ всегда ниже, чѣмъ въ индустріи. Если же въ настоящее время подобное явленіе имѣетъ мѣсто, то это объясняется большей концентраціей капиталовъ въ индустріи и быстротой оборота. Однако надо полагать, что въ недалекомъ будущемъ и сельское хозяйство будетъ привлекать все больше и больше капиталовъ, а рента будетъ все болѣе и болѣе возрастать, вслѣдствіе чего будетъ возрастать и прибыльность сельско-хозяйственныхъ предпріятій, а такое явленіе должно будетъ имѣть мѣсто вслѣдствіе ограниченности земельнаго запаса. Поэтому нельзя согласиться съ основнымъ положеніемъ докладчика о раскапитализированіи сельско-хозяйственнаго производства.

*В. А. Косинскій* въ своемъ обстоятельномъ возраженіи доказываетъ основныя положенія своего доклада. Центральнымъ мѣстомъ возраженія является указаніе на особую конструкцію трудового крестьянскаго сельско-хозяйственнаго препріятія. Въ трудовомъ хозяйствѣ имѣетъ мѣсто только личный трудъ крестьянина и его семьи. Наемнаго труда въ немъ нѣтъ. Такимъ образомъ исключаются всѣ тѣ отношенія между различными классами, владѣльцами капитала и владѣльцами наемнаго труда. Въ трудовомъ крестьянскомъ сельско-хозяйственномъ предпріятіи капиталъ и трудъ объединены въ лицѣ крестьянина предпринимателя: онъ самъ прилагаетъ свой трудъ и трудъ своей семьи на участкѣ при помощи собственнаго капитала. Слѣдовательно, въ трудовомъ сельско-хозяйственномъ предпріятіи нѣтъ дѣленія дохода на необходимую и прибавочную стоимость. Вся цѣнность вновь созданнаго въ такомъ предпріятіи продукта цѣликомъ поступаетъ въ собственность предпринимателя-трудового сельскаго хозяина. Этотъ доходъ—трудовой, и слѣдовательно, прибыли на капиталъ, являющейся доходомъ нетрудовымъ, здѣсь нѣтъ. Нѣтъ также и поземельной ренты.

*А. А. Русовъ* находитъ, что трудъ В. А. Косинскаго, вкратцѣ изложенный въ настоящемъ докладѣ, разрѣшаетъ цѣлый рядъ сомнѣній, возникавшихъ среди земскихъ статистиковъ при оцѣнкѣ земельныхъ имуществъ Полтавской, Черниговской, Херсонской и др. губерній, за что въ качествѣ бывшаго земскаго статистика выражаетъ докладчику искреннюю признательность.

*А. И. Ярошевичъ* не согласенъ съ мнѣніемъ докладчика, что крестьянскомутрудовому хозяйству не приходится прибѣгать къ наемному труду, въ виду разнообразія культуръ на этихъ участкахъ, что и подтверждаетъ рядомъ примѣровъ изъ крестьянской жизни юго-западнаго края.

*В. Я. Головня* полагаетъ, что докладчикъ, говоря о меньшей прибыльности земельнаго предпріятія въ общемъ сравнительно съ прибыльностью промышленныхъ и торговыхъ предпріятій, совершенно упустилъ изъ виду постоянный вполнѣ естественный ростъ цѣнъ на землю, что составляетъ скрытую прибыльность землевладѣнія. Поэтому онъ убѣжденъ, что ликвидируютъ землевладѣльческое предпріятіе лишь тѣ, кто нуждается въ полученіи всей прибыли немедленно, не ожидая, что естественное повышеніе цѣнъ принесетъ имъ эту прибыль въ скрытой формѣ. Тѣ цифровыя данныя о мобилизаціи земельной собственности въ Россіи, какія были приведены докладчикомъ, приводятъ оппонента къ заключенію, что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло не съ раскапитализированіемъ землевладѣнія, а лишь съ новой формой эксплуатаціи труда капиталомъ, почему онъ доказываетъ, что капиталъ не уходитъ изъ земли, а въ видѣ ипотечнаго кредита ложится тяжелымъ бременемъ на труженика-земледѣльца, заставляя его въ большинствѣ случаевъ ликвидировать свое предпріятіе, что, конечно влечетъ за собою полное его разореніе.

*В. Г. Бажаевъ* находитъ, что вопросъ, поднятый докладчикомъ, является одномъ изъ наиболѣе интересныхъ въ настоящее время, когда предположенія о томъ, что историческая миссія капитализма имѣетъ мѣсто и въ сельскомъ-хозяйствѣ, въ значительной степени пошатнулись, благодаря результатамъ германской переписи. Интересъ къ докладу особенно увеличивается вслѣдствіе того, что докладчикъ пользовался обширнымъ, доброкачественнымъ статистическимъ матеріаломъ; хотя нѣкоторыя положенія первой, теоретической части доклада могутъ вызывать возраженія, но въ общемъ докладъ представляетъ громадный интересъ и проливаетъ свѣтъ на одинъ изъ наиболѣе спорныхъ вопросовъ современной экономики сельскаго-хозяйства за что предлагаетъ выразитъ докладчику благодарность. (Оживленныя рукоплесканія).

Засѣданіе закрыто въ 12 ч. ночи.

---

# ПРОТОКОЛЪ

## засѣданія Общества Экономистовъ 9-го декабря 1910 года.

Въ засѣданіе прибыли В. Г. Бажаевъ, М. К. Оберучевъ, А. А. Русовъ, В. А. Косинскій, С. А. Ивановъ, П. Л. Кованько, В. Я. Головня и нѣсколько гостей.

Заслушанъ докладъ дѣйствительнаго члена Общества К. М. Оберучева: „Крестьянство и народная школа“ (по даннымъ школьной анкеты въ Кіевской губерніи).

### Тезисы доклада:

1) Стремленіе къ грамотѣ и пользованіе для удовлетворенія этого стремленія народными школами находится въ прямой связи со степенью зажиточности хозяйственныхъ группъ, и матеріальный достатокъ не является факторомъ, препятствующимъ распространенію грамоты, какъ думаютъ нѣкоторые статистики, а, напротивъ, благопріятствуетъ ему.

2) Наиболѣе культурными слоями населенія, поскольку это характеризуется грамотой, являются наиболѣе матеріально обезпеченные.

3) Съ повышеніемъ культурности и матеріальнаго достатка повышается стремленіе дать начальное образованіе дѣвочкамъ.

4) Хлѣбопашество, какъ таковое, не является тормазомъ для развитія грамоты.

5) Группа незасѣвающихъ или безземельныхъ, занимаетъ въ ряду другихъ хозяйственныхъ группъ совершенно исключительное положеніе и, несмотря на полное отсутствіе земли, не является самой бѣдной группой, а, напротивъ, уровень ея матеріальнаго благосостоянія выше средняго.

6) Въ ряду причинъ, вліяющихъ на высокій культурный уровень группы безземельныхъ, значительное вліяніе оказываетъ наличность большаго экономическаго достатка сравнительно съ группами малоземельныхъ крестьянъ.

*В. Г. Бажаевъ* считаетъ неправильнымъ, что докладчикъ, устанавливая хозяйственныя группы по ихъ экономической мощности, отбросилъ такой общепризнанный признакъ зажиточности, какъ количество скота, ограничившись только признакомъ посѣвной площади. Останавливаясь затѣмъ на тѣхъ хозяйственныхъ группахъ, которыя установлены были докладчикомъ, В. Г. полагаетъ, что въ группу безземельныхъ не нужно было включать неземледѣльческіе элементы, каковы торговцы, ремесленники и др.

*А. С. Ивановъ* указываетъ, что данныя по внѣшкольному образованію вполнѣ подтверждаютъ выводы, сдѣланные докладчикомъ. Что касается группы безземельныхъ, то въ виду крайней разнородности ея, а потому и недостаточной характерности всѣхъ ея среднихъ и относительныхъ величинъ, оппонентъ считалъ бы желательнымъ детализировать эту группу и разработать.

*К. М. Оберучевъ*, возражая предыдущимъ оппонентамъ, разъясняетъ, что признакъ хозяйственной мощности по количеству скота, безусловно весьма существенный, имъ отброшенъ въ виду полнаго параллелизма, обнаруженнаго при сопоставленіи указаннаго признака съ признакомъ посѣвной площади, положеннымъ въ основаніе группировки хозяйствъ. Соглашаясь затѣмъ съ предыдущимъ оппонентомъ въ вопросѣ о необходимости подраздѣленія группы безземельныхъ, докладчикъ указываетъ на то обстоятельство, что онъ не могъ отказаться отъ этой группы въ данномъ докладѣ: это находится въ тѣсной связи съ его желаніемъ провѣрить основное положеніе извѣстной работы статистика Воронова, доказывающаго, что пролетаризація крестьянскихъ массъ способствуетъ развитію среди нихъ просвѣщенія.

*В. А. Косинскій*, интересуясь въ частности вопросомъ о томъ, на чемъ докладчикъ базировалъ свое положеніе о наименьшей экономической обезпеченности хлѣбопашцевъ сравнительно со всѣми остальными группами сельскаго населенія, пытается объяснить причины большей культурности группъ торговцевъ, ремесленниковъ и др. сравнительно съ хлѣбопашцами. В. А. полагаетъ, что лица, составляющія вышеуказанныя группы сельскаго населенія, являясь наиболѣе подвижнымъ элементомъ, могли получить образованіе и въ другихъ мѣстахъ, внѣ деревни, между тѣмъ какъ хлѣбопашцы, какъ наиболѣе привязанные къ землѣ, при отсутствіи школъ вообще, поневолѣ не могутъ пріобщиться къ грамотѣ; это обстоятельство весьма существенно для объясненія высокаго % неграмотныхъ среди хлѣбопашцевъ.

*К. М. Оберучевъ* разъясняетъ, что по всѣмъ сопровождающимъ признакамъ, какъ наемъ рабочихъ, собственное наниманіе въ рабочіе и др. группа хлѣбопашцевъ оказывается наименѣе экономически обезпеченной. Вмѣстѣ съ тѣмъ докладчикъ вполнѣ соглашается съ предыдущимъ оппонентомъ въ объясненіи сравнительной малограмотности хлѣбопашцевъ прикрѣпленностью ихъ къ землѣ, съ одной стороны, и отсутствіемъ школъ—съ другой.

*В. Г. Бажаевъ* указываетъ на особенное отношеніе, которое должно быть у О-ва Экономистовъ къ докладу К. М. Оберучева. Въ задачи О-ва входитъ также производство собственныхъ обслѣдованій, а докладъ и является основаннымъ на данныхъ, собранныхъ по иниціативѣ Общества. Вопросъ о взаимоотношеніи между культурой матеріальной и духовной—вопросъ глубокой важности. Мысль объ обслѣдованіи даннаго вопроса анкетнымъ путемъ, а также и разработка полученныхъ такимъ образомъ данныхъ всецѣло принадлежатъ К. М., за что В. Г. и предлагаетъ выразить докладчику глубокую благодарность. (Рукоплесканія).

*А. А. Русовъ* предлагаетъ:

1) выразить благодарность Кіевской Губернской Земской Управѣ, единственной изъ трехъ управъ (Кіевской, Волынской и Подольской) согласившейся предпринять анкету, предложенную ей О-вомъ Экономистовъ;

# ИЗВѢСТІЯ

# Кіевскаго Коммерческаго

# ИНСТИТУТА,

состоящаго въ вѣдѣніи Министерства Промышленности и Торговли.

1911.

Книга IX.

КІЕВЪ.
Типографія И. И. Чоколова, Фундуклеевская ул., д. № 22.
1911.